**Тема. Наслідки з аксіом перших трьох груп аксіоматики Гільберта. Співвідношення між кутами і сторонами трикутника.**

**Мета:** Ознайомитися із аксіоматичною теорією Гільберта, викладеною в книзі [8], навчитися проводити логічний аналіз означень понять та доведень теорем.

**Методичні рекомендації.** При ознайомленні з аксіоматичною теорією слід звернути увагу на теореми, які наведено без доведення, спробувати їх самостійно довести і оформити доведення, використовуючи математичну символіку. При проведенні логічного аналізу означень можна його результати подавати у вигляді блок-схеми. При проведенні логічного аналізу доведення теореми важливо прослідкувати шлях від аксіом системи Гільберта до тверджень, що доводяться. Номери теорем в посиланнях співпадають із номерами теорем з Додатку Г.

Зверніть увагу на теорему 30 та наслідки з неї (задачі 5-8). При доведенні теореми 26 легко допустити помилку. Одне з помилкових доведень наведено в матеріалах для самостійної роботи.

Слід також звернути увагу на те, що за допомогою аксіом перших трьох груп на множині відрізків можна ввести відношення «менше» («більше»), використовуючи лише неозначуване поняття «конгруентність», тобто без вимірювання довжин відрізків. Можна також дати означення суми та різниці відрізків.

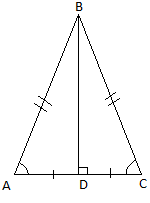
**Приклади розв’язання задач**

Користуючись аксіомами 1.1-1.3 аксіоматики Гільберта довести твердження.

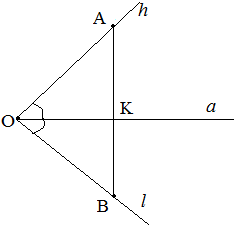
**Задача 1.** Будь-які дві різні прямі мають не більше однієї спільної точки.

***Розв’язання.*** Скористаємось методом від супротивного. Нехай  і  – різні прямі, які мають дві спільні точки: , тобто  та . Тоді через дві різні точки  проходить дві прямі, що суперечить аксіомі 1.2.

**Задача 2.** (Th. 17 bis з додатку Г) В рівнобедреному трикутнику медіана основи є висотою та бісектрисою кута при вершині.

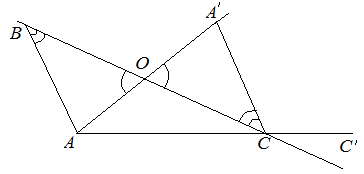
***Доведення.*** Розглянемо рівнобедрений трикутник , в якому проведена медіана . За умовою задачі , . За теоремою 17 , а, з теореми 14 випливає, що . З рівності цих трикутників випливає, що , тобто  – бісектриса . Також з рівності  суміжних кутів випливає, що кожен з них прямий, отже  – висота.

**Задача 3.** (Th. 25)Довести, що з будь-якої точки можна опустити на пряму один і тільки один перпендикуляр.

**

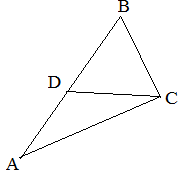
***Доведення.*** На прямій  візьмемо точку . Через точку  та точку  проведемо пряму . За аксіомою 3.4. існує єдина пряма  така, що . За аксіомою 3.1. існує єдина точка : . Оскільки точки  і  лежать в різних півплощинах, то за теоремою 10 прямі  та  перетинаються. Розглянемо трикутник . За побудовою ,  – бісектриса . Отже,  – висота (за теоремою 17 bis).

**Задача 4.** (Th. 30)Зовнішнійкут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним**.**

******

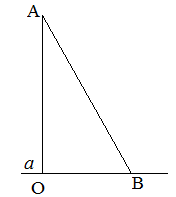
Доведення цієї теореми наведене в теоретичній частині.

**Задача 5.** (Th. 32)**.** В трикутнику більша сторона лежить навпроти більшого кута і навпаки.

******

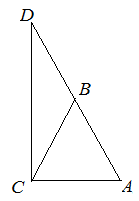
***Доведення.*** Розглянемо трикутник , в якому . За аксіомою 3.1 існує єдина точка  така, що . Отриманий трикутник  – рівнобедрений, а значить  (за теоремою 17). З теореми 30 випливає, що , а значить і . Оскільки , то в трикутнику  маємо .

**Задача 6.** (Th. 33**)** Довести, що перпендикуляр менший за похилу, які проведені до прямої з однієї точки.



***Доведення****.* На пряму  з точки  опустимо перпендикуляр  та похилу . Розглянемо трикутник , в якому кут  прямий, а  і  – гострі (за теоремою 31). Оскільки , то  (за теоремою 32).

**Задача 7.** (Th. 34)Довести, що кожна сторона трикутника менша суми та більша різниці інших його сторін**.**

***Доведення.*** Розглянемо трикутник . Доведемо, що  та . З аксіоми 3.1 випливає, що існує єдина точка  така, що . Утворився рівнобедрений трикутник , в якому  (за теоремою 17). Очевидно, що , тоді , звідки .

**Тема.** **Абсолютна геометрія. Доведення тверджень абсолютної геометрії про суму кутів трикутника.**

**Мета:** Ознайомитися з аксіоматичною теорією математичної структури «абсолютна геометрія».

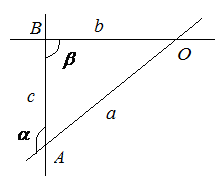
**Методичні рекомендації.** В аксіоматичній теорії абсолютної геометрії зверніть увагу на доведення серії теорем про суму кутів трикутника та на роль аксіом неперервності в обґрунтуванні теорії вимірювання величин (довжин відрізків, величин кутів). Для самостійного опрацювання рекомендується огляд теорії вимірювання площ многокутників та об’ємів многогранників та ознайомлення з третьою проблемою Гільберта (завдання 4).

Зверніть увагу на те, що означення паралельних прямих належить до абсолютної геометрії.

В деяких задачах для позначення міри прямого кута використовується символ , який був введений ще в стародавні часи і використовується дотепер, особливо в літературі з основ геометрії.

**Приклади розв’язання задач**

**Задача 1.** Довести що коли прямі  і  лежать в одній площині і пряма , яка перетинає прямі , утворює з ними рівні внутрішні навхрест лежачі кути, то прямі паралельні.



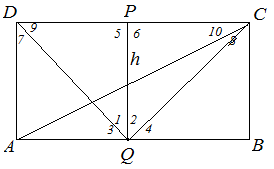
***Доведення.*** Нехай пряма  перетинає пряму  в точці , а пряму  – в точці . Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що існує така точка , що прямі  перетинаються в ній. В утвореному трикутнику  кут  – внутрішній кут при вершині ,кут  – зовнішній кут при вершині  і  (за умовою). Отримали протиріччя з теоремою 30, отже наше припущення невірне, тобто прямі  не перетинаються.

**Задача 2.** Довести, що для чотирикутника Саккері виконуються наступні твердження:

1. серединний перпендикуляр до нижньої основи перетинає верхню основу;

2. серединний перпендикуляр до нижньої основи є серединним перпендикуляром до верхньої основи;

3. Кути при верхній основі рівні.



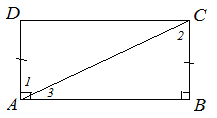
***Доведення.***

1. У чотирикутнику Саккері розглянемо трикутник  і серединний перпендикуляр  до нижньої основи. Пряма  за умовою перетинає відрізок , пряма  і відрізок  не перетинаються за теоремою 45. Отже, пряма  і відрізок  перетинаються (за аксіомою Паша). Далі розглянемо трикутник . З того, що  і  перетинаються, а  і  не перетинаються, випливає, що  і  перетинаються.

2. Розглянемо трикутники  і . За умовою , , , а значить  (за теоремою 14). З рівності трикутників випливає, що , . Оскільки , то . За теоремою 14 виконується також рівність трикутників  і , а значить ,  (як суміжні). Отже,  – серединний перпендикуляр до .

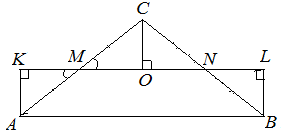
3. З рівності  випливає, що , а з  випливає, що . Тому .

**Задача 3.** Довести, що верхня основа чотирикутника Саккері не менша за нижню.

******

***Доведення****.* В чотирикутнику  позначимо кути: , , . В абсолютній геометрії має місце теорема: сума кутів трикутника не більша ніж . Тому можна записати наступні співвідношення , ,з яких слідує  і . З останньої нерівності посилаючись на теорему 32 робимо висновок, що .

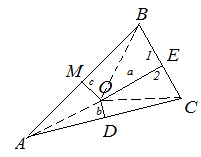
**Задача 4.** Довести, що середня лінія трикутника не більша за половину основи.

******

***Доведення.*** Нехай в трикутнику  побудована середня лінія . На пряму  опустимо перпендикуляри з вершин трикутника Трикутники  і  рівні, тому . Також виконується рівність , а значить , отже . Отриманий чотирикутник  є чотирикутником Саккері, а тому  за попередньою задачею. З рівності вказаних пар трикутників випливають рівності ,  відповідних сторін цих трикутників.

Таким чином, , або , що і треба було довести.

**Задача 5.** Довести, якщо два серединних перпендикуляра до сторін трикутника перетинаються в точці , то і третій серединний перпендикуляр проходить через цю точку.

*****Доведення.*** Розглянемо трикутник , в якому  – серединний перпендикуляр до сторони ,  – серединний перпендикуляр до сторони  та прямі  і  перетинаються в точці  Проведемо серединний перпендикуляр  до сторони . Розглянемо трикутники  та , вони рівні за першою ознакою рівності трикутників. Аналогічно . З цих рівностей випливає, що , а значить трикутник  – рівнобедрений. Нехай  – медіана цього трикутника, тоді за теоремою 17 bis  та  перпендикулярні, тобто  співпадає з серединним перпендикуляром .

**Самостійна робота 2**

**«Аксіоматичні теорії евклідової геометрії» (15 б.)**

(надіслати файл у систему Moodle)

**Вказівки:** 1) кожне твердження в аксіоматичній теорії розміщується після всіх необхідних для його доведення аксіом, означень та теорем.

2) логічний аналіз означення поняття передбачає поступове виявлення більш широких за об’ємом понять аж до неозначуваних понять (приклад логічного аналізу означення є у навчальному посібнику на сторінці 56). Логічний аналіз доведення теореми передбачає поступове виявлення всіх необхідних для доведення означень та раніше доведених теорем аж до аксіом. Логічний аналіз можна оформити у вигляді схеми типу блок-схеми.

**Задача 1.** Знайти в аксіоматичній теорії на базі системи аксіом Гільберта (викладена в книзі Єфимова Н.В. Высшая геометрия) місце означення поняття (дивись нижче свій варіант). Зробити логічний аналіз означення.

1. прямого кута;
2. похилої;
3. дотичної до кола;
4. перпендикуляра до прямої;
5. правильного трикутника;
6. рівнобедреного трикутника;
7. вертикальних кутів;
8. променя (півпрямої).

**Задача 2.** Знайти в аксіоматичній теорії на базі системи аксіом Гільберта (викладена в книзі Єфимова Н.В. Высшая геометрия) місце теореми (дивись нижче свій варіант). Зробити логічний аналіз доведення.

1. Якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то його діагоналі перпендикулярні.
2. Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то суми довжин його протилежних сторін рівні.
3. В рівних трикутниках. навпроти рівних кутів лежать рівні сторони.
4. Якщо трикутник рівнобедрений, то кути при його основі рівні.
5. Якщо даний многокутник правильний, то в нього можна вписати коло.
6. Якщо чотирикутник вписаний в коло, то суми величин його протилежних кутів рівні 180 градусам.
7. Величина вписаного кута доівнює половині величини дуги, на яку він спирається.
8. Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180 градусам.

**Задача 3 (6 варіантів)** Користуючись аксіомами перших трьох груп аксіом системи Гільберта, довести твердження:

1). Перша ознака рівності трикутників.

2). Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

3). Усі прямі кути конгруентні між собою.

4). Кожен кут можна розділити навпіл, причому єдиним чином.

5). У будь-якому трикутнику принаймні два кути є гострими.

6). З кожної точки на прямій можна відновити до цієї прямої єдиний перпендикуляр.

**Задача 4 (4 варіанти)** Користуючись аксіомами перших чотирьох груп аксіом системи Гільберта:

1). Довести, що якщо існує трикутник із сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам, то сума внутрішніх кутів довільного трикутникам дорівнює двом прямим кутам.

2). Довести, що якщо існує прямокутний трикутник із сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам, то сума внутрішніх кутів довільного прямокутного трикутникам дорівнює двом прямим кутам.

3). Довести, що вписаний в коло кут, що спирається на діаметр, не більший за прямий кут.

4). Знайти залежність між стороною правильного вписаного в коло шестикутника і радіусом кола.