

Практичне заняття № 1. Обчислення визначеного інтеграла

1. Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (1)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

Приклад 1. Обчислити $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

Розв’язання.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} &= \int_{-1}^7 (3x+4)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_{-1}^7 = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \Big|_{-1}^7 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{3 \cdot 7 + 4} - \sqrt{3 \cdot (-1) + 4} \right) = \\ &= \frac{2}{3} (5 - 1) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\pi/2} \sin \frac{x}{3} dx$.

Розв’язання.

$$\int_0^{\pi/2} \sin \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos 0 \right) =$$

$$= -3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right).$$

Приклад 3. Обчислити $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

Розв'язання.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + 1} =$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x+1) \Big|_{-1}^0 = \operatorname{arctg} 1 -$$

$$- \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 4. Обчислити $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 4x - 5)}} =$$

$$= \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 - 5)}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{-((x-2)^2 - 2^2 - 5)}} =$$

$$= \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9 - (x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{3} \Big|_2^5 =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 5. Обчислити $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \int_1^2 \frac{x^2 + 1 - x^2}{x(x^2 + 1)} dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2 + 1} =$$

$$= \ln |x| \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^2 =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5.$$

Приклад 6. Обчислити $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

Розв'язання.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2.$$

Приклад 7. Обчислити $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} &= \int_0^{16} \frac{(\sqrt{x+9} + \sqrt{x}) dx}{(\sqrt{x+9} - \sqrt{x})(\sqrt{x+9} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{9} \int_0^{16} (\sqrt{x+9} + \sqrt{x}) dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \left((x+9)^{3/2} + x^{3/2} \right) \Big|_0^{16} = \\ &= \frac{2}{27} (125 + 64 - 27 - 0) = 12. \end{aligned}$$

2. Метод заміни змінної (підстановки)

Приклад 8. Обчислити $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}.$

Розв'язання.

$$\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1}, x = t^2 - 1, \\ dx = 2t dt, x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = 3 \Rightarrow t = 2, \end{array} \right\| = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t dt}{t} =$$
$$= 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = 2 \left(\frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{8}{3}.$$

Приклад 9. Обчислити $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

Розв'язання.

$$\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x-2}, x = t^3 + 2, dx = 3t^2 dt, \\ x = 3 \Rightarrow t = 1, x = 29 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right\| =$$
$$= 3 \int_1^3 \frac{t^4 dt}{3 + t^2} = 3 \int_1^3 \frac{t^4 - 9 + 9}{t^2 + 3} dt = 3 \int_1^3 \frac{(t^2 - 3)(t^2 + 3) + 9}{t^2 + 3} dt =$$
$$= 3 \int_1^3 \left(t^2 - 3 + \frac{9}{t^2 + 3} \right) dt = 3 \left(\frac{t^3}{3} - 3t + \frac{9}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \Big|_1^3 =$$
$$= 3 \left(9 - 9 + \frac{9}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \left(\frac{1}{3} - 3 + \frac{9}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) =$$
$$= \frac{9\pi}{\sqrt{3}} + 8 - \frac{9\pi}{2\sqrt{3}} = 8 + \frac{9\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Приклад 10. Обчислити $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} &= \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\| = \\ &= \int_0^1 \frac{2dt}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Приклад 11. Обчислити $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} = \left\| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt. \\ 4 - x^2 = 4 \cos^2 t, \sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t, \\ x = 1 \Rightarrow t = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(8\sin^3 t + 1) \cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t \cdot 2\cos t} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(8\sin^3 t + 1) dt}{4\sin^2 t} = \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(2\sin t + \frac{1}{4\sin^2 t} \right) dt = \left(-2\cos t - \frac{\operatorname{ctgt}}{4} \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \\
&= -1 - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.
\end{aligned}$$

3. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du \quad (2)$$

Формула (2) – формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Приклад 13. Обчислити $\int_0^{\pi/10} (x + 3) \sin 5x dx$.

Розв’язання.

$$\int_0^{\pi/10} (x+3)\sin 5x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x+3, dv = \sin 5x dx, \\ du = u' dx = dx, v = \int dv = \\ = -\frac{1}{5} \cos 5x, \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{5} (x+3) \cos 5x \Big|_0^{\pi/10} + \frac{1}{5} \int_0^{\pi/10} \cos 5x dx =$$

$$= -\frac{1}{5} \left(\left(\frac{\pi}{10} + 3 \right) \cos \frac{\pi}{2} - 3 \cos 0 \right) + \frac{1}{25} \sin 5x \Big|_0^{\pi/10} =$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{25} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{16}{25}.$$

Приклад 14. Обчислити $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \arcsin x, dv = dx, \\ du = u' dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{1-x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Приклад 15. Обчислити $\int_1^e \ln^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln^2 x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, dv = dx, \\ du = \frac{2 \ln x dx}{x}, v = x \end{array} \right\| = x \ln^2 x \Big|_1^e - \\
&- \int_1^e \frac{x \cdot 2 \ln x dx}{x} = e - 2 \int_1^e \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = dx, \\ du = \frac{dx}{x}, v = x, \end{array} \right\| = \\
&= e - 2 x \ln x \Big|_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e - 2e + 2 x \Big|_1^e = \\
&= -e + 2(e-1) = e - 2.
\end{aligned}$$

Приклад 16. Обчислити $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 -$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{8} - \\ -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 17. Обчислити $\int_0^{\pi} (x^2 + x + 1) \sin 2x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (x^2 + x + 1) \sin 2x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = x^2 + x + 1, dv = \sin 2x dx, \\ du = (2x + 1) dx, v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + x + 1) \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (2x + 1) \cos 2x dx = \\ &= \left\| \begin{array}{l} u = 2x + 1, dv = \cos 2x dx, \\ du = 2 dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\| = -\frac{1}{2} (\pi^2 + \pi + 1 - 1) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin 2x dx \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi^2 + \pi}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi = -\frac{\pi^2 + \pi}{2}.$$

Приклад 18. Обчислити $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{2x}, dv = \cos x dx, \\ du = 2e^{2x} dx, v = \sin x \end{array} \right\| = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx = \left\| \begin{array}{l} u = e^{2x}, dv = \sin x dx, \\ du = 2e^{2x} dx, v = -\cos x \end{array} \right\| = e^\pi -$$

$$- 2 \left(-e^{2x} \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx \right) = e^\pi +$$

$$+ 2 \cdot (-1) - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx.$$

$$5 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx = e^\pi - 2.$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} (e^\pi - 2).$$

Приклади для самостійного розв'язання

1. $\int_{-2}^2 (x^3 + 4x) dx$. Відповідь: 0.
2. $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx$. Відповідь: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\ln 2}{2}$.
3. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$. Відповідь: 0.
4. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}$. Відповідь: $\frac{4}{3} \ln \frac{5}{4}$.
5. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$. Відповідь: $7 + \ln 4$.
6. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$. Відповідь: $4 - \pi$.
7. $\int_1^2 x \ln(x+1) dx$. Відповідь: $\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{4}$.
8. $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$. Відповідь: $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.
9. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx$. Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.
10. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$. Відповідь: $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

11. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$. Відповідь: 2π .

12. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} dx$. Відповідь: $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. $\int_0^1 (x + 2) e^{5x} dx$. Відповідь: $\frac{1}{25} (14e^5 - 9)$.

14. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{2 + \cos x}$. Відповідь: $3 \ln \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$.