**Наслідки з аксіоми паралельності.**

**А) Перед формулюванням аксіоми паралельності в аксіоматичній теорії з книги Єфімова наведено наступні твердження:**



**Доведення.**

A

B

1

4

O

**Самостійно** оформити доведення, використовуючи позначення на рисунку.



**Теорема 47.** Довести, що при перетині двох паралельних прямих третьою утворюються рівні навхрест розташовані кути. (**обернена до теореми 44**).

***Доведення.*** Сформульоване твердження в «Началах» Евкліда було теоремою 29 і це була перша теорема, в доведенні якої використовувався 5 постулат.

A

B

1

4

O

3

2

Паралельні прямі *а* і  утворюють з їх січною 2 пари навхрест розташованих кутів, які позначимо 1 і 4, 2 і 3, а пари 1 і 2, 3 і 4 – пари односторонніх кутів, 1 і 3 – суміжні. Припустимо, що кут 1 не дорівнює куту 4, і для визначеності, нехай кут 1 більше за кут 4. Тоді сума кутів 3 і 4 менша за розгорнутий кут, а отже за 5 постулатом прямі *а* і  перетинаються. Отримане протиріччя доводить теорему.

**Теорема 48**. Довести, що сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює сумі двох прямих кутів.

***Доведення.*** Розглянемо трикутник . Проведемо пряму . З теореми 47 випливає, що  , . Оскільки кути  утворюють розгорнутий кут, то для суми кутів трикутника отримаємо , що і треба було довести.

**Б) Сутність проблеми 5 постулату Евкліда. Еквівалентність аксіоми паралельності та п’ятого постулату Евкліда. Інші еквіваленти п’ятого постулату.**

**Питання. *Які два твердження називаються еквівалентними?***

**(**ЯкщоАВ і ВА, то А і В наз. еквівалентними).

**5 п.** Якщо при перетині двох прямих третьою сума двох внутрішніх односторонніх кутів менша за , то ці прямі перетинаються з тієї сторони, з якої ця сума менша за .

а

в

с

1

2

**Доведення еквівалентності:**

1. **5 п.** **V.** Якщо має місце 5 постулат Евкліда, то через кожну точку, яка не належить довільно заданій прямій, проходить не більше однієї прямої, що не перетинає дану пряму.

***Доведення.*** Нехай  - дана пряма,  і , 



1).За теоремою 44 існує пряма , яка паралельна прямій .

2) Доведемо, що будь-яка інша пряма  не може бути паралельною прямій .

3) Нехай півпрямі прямої  утворюють з перпендикуляром  суміжні кути  та . Оскільки , то має місце одна з нерівностей  або . Пари кутів  і ,  і  є внутрішніми односторонніми при перетині прямих  та  прямою . Ми довели, що одна із сум  і  менша за .

4) За умовою має місце 5 постулат Евкліда. Отже, прямі  та  перетинаються в тій півплощині відносно прямої , яка містить внутрішні односторонні кути з меншою за  сумою.

Ми довели, що пряма  єдина, тобто має місце аксіома паралельності V.

1. **V**  **5 п.** Якщо через кожну точку, що не належить довільно заданій прямій, проходить рівно одна пряма, паралельна даній, то має місце 5 постулат Евкліда.

***Доведення.*** Нехай  - дана пряма, .

1) За умовою через точку  проходить лише одна пряма, паралельна , позначимо її . Отже, будь-яка пряма  перетинає пряму .

2) Нехай півпрямі прямої  утворюють з довільною півпрямою ,  кути  та , причому нехай для визначеності . Тоді одна з півпрямих прямої  є внутрішньою півпрямою кута .

3) Позначимо символом  кут між цією півпрямою та півпрямою , а рівний йому навхрест лежачий кут при перетині прямих  та  прямою  – символом . Тоді .

4) Нехай пряма  перетинає пряму  в півплощині, яка містить кут  і  – точка перетину. Тоді для трикутника  кут  є внутрішнім, а кут  – несуміжним із ним зовнішнім кутом. Оскільки , то маємо протиріччя із теоремою про зовнішній кут трикутника.

Отже, пряма  перетинає пряму  в півплощині, яка містить кути  та , що і доводить справедливість 5 постулату Евкліда.

**В) Список еквівалентів 5 постулату Евкліда в тій послідовності, в якій їх зручно доводити, посилаючись на попередні.**

П.1. Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої в одній площині, обов’язково перетинаються (твердження Лежандра).

***Треба довести:*** 5п.П1 **і** П15п. **або** VП1 **і** П1V

П.2. Два серединних перпендикуляри до сторін трикутника завжди перетинаються.

***Треба довести:*** 5п.П2 і П25п.

П.3. Навколо кожного трикутника можна описати коло (твердження Ф. Бойяї).

П.4. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює .

П.5. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника одна і та сама.

П.6. Існують два подібних і не конгруентних трикутники.

П.7. Існують принаймні один прямокутник і один квадрат.

П.8. Існує принаймні один опуклий чотирикутник із рівною  сумою внутрішніх кутів.

П.9. Сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу цього кола.

П.10. Три різні точки, рівновіддалені від даної прямої і розташовані в одній півплощині відносно цієї прямої, належать одній прямій (колінеарні).

**Г) Доведення несуперечливості системи аксіом Гільберта. Арифметична модель.**

Побудуємо арифметичну модель системи аксіом Гільберта та перевіримо аксіоми планіметрії. Дамо такі означення неозначуваним поняттям:

«Точкою» назвемо впорядковану пару дійсних чисел: .

«Прямою» назвемо набір впорядкованих пропорційних трійок дійсних чисел: , в якому .

Будемо говорити, що «точка  належить прямій », якщо виконується умова .

Якщо три попарно різні точки , ,  належать одній прямій , для якої , і виконується умова  (або умова ), то будемо називати точку  такою, що «лежить між» точками  та .

Два відрізка називаються «конгруентними», якщо існує ортогональне перетворення, яке відображає один відрізок на інший.

Два кути називаються «конгруентними», якщо існує ортогональне перетворення, яке відображає один кут на інший.

Перевірку аксіом системи Гільберта детально викладено в книзі [8] Єфімова.