**Наслідки з аксіоми паралельності. Еквіваленти п’ятого постулату.**

**Мета:** Сформувати вміння знаходити і доводити еквівалентність твердження евклідової геометрії і п’ятого постулату Евкліда

**Методичні рекомендації.** Важливо зрозуміти, якими є перші твердження, доведення яких неможливе без використання аксіоми паралельності. Треба повторити, які твердження називаються еквівалентними. Зверніть увагу на еквівалентність аксіоми паралельності та п’ятого постулату Евкліда. Буде корисним проаналізувати, як зміниться послідовність тверджень, якщо в системі аксіом Гільберта замінити аксіому паралельності одним із її еквівалентів.

**Перші дві теореми після формулювання аксіоми паралельності:**

**(47)** Довести, що при перетині двох паралельних прямих третьою утворюються рівні навхрест розташовані кути.

**(48)** Довести, що сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює сумі двох прямих кутів (180о).

**5 п.** Якщо при перетині двох прямих третьою сума двох внутрішніх односторонніх кутів менша за , то ці прямі перетинаються з тієї сторони, з якої ця сума менша за .

а

в

с

1

2

**Еквівалентність:**

1. **5 п.** **V.** Якщо має місце 5 постулат Евкліда, то через кожну точку, яка не належить довільно заданій прямій, проходить не більше однієї прямої, що не перетинає дану пряму.
2. **V**  **5 п.** Якщо через кожну точку, що не належить довільно заданій прямій, проходить рівно одна пряма, паралельна даній, то має місце 5 постулат Евкліда.

**Довести еквівалентність п’ятого постулату та наступних тверджень:**

**Задача 3.** Перпендикуляр і похила, проведені в одній площині до даної прямої, перетинаються (Т.1).

***Доведення.*** 1) **Покажемо, що це твердження випливає з п’ятого постулату**. До прямої  в точці  проведемо перпендикуляр  та похилу . Проведемо ще один перпендикуляр  до прямої . За теоремою 45  і  паралельні. Приспустимо, що  і  не перетинаються (паралельні), тоді отримаємо протиріччя з аксіомою паралельності, яка еквівалентна п’ятому постулату.

2) **Покажемо, що з твердження випливає аксіома паралельності.** Розглянемо пучок прямих, що проходять через точку . В цьому пучку є єдина пряма, яка не є похилою, це пряма , перпендикулярна до прямої . За умовою кожна похила перетинає перпендикуляр . Отже, через точку , яка не належить прямій , проходить єдина пряма , яка не перетинає пряму , тобто виконується аксіома паралельності.

**Задача 4.** Навколо кожного трикутника можна описати коло (Т2).



***Доведення.***1) **Покажемо, що з аксіоми паралельності випливає твердження: Два серединних перпендикуляра до двох сторін трикутника завжди перетинаються.**

p

D

В трикутнику  проведемо серединні перпендикуляри  і  до сторін  і  відповідно. *Припустимо, що прямі  і  не перетинаються*, тобто паралельні. Проведемо через точку  пряму , перпендикулярну до . За теоремою 45 прямі  і  не перетинаються. Таким чином, через точку  проходить дві різні прямі, які не перетинають . Отримали протиріччя з аксіомою паралельності, значить наше припущення невірне.

Точка перетину серединних перпендикулярів і є центром описаного навколо трикутника кола.

2) **Тепер покажемо, що з цього твердження випливає аксіома паралельності.**

******До прямої  проведемо перпендикуляр  та похилу . На прямій  візьмемо довільну точку , симетричну їй відносно прямої  точку  та симетричну їй відносно прямої  точку . Очевидно, що точки  не належать одній прямій, тобто утворюють трикутник. За побудовою  і  – серединні перпендикуляри до двох сторін цього трикутника. За умовою, навколо  можна описати коло, а значить  і  (перпендикуляр і похила до однієї прямої) перетинаються. В попередній же задачі було доведено, що з цього факту випливає аксіома паралельності.

Т2Т1V.

**Задача 5.**Сума внутрішніх кутів в кожному трикутнику одна і та сама (Т3).

***Доведення.*** 1) В теоремі 48 показано, що **з аксіоми паралельності випливає, що в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює двом прямим кутам, тобто одна і та сама.**

**V**т.48Т3

2) **Покажемо як з твердження** Т3 **випливає п’ятий постулат.** В трикутнику  позначимо кути так, як показано на рисунку. Можна записати такі рівності:

,

,

,

Запишемо вирази  та . Знайдемо суми правих та лівих частин двох останніх рівностей

,

звідки

, але ці кути суміжні.

Тоді, .

Твердження про те, що в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює , еквівалентне п’ятому постулату.

***Самостійна робота (10 б.) – розташована в ІНДИВІДУАЛЬНОМУ ЗАВДАННІ***

**Задача 1 (6 варіантів).** Довести, що п’ятий постулат Евкліда еквівалентний твердженням:

1. Існують два подібних, але не рівних (не конгруентних) трикутника.

2. Існує принаймні один чотирикутник з чотирма прямими кутами.

3. Існує принаймні один прямокутник і принаймні один квадрат.

4. Існує принаймні один опуклий чотирикутник із сумою кутів ,  - міра прямого кута.

5. Сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу кола.

6. Три точки, розташовані в одній півплощині відносно даної прямої, і рівновіддалені від неї, належать одній прямій.

**Задача 2 (5 варіантів).** Чи використовується п’ятий постулат Евкліда (аксіома паралельності) при доведенні наступних теорем?

1. Середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює половині основи;

2. Теорема косинусів;

3. Теорема Піфагора;

4. При перетині двох паралельних прямих третьою відповідні кути рівні між собою;

5. При перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює .