**ЛЕКЦІЯ 5**

**1. Відкриття Лобачевського. Неевклідова геометрія.**

У лютому 1826 професор Казанського університету М. І. Лобачевський виступив перед вченою радою фізико-математичного факультету з доповіддю, в якій виклав основи нової геометрії. Головна ідея полягала в тому, що аксіома Евкліда про паралельні незалежна від інших аксіом геометрії Евкліда і, отже, можна побудувати іншу геометрію, настільки ж несуперечливу, як і евклідова, якщо в системі аксіом евклідової геометрії замінити аксіому про паралельні на протилежне твердження. У наступні роки Лобачевський всебічно розвинув теорію нової геометрії і вказав ряд її додатків в області математичного аналізу. Одночасно з Лобачевским ті ж ідеї були розвинені молодим угорським математиком Яношем Больяї. Значення неевклідових геометрій полягає насамперед у тому, що їх побудова і доведення несуперечливості являє собою остаточне вирішення проблеми п’ятого постулату, що була нерозв’язаною протягом двох тисячоліть. Надалі ці геометрії знайшли найрізноманітніші застосування в задачах самої математики і в теоретичній фізиці. Вони стали великою подією в розвитку математики XIX ст., фактом, який суперечив всім сформованим на той час уявленням про природу математичного знання. Відкриття Лобачевского і Больяї привело математиків до корінного перегляду уявлень про власну науку, про її функції в системі знання, про методи побудови і обґрунтування математичних теорій.

Великий внесок у правильне розуміння неевклідових геометрій вніс видатний французький математик А. Пуанкаре. Він був одним з перших математиків, які побачили неспроможність чисто емпіричного розуміння геометрії. А. Пуанкаре винайшов модель геометрії Лобачевського на множині об’єктів евклідової геометрії, що доводило її несуперечливість. Вперше ж аксіоматику площини Лобачевського вдалося реалізувати італійському геометру Бельтрамі на спеціальній поверхні – псевдосфері – як внутрішню геометрію цієї поверхні.

**2. Аксіоматична теорія геометрії Лобачевського.**

**а) Аксіома Лобачевського. Означення і властивості паралельних і розбіжних прямих в геометрії Лобачевського.**

Аксіоматика геометрії Лобачевського складається з аксіом перших чотирьох груп системи аксіом Гільберта і наступної аксіоми - аксіоми Лобачевського.

**Аксіома Лобачевського.** Існують принаймні одна пряма  і одна точка  поза нею такі, що в площині, яку вони визначають, через точку  проходить принаймні дві прямі, що не перетинають пряму .

**ПИТАННЯ:** 1) Які відомі вам теореми належать як до аксіоматичної теорії евклідової геометрії, так і до аксіоматичної теорії геометрії Лобачевського?

2) Як називається спільна частина цих аксіоматичних теорій?

**Теорема 1.** Через будь-яку точку, яка не належить довільній даній прямій, проходить принаймні дві прямі, що не перетинають дану пряму.

**Увага!** Поміркуйте про зв’язок теореми 1 з аксіомою Лобачевського.

**Теорема 2.** Через точку, яка не належить даній прямій можна провести безліч прямих, що не перетинають дану пряму.



(рисунок до доведення теореми)

Далі будемо вважати всі прямі напрямленими. Тобто якщо використано символ  для прямої, то це означає, що на ній точка  передує точці . При цьому будемо вважати, що всі необхідні нам точки прямої  лежать між точками  та . Прямі  та  різні, або, інакше, два різні напрями на прямій, що проходить через точки  та , визначаються різними порядками  та  цих точок.

**Означення 1.** Пряма  називається паралельною прямій , якщо:

1) ці прямі не перетинаються;

2) для будь-яких точок  і  кожен внутрішній промінь кута  перетинає промінь . Позначають .



**Завдання.** Порівняйте з означенням паралельних прямих у евклідовій геометрії.

**Теорема 3 (ознака паралельності).** Якщо прямі  та  не мають спільних точок і існують такі точки  і , що кожен внутрішній промінь кута  перетинає промінь , то .

**Увага!** Поміркуйте про зв’язок теореми 3 з означенням 1.

**Теорема 4 (існування паралельних прямих).** Нехай дано пряму  і точку , яка не лежить на ній. Тоді в площині, яку вони визначають, існує і лише одна пряма , яка проходить через точку  і паралельна прямій .

**Завдання.** Знайти доведення цієї теореми і розібратися в ньому. На які аксіоми і теореми посилаються в доведенні?

**Наслідок.** Нехай , ,  і . Нехай також пари точок  та  симетричні в осьовій симетрії відносно прямої . Тоді пряма , яка буде симетричною прямій , паралельна прямій .

Теорема 4 і наслідок з неї дають можливість сформулювати наступну теорему.

**Теорема 5.** Через точку, яка не належить заданій прямій, в даному на цій прямій напрямку можна провести тільки одну пряму, паралельну заданій. Через точку, яка не належить заданій прямій, можна провести дві прямі, паралельні заданій, але в різних напрямках.

**Властивості відношення паралельності прямих:**

1) (симетричність) якщо , то і .

2) (транзитивність) якщо  і , то .

**Завдання.** Яку з цих властивостей не доводять для паралельних прямих в аксіоматичній теорії евклідової геометрії? Чому?

**Означення 2.** Нехай , ,  і . Кут  називається *кутом паралельності*, що відповідає відрізку , який називають *відрізком паралельності* (або *стрілкою*).

**Завдання.** Зробіть рисунок до означення 2.

**Теорема 6.** Будь-який гострий кут може бути кутом паралельності. Або, інакше, яким би не був гострий кут, існує єдина пряма, яка перпендикулярна одній стороні кута і паралельна другій.

Лобачевський довів, що між множиною всіх гострих кутів  і множиною додатних дійсних чисел  існує бієктивна відповідність і знайшов її явний вигляд, який називають тепер функцією Лобачевського (або основною формулою Лобачевського) і позначають . Вона має вигляд

 або ,

де  називається константою Лобачевського або радіусом кривини. З рівностей ,  випливає, що зі збільшенням відрізка паралельності відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда стає все більшою, і, навпаки, в достатньо малому околі площини Лобачевського виконується геометрія Евкліда (або, геометрія Евкліда є граничним випадком геометрії Лобачевського).

**Завдання.** Дослідити функцію  і побудувати її графік.

**Теорема 7.** Нехай  і . Якщо точка  рухається по прямій в сторону паралельності, то її відстань до прямої  прямує до нуля. Якщо ж точка  рухається по прямій  в протилежному напрямку, то її відстань до прямої  необмежено збільшується.

**Доведення** складається з двох частин. Спочатку доводиться, що при умові , де  - нове положення точки  виконується , а потім – що  може стати менша за будь-яке як завгодно мале додатне дійсне число .

**Наслідок.** Будь-яка пара паралельних прямих може за допомогою руху накладена на іншу пару паралельних прямих.

**Означення 3.** Дві різні прямі називаються *розбіжними*, якщо вони не перетинаються і не паралельні.

**Теорема 8.** Розбіжні прямі існують.

Наприклад, розбіжними є два перпендикуляри до однієї прямої.

**Теорема 9 (ознаки розбіжності прямих).** Дві різні прямі є розбіжними тоді і тільки тоді, коли при перетині цих прямих третьою утворюються або рівні відповідні кути, або рівні навхрест лежачі кути, або внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює .

**Питання.** Подумайте про можливості взаємного розташування двох різних прямих в геометрії Евкліда і в геометрії Лобачевського?

**б) Основні факти геометрії Лобачевського.**

*Оскільки аксіома Лобачевського є запереченням аксіоми паралельності Евкліда, то побудувавши заперечення еквівалентів 5 постулату Евкліда, ми отримаємо твердження, справедливі в геометрії Лобачевського. Наведемо кілька таких тверджень.*

**Теорема 10.** Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої в одній площині, не завжди перетинаються.

**Доведення.** Припустимо супротивне, тобто нехай в площині Лобачевського виконується твердження Лежандра. Але його наслідком є аксіома паралельності Евкліда, що неможливо в аксіоматичній теорії Лобачевського.

**Теорема 11.** Існують трикутники, навколо яких не можна описати коло.

**Доведення.** Аналогічно методом від супротивного, використовуючи еквівалентність твердження Ф. Бойяї та аксіоми паралельності Евкліда.

На практичному занятті буде побудовано трикутник, що задовольняє теоремі, тобто трикутник, навколо якого не можна описати коло.

**Теорема 12**. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша за .

**Доведення.** За теоремою абсолютної геометрії в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника не більша (менша або дорівнює) . Якщо припустити, що існує хоча б один трикутник, в якому сума внутрішніх кутів дорівнює , то як наслідок отримаємо, що сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює . Це твердження є еквівалентним аксіомі паралельності Евкліда, що і говорить про те, що наше припущення невірне. Отже, сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша за .

**Наслідок.** Сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника менша за .

**Теорема 13**. Сума внутрішніх кутів трикутника є непостійною величиною.

**Доведення.** Методом від супротивного проведенням трансверсалі.

, ,  - транверсаль. ,  як суміжні. Тоді з припущення , . Тоді , а з іншого боку  за попередньою теоремою.

**Означення 4**. Еквідистантою називається множина точок, рівновіддалених від даної прямої.

**Теорема 14.** Еквідистанта є кривою.

**Доведення.** Розглянемо на еквідистанті 3 різні точки  і припустимо, що вони колінеарні. Опустимо з них перпендикуляри на дану пряму і позначимо основи перпендикулярів через  відповідно. Отримані чотирикутники ,  і  є чотирикутниками Саккері. Кути при верхній основі чотирикутника Саккері повинні бути рівними. Отже,  і  як суміжні. Ці рівності дають , звідки сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює , що неможливо в геометрії Лобачевського.

**Теорема 15.** Дві розбіжні прямі мають єдиний спільний перпендикуляр, по обидві сторони від якого вони необмежено віддаляються одна від одної.

**Теорема 16 (четверта ознака рівності трикутників).** Якщо три кути одного трикутника рівні відповідним кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

**Завдання.** Доповніть формулювання теореми в геометрії Евкліда: *Якщо три кути одного трикутника рівні відповідним кутам іншого трикутника*, …

**Наслідок.** Не існують не конгруентні подібні трикутники. На площині Лобачевського немає відношення подібності фігур.

**Теорема 17.** Кут при верхній основі чотирикутника Саккері гострий.

**Теорема 18.** Середня лінія трикутника має довжину, меншу за половину довжини основи.

**Теорема 19.** Сторона правильного шестикутника більша за радіус описаного кола.

**Завдання.** Зробіть рисунки до теорем 17-19.