Методи побудови інтегрального критерію

У багатьох реальних економічних завданнях існує кілька критеріїв, які оптимізуються. Наприклад, при виробництві продукції максимізується якість та мінімізується собівартість, при взятті позички у банку максимізується кредитний термін та мінімізується відсоткова ставка, при виборі місця для будівництва будинку відпочинку максимізуються екологічні умови та мінімізується відстань від населеного пункту.

1.1. Загальна проблема пошуку компромісних рішень

Після побудови множини ефективних альтернатив X *, групі експертів надається право вибору найкращого в деякому розумінні рішення. Вони видають свої рекомендації ОПР і вона або вибирає одне із запропонованих рішень, або бере усереднений результат із запропонованих.

Вибір єдиного рішення з множини ефективних рішень являє собою досить складну задачу, оскільки можливо, що альтернатива,яке не є оптимальною ні за одним з критеріїв, буде найкращою в конкретній ситуації прийняття рішень.

Розглянемо можливі принципи компромісу, які застосовуються для вибору рішення з множини ефективних альтернатив. При цьому вважатимемо, що розглядається нормальна задача без пріоритетів, тобто критерії рівноцінні і нормалізовані. Будемо також вважати, що всі критерії максимізуються на множині допустимих альтернатив.

1.1.1. Принципи рівномірності

У випадку, коли критерії нормалізовані і однакові за важливістю, цілком природним є прагнення рівномірно і гармонійно підвищувати якість всіх часткових (локальних) критеріїв. В цьому і є сенс принципу рівномірності, але при цьому він може бути реалізований по-різному. Розглянемо деякі із цих способів.

Принцип рівності. Згідно цьому принципу здійснюється максимізація за умовою рівності рівня всіх критеріїв. Проте цей принцип є надмірно жорстким. Він може приводити до рішень поза областю компромісу і навіть зовсім не давати рішень, особливо у випадку дискретних задач. Приклади таких ситуацій зображено на рис. 1.1.

y_2 y_2

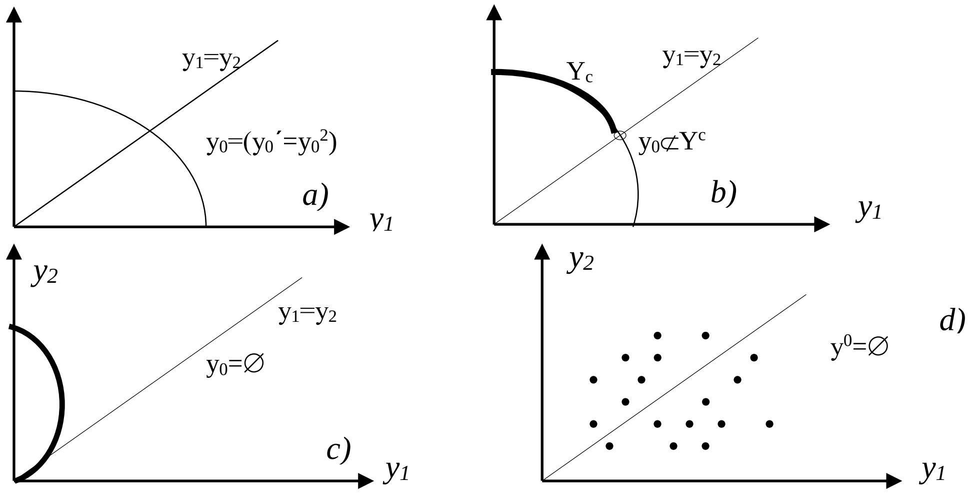

Рис. 1.1. Принцип рівності. *a*) наявне ефективне рішення; *b*) рішення поза областю компромісу; *c*) немає рішень (неперервний випадок); *d*) немає рішень (дискретний випадок).

Принцип рівномірності (*максиміну*). Здійснення цього принципу передбачає рівномірне підвищення рівня всіх критеріїв за рахунок «підтягування» «найгіршого» критерію, тобто критерію з найменшим рівнем. Окрім рівномірності цей принцип має і інший важливий сенс – гарантованого рівня мінімального критерію $min\ y_j$. Часто він зветься принципом максиміну (або мінімаксу в задачах мінімізації).

Цей принцип проілюстровано на рис. 1.2. Тут обидва критерії максимізуються. Ефективними будуть альтернативи, що розташовані на північно-західній границі множини допустимих рішень. Згідно принципу рівномірності необхідно обрати рішення, що надає максимальне значення критерію з найменшим рівнем. У даному випадку це критерій y_1. Тому раціональним буде вибір рішення $y_0 = \max \min y_1$.

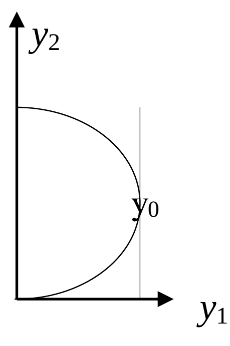

Рис.1.2. Принцип рівномірності (максиміну)

Принцип найкращої рівномірності. В цьому випадку проводиться деяке посилення ідеї рівномірності в порівнянні з попередньою моделлю, а саме: якщо критерій максиміну дає декілька рішень, визначається другий мінімум і проводиться його максимізація (рис.1.3).

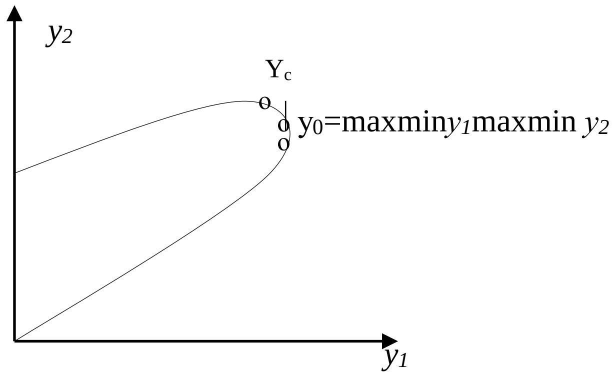

Рис. 1.1. Принцип найкращої рівномірності

Принцип квазірівності. Тут здійснюється максимізація всіх локальних критеріїв, за умови, що рівень їх не відрізнятиметься один від одного більш ніж на величину δ. Тобто проводиться деяке послаблення принципу рівності, який є надмірно жорстким.

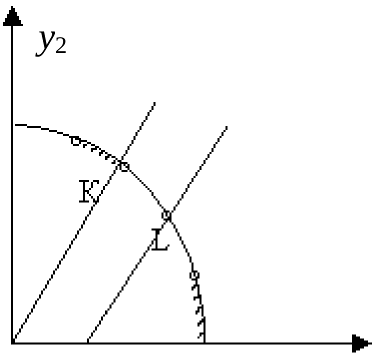

Рис. 1.4. Принцип квазірівності. $KL = Y^0 = \{y\colon |y_1 - y_2| \le \delta\}$

Принципи рівномірності дуже притяжні за своєю ідеєю. Гармонійне підвищення якості всіх критеріїв – це ідеал оптимізації. Проте, часто навіть незначний відхід від цих принципів дозволяє істотно підвищити рівень одного або декількох критеріїв.

Принцип вирівнювання якості. У основі цього принципу лежать теореми про середні величини вищих ступенів. математично ця модель записується у вигляді:

$$\min_{y \in Y^c} \sum_{j=1}^{m} y_j^{-S},$$

де $S \in (1, S^*)$, $S^* = (\log m) / \log(1+\varepsilon)$

По мірі збільшення параметра S від S = 1 здійснюється вирівнювання рівнів критеріїв, і при $S > S^*$ отримуємо ідеальне вирівнювання, еквівалентне моделі послідовного максиміну.

1.1.2. Принципи справедливої поступки

Принцип абсолютної поступки. В основі цієї моделі лежить такий принцип компромісу: справедливим вважається компроміс, при якому сумарний абсолютний рівень зниження одного або декількох критеріїв не перевищує сумарного абсолютного рівня підвищення інших критеріїв.

$$\underset{y \in Y^c}{opt}\ y \equiv \left\{ y : \sum_{j \in I^+} \Delta y_j \geq \sum_{j \in I^-} \Delta y_j \right\} \bigcap Y^c ,$$

де I^+ – підмножина локальних критеріїв, рівень яких покращено ($\Delta y_j > 0$), I^- – підмножина локальних критеріїв, рівень яких погіршено ($\Delta y_j < 0$), $\Delta y_j = \Delta y_j (y', y)$ – величина приросту(або зменшення) критерію y_j при переході від рішення y' до y.

П р и к л а д 1.9. Розглянемо випадок двох критеріїв y_1, y_2. Припустимо, що обидва критерії максимізуються. Порівняємо рішення y (2,4) та y' (3,1) (див. рис. 1.11). При переході від рішення y' до y критерій y_1 зменшується на величину $\Delta y_1 = y'_1 - y_1 = 3 - 2 = 1$, а критерій y_2 збільшується на величину $\Delta y_2 = y_2 - y'_2 = 4 - 1 = 1$.

Оскільки абсолютне збільшення Δy_2 буде більше ніж абсолютне зменшення критеріїв Δy_1, рішення y' буде краще за y рішення ($y' > $ y).

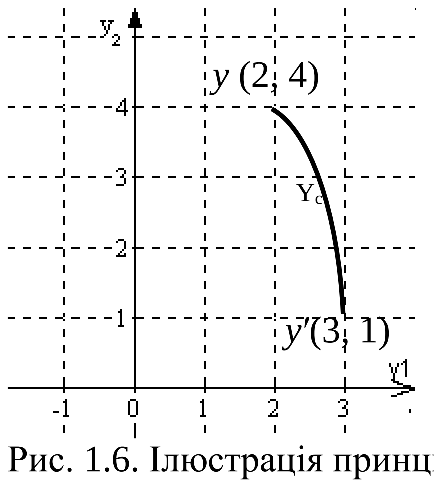

Рис. 1.6. Ілюстрація принципу абсолютної поступки (до прикладу 1.4.)

Тобто при переході від рішення y' до рішення y ми по першому критерію робимо поступку $\Delta y_1 = 1$, проте по другому критерію виграємо більшу величину $\Delta y_2 = 1$. (рис. 1.6).

Цьому принципу відповідає модель максимізації суми критеріїв (модель інтегральної ефективності):

$$opt\ y \equiv \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} y_j \ .$$

Серйозним недоліком принципу абсолютної поступки є те, що цей принцип може допустити різку диференціацію рівнів окремих критеріїв, тобто високе значення узагальненого критерію може досягатися за рахунок одного або групи критеріїв при дуже низькому рівні інших критеріїв. Проте у нього є важлива перевага – він зручний для реалізації.

Принцип відносної поступки. Припустимо, що всі локальні критерії, які створюють вектор ефективності мають однакову важливість. Тоді справедливим вважатимемо такий компроміс, при якому сумарний відносний рівень зниження якості за одним або декількома критеріям не перевищує сумарного відносного рівня підвищення якості решти критеріїв (менше або рівний). Відповідну даному принципу справедливості модель називають моделлю справедливої відносної поступки. Вона записується у вигляді:

$$opt\ y = \left\{ y : \sum_{j \in I^+} \eta_j \geq \sum_{j \in I^-} \eta_j \right\} \bigcap Y^c,$$

де η_j – модель відносної зміни, «ціна поступки», яка обчислюється за формулою $\eta_j = \dfrac{\Delta y_j (y', y)}{\max\{y', y\}}$.

Розглянемо математичну інтерпретацію принципу.

П р и к л а д 1.10. Нехай в області компромісів Y^c дано два рішення y та y' (рис. 1.12), якість яких оцінюється критеріями y_1 і y_2 (обидва критерії максимізуються). Рішення y краще за рішення y' за критерієм y_1, але поступається йому за критерієм y_2. Необхідно порівняти ці два рішення і вибрати найкраще в сенсі принципу справедливого компромісу.

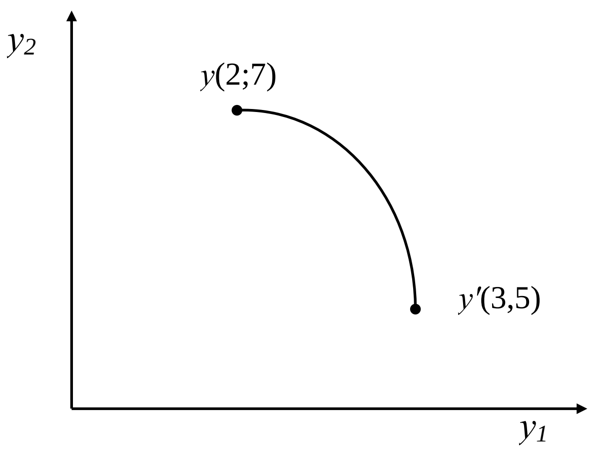

Рис. 1.12. Ілюстрація принципу відносної поступки (до прикладу 1.10).

Для порівняння цих рішень введемо міру відносного зниження якості рішення за кожним з критеріїв при переході від рішення y до y', і навпаки, тобто ціну поступки $\eta_j(y, y')$.

$$\eta_1 = \frac{\Delta y_1 (y', y)}{\max\{y_1', y_1\}},$$

$$\eta_2 = \frac{\Delta y_2 (y', y)}{\max\{y_2', y_2\}}.$$

Тут Δy_1 і Δy_2 – абсолютна величина зниження рівня критеріїв при переході від рішення y' до рішення y (для критерію y_1) і при зворотному переході (для критерію y_2). Якщо відносна величина зниження критерію y_1 більш ніж критерію y_2, то слід віддати перевагу рішенню y. Це витікає з порівняння величини ціни поступки за кожним з критеріїв.

У розглянутому прикладі $\Delta y_1 = 1$, $\Delta y_2 = 2$. Згідно принципу абсолютної поступки, тут рішення y краще за рішення y', але за принципом відносної поступки, навпаки краще рішення y', оскільки $\eta_1 = 1/3 > \eta_2 = 2/7$.

В разі неперервної зміни рішення ціна поступки має вигляд логарифмічної похідної: $\eta_j(x) = \dfrac{1}{y}\left|\dfrac{dy_j(x)}{dx}\right|$.

При збільшенні x критерій y_1 збільшується, а y_2 зменшується. Відносна інтенсивність їх зміни залежно від x характеризується ціною поступки $\eta_1(x)$ і $\eta_2(x)$ (рис. 1.13). При збільшенні x від 0 до x^0 відносне збільшення y_1 більше.

Принципу відносної поступки відповідає скалярна модель оптимізації з критерієм у вигляді добутку локальних критеріїв, а саме:

$$opt\ y \equiv \max_{y \in Y^c} \prod_{j \in I} y_j .$$

Для зручності обчислень замість цієї моделі можна скористатися також еквівалентною моделлю виду:

$$opt\ y \equiv \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} \log y_j .$$

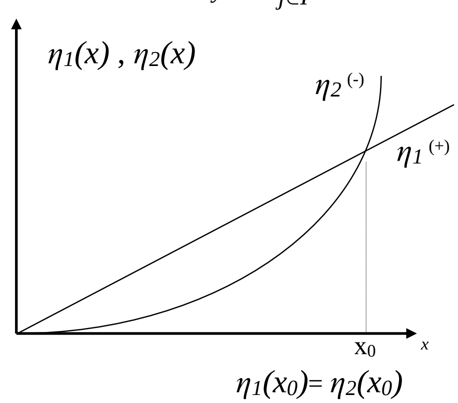

Рис. 1.11. Ілюстрація принципу відносної поступки (неперервний випадок)

Цей принцип можна застосовувати за умовою, що всі локальні критерії мають однакову важливість. Якщо це припущення виявляється неправомочним, то в модель слід внести корективи за допомогою вагового вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ і визначити оптимальні рішення на основі наступної моделі

$$\max_{y \in Y^c} \prod_{j \in I} y_j^{\alpha_j} .$$

У цій моделі принцип справедливого компромісу декілька порушується, проте це відбувається відповідно до міри важливості критеріїв і практично виливається в штучну диференціацію величини поступки.

Принцип справедливого компромісу на основі поступки має вельми чітку ідею справедливості, на основі якої здійснюється вибір компромісного оптимального рішення.

Принцип абсолютної поступки байдужий до дійсної величини критеріїв і тому може допускати велику нерівномірність рівнів критеріїв. Тому він може бути використаний лише разом з одним з принципів рівномірності.

Принцип відносної поступки вельми чутливий до величини критеріїв, причому за рахунок відносності поступки відбувається автоматичне зниження ціни поступки для критеріїв з більшою величиною і навпаки. В результаті проводиться значне згладжування рівнів критеріїв. Важливою перевагою принципу відносної поступки є також те, що він інваріантний до масштабу виміру критеріїв.

В разі неоднакової важливості критеріїв ідея справедливого компромісу на основі оцінки поступок втрачає свою ясність, а аргументація вибору вагового вектора розподілу важливості α виявляється вельми скрутною особливо тоді, коли число критеріїв велике.

1.1.1. Інші принципи оптимальності

Принцип головного критерію. Згідно цьому принципу один із локальних критеріїв вибирається за головний і проводиться його скалярна оптимізація за умовою, що рівень інших критеріїв не гірше допустимого.

$$opt\ y \equiv \max_{y \in Y'} y_1$$

де $Y' = \left\{ y \,\middle|\, y_j \ge y_j^{\gamma},\, j \in \{2, 3, \ldots m\} \right\} \bigcap Y^c$, y_j^{γ} – заданий допустимий рівень критерію y^{γ}.

За головний може вибиратися будь-який критерій. Проте краще брати критерій, для якого складно визначити допустимий рівень.

За допомогою цієї моделі можна реалізувати в принципі всіляку схему компромісу і отримати будь-яке оптимальне рішення в області компромісів. Проте аргументація вибору допустимого рівня критеріїв y_j^{γ} у переважній більшості випадків неможлива.

Принцип максимізації зваженої суми критеріїв. Цей принцип є модифікацією моделі абсолютної поступки для випадку заданих пріоритетів критеріїв. Його записують у вигляді:

$$opt\ y = \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} \alpha_j y_j ,$$

де $\alpha_j \in [0,1]$, $j \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\sum_{j \in I} \alpha_j = 1$.

Проте цей принцип має і універсальне, в деякому сенсі, значення. Для випуклих задач за допомогою цієї моделі визначається область компромісів.

Зауважимо, що як і в попередніх випадках аргументувати вибір вагових коефіцієнтів для реалізації якого-небудь принципу компромісу практично неможливо.

Принцип максимізації ймовірності досягнення ідеальної якості. Часто в стохастичних векторних задачах може бути визначене ідеальне, бажане значення всіх локальних критеріїв y_j^u і отже, ідеальна якість y^u. Тоді задача оптимізації може бути подана в скалярній формі з критерієм – ймовірність досягнення складної події $P(y \geq y^u)$

$$opt\ y \equiv \max_{y \in Y^c} P(y \geq y^u) .$$

Практично ж методи обчислення ймовірності подій навіть у випадку двох, трьох подій дуже складні. Тому даний метод може бути використаний лише в деяких конкретних випадках, коли $m \leq 3$ і обчислення $P(y \geq y^u)$ здійснюється досить просто.

1.6. Методи нормалізації критеріїв

Модель відносної поступки інваріантна до масштабу вимірювання критеріїв, проте, в більшості випадків доводиться використовувати інші моделі, що мають сенс лише в нормалізованому просторі критеріїв, оскільки найчастіше масштаби виміру критеріїв неоднакові і виникає необхідність проводити *нормалізацію* критеріїв, тобто штучно приводити їх до єдиної міри.

Більшість методів нормалізації ґрунтується на введенні поняття «ідеальної якості», тобто вектора , який має ідеальне значення ефективності y^u. Тоді вибір оптимального рішення стає рівнозначним найкращому наближенню до цього ідеального вектора $y^u = (y_1^u, \ldots , y_m^u)$. Різні методи отримуємо залежно від того, що вважати ідеальним вектором і в якому сенсі розуміють «найкраще наближення».

Часто замість дійсної величини критеріїв розглядаються або їх відхилення від ідеального значення $\Delta y_j = y_j^u - y_j$, $j = 1,2,\ldots m$ або безрозмірна величина критерію $\bar{y}_j = \dfrac{y_j}{y_j^u}$, вочевидь $\bar{y}_j \in [0,1]$, $j = 1,2,\ldots m$.

При вирішенні багатокритеріальних задач оптимізації використовуються обидва способи перетворення масштабу. Проте для нормалізації може бути використаний лише другий, оскільки він не залежить від масштабу вимірювання критеріїв, не утискає права якого-небудь з критеріїв і приводить всі критерії до єдиного масштабу [0,1].

Розглянемо, залежно від способу вибору y^u, основні способи нормалізації.

Спосіб 1. Ідеальний вектор якості визначається заданою величиною критеріїв $y^u = y^з = \left(y_1^з, y_2^з, \ldots y_m^з\right)$.

Цей випадок досить рідкий, тобто визначення заданої величини критеріїв, як правило, пов'язане з серйозними труднощами, а її аргументація дуже суб'єктивна, що приводить до суб'єктивного оптимального рішення.

Спосіб 2. Як ідеальний вектор ефективності береться вектор, компонентами якого є оптимум альні значення локальних критеріїв. Наприклад для задачі, де всі критерії максимізуються буде вірним:

$$y^u = (\max_{y \in Y} y_1, \max_{y \in Y} y_2, \ldots, \max_{y \in Y} y_m).$$

Далі замість абсолютної величини критеріїв вводиться їх відносна безрозмірна величина

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\max\limits_{y \in Y} y_j}, \quad j = 1,2,\ldots m.$$

Недоліком цього способу нормалізації є те, що він істотно залежить від максимального можливого рівня критеріїв, визначуваного умовами задачі. Перевага автоматично віддається критерію з найбільшою величиною локального оптимуму і рівноправність критеріїв порушується.

Той же недолік має і спосіб Севіджу (*принцип найменшого жалю*).

Тут ідеальний вектор має такий же вигляд, але простір критеріїв трансформується в простір відхилень.

$$\Delta y_j = \max_{y \in Y} y_j - y_j, \quad j = 1,2,\ldots m.$$

і подальший вибір здійснюється на основі принципу мінімаксу. Цей спосіб також суттєво залежить від масштабу вимірювання критеріїв.

Спосіб 1. Тут компонентами ідеального вектора служать точні верхні границі (*sup*) (або для задач мінімізації – точні нижні границі (*inf*)) локальних критеріїв, що визначені на просторі рішень *Y*, а саме

$$y^{u} = (\sup_{y\in Y} y_1, \sup_{y\in Y} y_2, \ldots, \sup_{y\in Y} y_m),$$

і вводяться відносні критерії за формулами:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\sup\limits_{y\in Y} y_j}, \; j = 1,2,\ldots m.$$

Цей спосіб нормалізації є найбільш справедливим і не зачіпає «прав» жодного з критеріїв. Він до того ж об'єктивний і не залежить від масштабу критеріїв. Проте дуже часто цей спосіб непридатний, оскільки границею критеріїв є нескінченність. Правда, в цьому випадку можлива наближена реалізація даного способу нормалізації шляхом задавання деякого, достатньо високого рівня критеріїв.

Спосіб 4. Тут компонентами y^u є максимально можливі відхилення критеріїв в умовах даної задачі:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\max\limits_{y\in Y} y_j - \min\limits_{y\in Y} y_j}, \; j = 1,2,\ldots m,$$

або без обмежень

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\sup\limits_{y\in Y} y_j - \inf\limits_{y\in Y} y_j}, \; j = 1,2,\ldots m.$$

При цьому способі потрібна спеціальна перевірка умов інваріантності до початку координат і масштабам вимірювання критерію принаймні для деяких принципів компромісу.

*Спосіб 5.*Тут нормалізація проводиться на одиничному гіперкубі таким чином. Вважають $\min\limits_{y\in Y} y_j = 0$, $\max\limits_{y\in Y} y_j = 1$, $j\in I$, або $\inf\limits_{y\in Y} y_j = 0$, $\sup\limits_{y\in Y} y_j = 1$, $j\in I$.

В цьому випадку також можливі порушення умов інваріантності до початку координат і масштабу вимірювання критеріїв для цілого ряду моделей.

Як видно, успішне вирішення проблеми нормалізації багато в чому залежить від того, наскільки точно і об'єктивно удається визначити ідеальну якість рішень, а нормалізація, по суті справи, зводиться до деякої трансформації простору критеріїв, тобто до вибору зручної і «справедливої» топології, в якій задача вибору рішення по декількох критеріям набуває строгого і ясного сенсу.

Таким чином, перетворення, повинні задовольняти таким вимогам:

– враховувати необхідність мінімізації відхилень від оптимальних значень за кожною функцією цілі;

- мати спільний початок відліку і один порядок зміни значень на всій множині допустимих альтернатив;
- зберігати відношення переваги на всій множині альтернатив, порівнянних за вихідними функціями цілі.

Найбільш поширеними, виходячи з вищевикладених способів, є перетворення

$$w_i^1(f_i(\alpha)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{opt} - f_i^{(\alpha)}}{f_1^{opt} - f_i^{(\min)}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i^{(\alpha)} - f_i^0}{f_1^{\max} - f_i^0}, \forall i \in I_2; \end{cases} \tag{1.10}$$

$$w_i^2(f_i(\alpha)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^o - f_i^{(\alpha)}}{f_1^o}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i^{(\alpha)} - f_i^0}{f_i^0}, \forall i \in I_2. \end{cases} \tag{1.11}$$

Розглянуті способи нормалізації припускають однакову важливість критеріїв, але в більшості випадків критерії нерівнозначні і тому необхідно враховувати пріоритети критеріїв.

1.7. Способи урахування пріоритету критеріїв

Всі методи урахування пріоритетів критеріїв можна умовно поділити на дві групи. Розглянемо ці способи.

1.7.1. Методи урахування жорсткого пріоритету

Методи жорсткого пріоритету засновані на тому, що критерії розташовані за важливістю в ряд пріоритету $y_1 > y_2 \ldots > y_m$ на основі якого проводиться послідовна оптимізація критеріїв.

Принцип послідовної оптимізації на основі жорсткого пріоритету полягає в тому, що не допускається підвищення рівня менш важливих критеріїв, якщо це викликає, хоч би незначне, зниження рівня важливішого критерію.

Практично це приводить до того, що спочатку відшукується локальний оптимум для найбільш важливого критерію на всій множині допустимих альтернатив X, який фіксується у вигляді додаткового обмеження. Потім шукається локальний оптимум другого за важливістю критерію, але вже для нової допустимої множини X^{01} і так далі. Таким чином, відбувається поступове звуження допустимої множини до єдиного оптимального рішення або оптимальної підмножини:

$$X \supset X^{01} \supset X^{02} \supset \ldots \supset X^{0m} = X^{0},$$

$$X^{0j} = \left\{ x \mid y_j(x) \geq \max_{x \in X^{0(j-1)}} y_j(x) \right\} \bigcap X^{0(j-1)}.$$

Такий принцип впорядковування векторної множини називається *лексикографічним*.

Труднощі застосування методу полягають у тому, що

1) у випадку, коли є групи рівнозначних критеріїв, необхідно для цих груп проводити локальне впорядковування на основі одного з принципів рівномірності;

2) у багатьох практичних задачах цей метод непридатний, оскільки максимізація по першому критерію дає єдине рішення і задача фактично зводиться до скалярної (тобто неголовні критерії не враховуються).

Проте цей принцип дає добрі результати при використанні *квазіоптимального* підходу.

Тоді на кожному етапі проводиться квазіоптимізація, тобто пошук не єдиного оптимуму, а деякої області, близької до оптимуму, а саме

$$X^{0j} = \left\{ x \middle| y_j(x) \geq \max_{x \in X^{0(j-1)}} y_j(x) - \Delta y_j \right\} \bigcap X^{0(j-1)},$$

де Δy_j – допустимі відхилення від точного оптимуму.

При цьому рівень допустимого відхилення від оптимуму визначається з врахуванням важливості критеріїв, точності постановки задачі і деяких практичних міркувань.

При такому підході на останньому етапі визначається не одне оптимальне рішення, а деяка досить вузька квазіоптимальна підмножина.

Переваги методу жорсткого пріоритету полягають в тому, що не потрібні кількісні характеристики важливості критеріїв.

1.7.2. Методи урахування гнучкого пріоритету

Методи врахування гнучкого пріоритету передбачають задавання кількісних характеристик пріоритету, що дозволяє при виборі рішення лише в деякій мірі віддавати перевагу важливішим критеріям. Кількісні оцінки пріоритетів задаються, як правило, у вигляді вектора

$$\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right), \quad \alpha_i \ge 0, \quad i \in I, \ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

Залежно від того який спосіб компромісу буде застосовано, отримують різні варіації методів врахування пріоритетів.

Принцип рівномірності з пріоритетом. Оптимізація проводиться згідно одній з вимог:

$opt\ y = (\alpha_1 y_1 = \alpha_2 y_2 = \ldots \alpha_n y_n)$ (для принципу рівності з пріоритетом);

$opt\ y = \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j} \alpha_j y_j$, (для принципу рівномірності з пріоритетом);

$opt\ y = \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j}{}_1 (\alpha_j) y_j \max \min\limits_{j}{}_2 (\alpha_j) y_j \ldots$,(для принципу найкращої рівномірності з пріоритетом);

Принцип справедливої поступки з пріоритетом. Оптимізація проводиться згідно вимозі:

$opt\ y = \max\limits_{y \in Y^e} \sum\limits_{j \in I} \alpha_j y_j$ або $opt\ y = \max\limits_{y \in Y^e} \sum\limits_{j \in I} \alpha_j \log y_j$.

Інші принципи оптимальності з пріоритетом. Оптимізація проводиться за правилом:

$$opt\ (y) = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} (\alpha_j y_j)^{-S}.$$

Переваги методів гнучкого врахування пріоритетів – вони дозволяють в розумних межах віддавати перевагу важливішим критеріям з врахуванням їх міри важливості.

Недоліком є трудність визначення числових значень пріоритетів.

Зауваження 1. Проводячи перетворення простору за допомогою вектора α необхідно враховувати подальше застосування певного принципу оптимальності.

Зауваження 2. Різну важливість критеріїв можна враховувати і при нормалізації. В цьому випадку нормалізація проводиться урахуванням характеристик пріоритету, наприклад, вагового вектора, а саме

$$\bar{y}_j = \frac{\alpha_j y_j}{y_j^{u}},$$

але із-за міркувань ясності аргументації врахування пріоритету краще проводити після нормалізації критеріїв.

1.8. Методи розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації

1.8.1. Методи зведення до узагальненого критерію (методи згортки)

Розглянемо методи рішення, що полягають в зведенні початкової багатокритеріальної задачі до скалярної шляхом введення деякого узагальненого критерію. Всі ці методи мають є схему:

1. Всі критерії нормують, тобто приводять до порівнянного безрозмірного вигляду;
2. Їх «згортають» в одну цільову функцію, так званий узагальнений критерій, враховуючи їх відносну важливість за допомогою вагових коефіцієнтів $\alpha = (\alpha_1, \underset{j}{\alpha_2}, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$;

У результаті вихідна багатокритеріальна задача зводиться до звичайної задачі оптимізації за одним критерієм.

Найбільш поширеними видами згортки є такі:

1. Узагальнені критерії на основі середнєзваженої функції

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i^s \right)^{1/S}.$$

Серед цих критеріїв особливо виділяють критерій $F_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$ – лінійна згортка критеріїв. Він зручний у використанні і дозволяє зберігати лінійність вихідних функцій. Тобто, якщо вихідні критерії лінійні, то результуючий критерій також буде лінійним.

2. Мультиплікативна згортка $\Phi_\pi = \prod_{i=1}^{m} k_i^{\alpha_i}$.

1. Дуже поширеними є також критерій

$$F = \frac{\sum_{i \in I_1} f_i(x)}{\sum_{i \in I_2} f_i(x)} \quad \text{(у задачах із } min \text{ і } max\text{)}.$$

Тут в чисельнику сума критеріїв, які максимізуються, а в знаменнику – сума критеріїв які мінімізуються.

Недолік цього критерію в тому, що він заснований на явному допущенні, що нестача в одному показнику може компенсуватися за рахунок іншого; наприклад низька продуктивність за рахунок низької вартості.

Пригадаємо «критерій оцінки людини». Він має вигляд дробу, де в чисельнику гідності, а в знаменнику його думка про себе.

Часто використовуваним є також і критерій $F(x)=\min\limits_{y\in Y^c}\left(\dfrac{f_i(x)}{\alpha_i}\right)$, і тоді замість багатокритеріальної задачі розглядається максимінна задача із скалярним критерієм.

Широко використовується на практиці також метод *цільового програмування*.

Основу цього методу так само складає зведення всіх критеріїв в один узагальнюючий критерій, що має сенс відстані від даної векторної оцінки до недосяжної ідеальної точки $b^* = (b_1^* \dots b_m^*)$.

Найчастіше застосовують узагальнений критерій виду:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i(f_i(x)-b_i^*),$$

оскільки для лінійних детермінованих задач оптимальні за цим критерієм рішення можна відшукати симплекс методом.

П р и к л а д 1.11. Розв’язати задачу багатокритеріальної оптимізації методом згортки, якщо пріоритети критеріїв $\alpha_1 = 0{,}7$ та $\alpha_2 = 0{,}1$. Критерії вважати нормалізованими.

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2)=3x_1+2x_2\to\max\\
&f(x_1,x_2)=-x_1+2x_2\to\max\\
&2x_1-x_2\ge -4,\\
&2x_1+3x_2\le 24,\\
&20x_1-5x_2\le 100,\\
&5x_1+20x_2\ge 100,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

Розв’язування

Оскільки критерії нормовані нормалізація непотрібна. Проведемо згортку критеріїв , враховуючи пріоритети і напрямок оптимізації.

$$F(x_1,x_2)=\alpha_1 f_1(x_1,x_2)+\alpha_2 f_2(x_1,x_2),$$

$$F(x_1,x_2)=0{,}7(3x_1+2x_2)+0{,}3(-x_1+2x_2)=2{,}1x_1+1{,}4x_2-0{,}3x_1+0{,}6x_2=1{,}8x_1+2x_2$$

Тоді задача набуває виду:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 1{,}8x_1 + 2x_2 \to \max \\
&2x_1 - x_2 \ge -4, \\
&2x_1 + 3x_2 \le 24, \\
&20x_1 - 5x_2 \le 100, \\
&5x_1 + 20x_2 \ge 100, \\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Для розв’язку цієї задачі можна використовувати симплекс-метод, або розв’язати її графічно.

В результаті розв’язування задачі маємо: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, значення функції $F(x_1, x_2) = 26$, $f_1(x) = 26$, $f_2(x) = 2$.

1.8.2. Метод головного критерію

Розглянемо задачу багатокритеріальної оптимізації в якій всі критерії мінімізуються, і впорядковані за важливістю.

$$
\begin{gathered}
f_i(x) \to \min, \ i \in I, \\
x \in X, \\
f_1(x) \ge f_2(x) \ge \ldots \ge f_M(x).
\end{gathered}
$$

Головна ідея методу полягає в тому, що вихідна багатокритеріальна задача оптимізації замінюється задачею оптимізації за одним критерієм з додатковими обмеженнями, які дозволяють в певному сенсі врахувати вимоги, які описувалися іншими критеріями.

Опишемо схему методу.

1. Вибирається один головний критерій $f_1(x)$ за яким буде проводитися оптимізація.
2. Для менш важливих критеріїв $f_2(x), \ldots f_M(x)$ обчислюються допустимі значення $\bar{f}_2, \ldots \bar{f}_M$.
3. Критерії $f_2(x), \ldots f_M(x)$ замінюються обмеженнями виду $f_i(x) \le \bar{f}$, для $i \in I$.
4. Замість вихідної задачі розглядається така скалярна задача:

$$f_1(x) \to \min,$$
$$f_i(x) \le \bar{f}, \quad i \in I,$$
$$x \in X.$$

Перевагою описаного методу є те, що для його реалізації не потрібна кількісна оцінка пріоритетів критеріїв. А недоліком – складність визначення допустимих значень критеріїв. В більшості випадків ці значення вибираються суб'єктивно. Тому, якщо критерії рівнозначні, за головний може бути обраний будь-який з них, але краще той, для якого визначити допустимі значення найскладніше.

Зауважимо також, що рішення, отримане за допомогою цього методу завжди буде слабо ефективним, а у випадку коли воно єдине, то й сильно ефективним.

Метод головного критерію може бути застосований і для задач, в яких критерії максимізуються. В цьому випадку додаткові обмеження будуть мати вигляд $f_i(x) \ge \bar{f}$.

П р и к л а д 1.12. Методом головного критерію розв'язати задачу багатокритеріальної оптимізації:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

якщо пріоритети критеріїв задані таким чином: $f_3 > f_1 > f_2$, і відомо граничні значення для критеріїв $f_1^* = 20$, $f_2^* = 5$.

Розв'язування

Для розв'язування задачі оберемо за головний критерій, який має найбільшу важливість. У даному випадку це критерій f_3. Для інших двох критеріїв задамо обмеження, використовуючи відомі граничні значення. Оскільки критерій f_1 потрібно мінімізувати, відповідне йому обмеження буде мати вигляд $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \le$. Для критерію f_2(який максимізується) обмеження набуде виду $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \ge$ і, таким чином, вихідну багатокритеріальну задачу зведено до такої скалярної задачі:

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \le 20, \\ 4x_1 - x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

розв'язуючи цю задачу маємо: $x_1 = \frac{20}{3}$, $x_2 = 0$, значення критеріїв на цьому рішенні $f_3 = -6\frac{2}{3}$, $f_1 = 20$, $f_2 = 26\frac{2}{3}$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію рішення цієї задачі.

Для цього спочатку побудуємо область допустимих рішень і критеріїв вихідної задачі (рис. 1.14). Область допустимих рішень вихідної задачі – *ABCDE*. Додаткові обмеження змінюють цю область до множини *EFGLMN*, відкидаючи всі заздалегідь неприйнятні рішення за критеріями f_1, f_2. Зміна граничних значень критеріїв змінює і відповідну область допустимих рішень отриманої скалярної задачі. На рис. 1.14 це показано штриховими і штрих пунктирними лініями. Для даної задачі, вочевидь, обмеження, що відповідає другому критерію не впливають на рішення скалярної задачі, а активним є обмеження, яке відповідає першому критерію. Якщо змінити порогові значення для цього критерію, то зміниться і рішення задачі. При різних значеннях ми отримуємо різні рішення, кожне з яких буде слабо ефективним. Таким чином, змінюючи порогові значення критеріїв можна отримати всі слабо ефективні рішення вихідної багатокритеріальної задачі оптимізації.

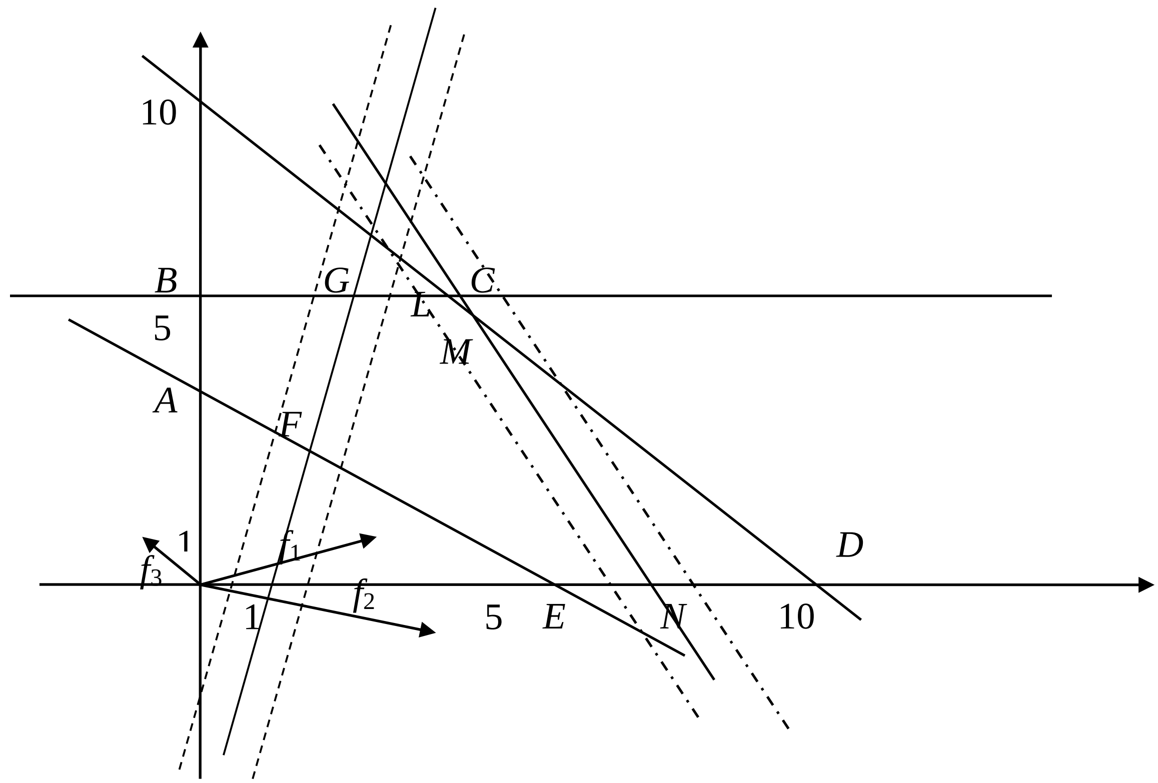

Рис. 1.15. Геометрична інтерпретація до прикладу 1.12

1.8.1. Метод послідовних поступок

Цей метод, також як і метод головного критерію, застосовується у випадку коли критерії впорядковані за важливістю. Опишемо його для задачі виду:

$$f_i(x) \to \min,\ i \in I,$$

$$x \in X,$$

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x).$$

Сутність методу послідовних поступок полягає в тому, що вихідна багатокритеріальна задача замінюється послідовністю однокритеріальних задач, область допустимих рішень яких звужується від задачі до задачі за допомогою додаткових обмежень, які враховують вимоги до критеріїв. При формулюванні кожної задачі, по відношенню до важливішого критерію робиться поступка, величина якої залежить від вимог задачі і оптимального рішення за цим критерієм.

Опишемо схему метода.

1. Розв’язується скалярна задача оптимізації за найважливішим критерієм на всій множині допустимих альтернатив X.

$$f_1(x) \to \min,$$
$$x \in X.$$

В результаті отримуємо оптимальне значення критерію $f_1(x)$: f_1^{min}.

2. Розв’язується задача оптимізації по наступному за важливістю критерію при додатковому обмеженні $f_1(x) \le f_1^{\min} + \Delta_1$, де Δ_1 – допустима поступка по першому критерію. Тобто розв’язуємо таку задачу:

$$\begin{aligned} & f_2(x) \to \min, \\ & f_1(x) \le f_1^{\min} + \Delta_1, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

В результаті рішення задачі отримуємо оптимальне значення критерію $f_2(x)$: f_2^{min}.

Нехай в результаті k кроків отримані значення $f_1^{\min}, f_2^{\min}, \dots, f_k^{\min}$ тоді на $(k+1)$ - му кроці розв’язується задача:

$$\begin{aligned} & f_{k+1}(x) \to \min, \\ & f_1(x) \le f_1^{min} + \Delta_1 \\ & f_2(x) \le f_2^{min} + \Delta_2, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & f_k(x) \le f_k^{min} + \Delta_k, \\ & x \in X \end{aligned}$$

і буде одержано значення критерію f_k^{min}.

Коли будуть розглянуті всі критерії – задачу вирішено. Оптимальним рішенням багатокритеріальної задачі буде рішення останньої скалярної задачі.

Таким чином, початкова багатокритеріальна задача зведена до послідовного вирішення ряду скалярних задач. А саме, кількість задач буде дорівнювати числу критеріїв.

Цей метод дає можливість врахувати пріоритети критеріїв і не допустити підвищення значень критеріїв більш, ніж деякий допустимий рівень (у випадку, коли критерії максимізуються – не допустити зниження їх рівня нижче допустимого). До складнощів його застосування відноситися суб'єктивізм у визначенні цих допустимих рівнів. Зазвичай допустима поступка визначається експертами, виходячи з оптимального значення критерію і вимог задачі .

Зауваження. У випадку коли критерій максимізується відповідне йому обмеження формулюється, як $f_i(x) \geq f_i^{\max} - \Delta_i$, де Δ_i – допустима поступка по цьому критерію.

Для ілюстрації цього методу розв'яжемо таку задачу.

П р и к л а д 1.11. Розв'язати методом послідовної поступки задачу багатокритеріальної оптимізації:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \to \min x,$$
$$f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Вважати критерії впорядкованими за важливістю.

Розв'язування

Згідно методу послідовної поступки розв'язуємо спочатку задачу оптимізації за критерієм, який має найвищий пріоритет (у даному випадку це перший критерій) на вихідній множині допустимих альтернатив. Тобто задачу виду:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Оптимальне рішення цієї задачі досягається якщо $x_1 = \dfrac{5}{4}$, $x_2 = \dfrac{9}{4}$, значення критеріїв на цьому рішенні $f_1^* = 17$.

Припустимо, що експертами визначена допустима поступка за першим критерієм у розмірі $\Delta_1 = 2$.. Тоді друга задача формулюється за таким правилом: оптимізація проводиться за наступним за важністю критерієм, до обмежень додається додаткове обмеження, отримане із попереднього критерію. Оскільки за першим критерієм проводилася максимізація, то обмеження буде мати вигляд: $f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x \geq f_1^* - \Delta_1$, тобто $x_1 + 7x \geq 17 - 2 = 15$.

Задача другого етапу тоді набуває вигляду:

$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + 7x_2 \geq 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Рішенням цієї задачі буде $x_1 = \dfrac{15}{8}$, $x_2 = \dfrac{15}{8}$, значення критеріїв на цьому рішенні $f_2^* = \dfrac{15}{8}$.

Тепер робимо поступку за другим критерієм. припустимо, що експерти визначили можливу поступку у розмірі $\Delta_2 = \dfrac{1}{8}$. Враховуючи, що другий критерій мінімізується, відповідне йому додаткове обмеження формулюється таким чином: $f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \leq f_2^* + \Delta_2$, а саме $-2x_1 + 3x_2 \leq \dfrac{15}{8} + \dfrac{1}{8} = 2$, і задача наступного етапу набуває вигляду:

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min, ,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + 7x_2 \geq 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Рішенням цієї задачі буде $x_1 = \dfrac{31}{17}$, $x_2 = \dfrac{32}{17}$, значення критеріїв на цьому рішенні $f_1^* = 15$, $f_2^* = 2$, $f_3^* = \dfrac{63}{17}$.

Таким чином, у результаті рішення трьох скалярних задач отримано рішення багатокритеріальної задачі оптимізації. Варіюючи значення поступки можна отримати інші рішення вихідної багатокритеріальної задачі.

Зауважимо, що більшість методів багатокритеріальної оптимізації передбачають виділення оптимального рішення безпосередньо із множини всіх рішень. У зв'язку з цим корисно проаналізувати отримані результати, щоб з'ясувати чи завжди вони приводять до отримання ефективних рішень, і якщо ні, то спеціально передбачити можливість поліпшення рішення, що виділяється, до ефективного.

Для ілюстрації розглянемо такий приклад:

Існує оригінальний метод багатокритеріальної оптимізації для лінійних задач, що формально полягає в наступному: спочатку знаходять точки оптимуму кожного критерію окремо, а потім оптимальне рішення y_0 виходить як така опукла комбінація точок y^i ($y^\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i$, де $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$), для якої максимальне із нормованих відхилень значень критеріїв f_i від відповідного оптимуму мінімально, тобто

$$\max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(y^0)}{\left|y_i^*\right|} = \min_{\lambda} \max_{i \in M} \frac{y_i - f_i(y^\lambda)}{\left|y_i^*\right|},$$

де $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, y_i^* – оптимальне значення i-го критерію.

Таке визначення оптимального рішення має суттєві недоліки.

По-перше, якщо деякий критерій має декілька точок оптимуму на X, то не ясно, яку з них слід використовувати, оскільки кожній точці y^i відповідатиме своє рішення y_0 .

По-друге, отримане вказаним шляхом оптимальне рішення, як правило, не буде не тільки ефективним, але і слабо ефективним.

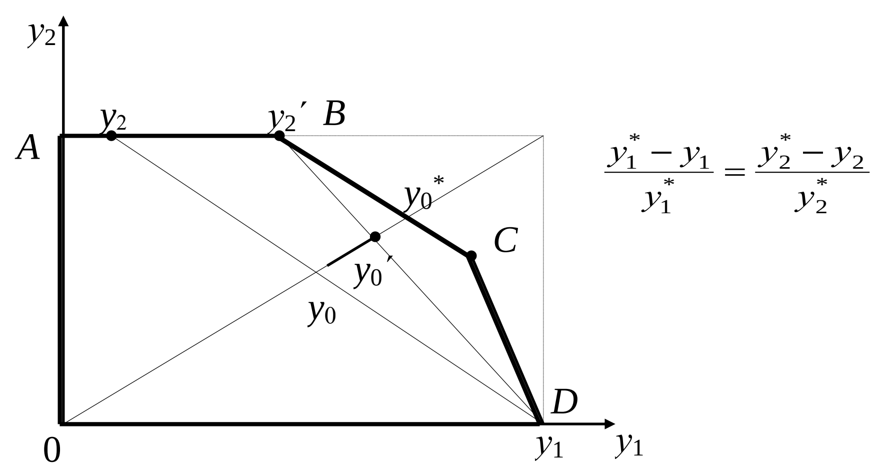

Рис. 1.15. Визначення оптимального рішення

Цю ситуацію проілюстровано на рис. 1.15. Тут обидва критерії y_1 та y_2 максимізуються, область допустимих рішень $0ABCD$ показана товстою лінією. Вочевидь, оптимальним рішенням за критерієм y_1 буде точка $D = y_1$, за критерієм y_2 оптимальними будуть всі точки відрізку AB. Вибір за оптимум цього критерію точки y_2'' дає за описаним методом рішення багатокритеріальної задачі y_0'', відповідно, якщо обрати за оптимум y_2' – отримаємо рішення y_0'. Проте жодне з них не буде ефективним, оскільки рішення y_0^* буде кращим за кожне з них, причому відразу за обома критеріями.

Пізніше це визначення було вдосконалене: оптимальним запропоновано вважати рішення y^*, визначуване з умови

$$\max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x^{0*})}{\left|y_i^*\right|} = \min_{x \in X} \max_{i \in M} \frac{y_i^* - f_i(x)}{\left|y_i^*\right|}.$$