Тема 6. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ

Вже досягнуте розуміння того, що складність навколишньої нас природи тісно пов'язана з фрактальною геометрією. Природа не є рядом повторюваних закономірностей, але на противагу тому характеризується ***локальною випадковістю та глобальним порядком***.

Фрактали в реальному світі обумовлені глобальними статистичними структурами, що одночасно породжують локальні випадковості, тобто хаос і порядок співіснують. Для ринкового економічного аналізу це має суттєві наслідки.

Розглянемо більш детально поняття та сутність фракталів та фрактальної геометрії.

Не існує єдиного (а тому і абсолютно точного) визначення фракталу.

Термін ***фрактал*** *(*від латинського слова fractus – дробовий) був запропонований Бенуа Мандельбротом у 1975 році для позначення нерегулярних самоподібних математичних структур.

Хоча Мандельброт почав свої дослідження в даному напрямку в середині 60-х років XX ст., фрактальна геометрія одержала свою назву лише в 1977 році завдяки його книзі «The Fractal Geometry of Nature» [165, 337]. У цій роботі використані наукові результати багатьох вчених, що працювали в цій же області (насамперед, Пуанкаре, Кантора, Хаусдорфа, Фату, Жюліа та ін.). Метою фрактальної геометрії був аналіз ламаних, зморшкуватих і нечітких форм. Мандельброт використав слово фрактал тому, що це передбачало уламаність та фракційність цих форм. Основне визначення фракталу, дане Мандельбротом, представляє фрактал як деяку самоподібну множину, тобто фрактал - це структура, що складається із частин, які в деякому сенсі подібні до цілого [336]. За його думкою, фрактальна геометрія є геометрією природи, а дефініція фракталу стоїть в одному ряді з дефініцією природи.

У найпростішому випадку невелика частина фракталу містить інформацію про весь фрактал. Строге визначення самоподібних множин було дано Дж. Хатчінсоном у 1981 році. Він назвав множину самоподібною, якщо вона складається з декількох компонентів, подібних всій цій множині, тобто компонентів, які одержувані в результаті афінних перетворень - повороту, стиснення та відображення вихідної множини. Однак, у контексті застосування фракталів для аналізу фінансів цю властивість виявилося краще описувати із використанням більш загального поняття - самоафінності. Ця ж властивість подібності (або, інакше, скейлінгу) дуже тісно пов'язана з поняттям інваріантості щодо масштабу та позначається як «принцип масштабування» (англ. - «principle of scaling»).

Самоподібність (та самоафінність) - це хоча й необхідна, але далеко не достатня властивість фракталів. Головна особливість фракталів полягає в тому, що їхня розмірність не укладається у звичні геометричні уявлення. Фракталам характерна геометрична «ізрізаність». Тому використовується спеціальне поняття фрактальної розмірності, що введене Феліксом Хаусдорфом (1868-1942) та Абрамом Безіковичем (1891-1970). Стосовно до ідеальних об'єктів класичної евклідової геометрії вона давала ті ж чисельні значення, що й відома задовго до неї так звана топологічна розмірність (інакше кажучи, була рівною нулю для точки, одиниці - для гладкої плавної лінії, двом - для фігури та поверхні, трьом - для тіла й простору). Але збігаючись з відомою, топологічною, розмірністю на ідеальних об'єктах, нова розмірність мала більш тонку чутливість до всякого роду недосконалостей реальних об'єктів, дозволяючи розрізняти та індивідуалізувати те, що колись було безлике й нерозрізнене. Так, відрізок прямої, відрізок синусоїди та самий вигадливий меандр нерозрізнені з погляду топологічної розмірності - всі вони мають топологічну розмірність, що дорівнює одиниці, тоді як їхня розмірність Хаусдорфа - Безіковича різна та дозволяє числом вимірювати ступінь звивистості. Розмірність фрактальних об'єктів не є цілим числом, характерним для звичних геометричних. Разом із тим, у більшості випадків фрактали нагадують об'єкти, що щільно заповнюють реальний простір, але не використовують його повністю.

Таким чином, друге з відомих означень представляє фрактал як множину точок, розмірність Хаусдорфа - Безіковича якого строго більше його топологічної розмірності. Остання завжди дорівнює цілому числу, у той час як фрактал має дробову (фрактальну) розмірність. З погляду якісного змісту фрактальна розмірність показує, як форма або, наприклад, часовий ряд заповнюють простір. Спосіб заповнення об'єктом простору визначається тими силами, які визначили його формування. Наприклад, в економіці - для часового ряду прибутку акцій такими силами виступають мікро- і макроекономічні чинники, що впливають на очікування інвесторів.

Продовжуючи аналізувати властивості фракталів, на яких базуються їхні визначення, необхідно відзначити, що незважаючи на те, що фрактали - це насамперед мова геометрії, однак їхні головні елементи (на відміну від звичних об'єктів евклідової геометрії, таких, як пряма лінія або коло) недоступні безпосередньому спостереженню. Фрактали виражаються не в первинних геометричних формах, а в алгоритмах, наборах математичних процедур. Ці алгоритми трансформуються в геометричні форми за допомогою комп'ютера. Фрактальну геометрію визначають як рекурсивну геометрію, тобто геометрію динамічних форм, моделей, які мають математичну властивість рекурсії.

Зауважимо, що під рекурсією розуміють спосіб завдання функцій, при якому значення шуканої функції в даній точці визначається через її значення в попередніх точках (при відповідному відношенні передування).

Це означає, що якщо дано, наприклад, всі змінні моделі до моменту $(t-1)$, то модель забезпечує одержання одного за одним значення змінних для t, за ними - для $(t+1)$ і так далі. У загальному значенні рекурсія (recurrence) припускає обчислення функції за певним алгоритмом. Таким чином, ми підійшли до третього трактування визначення фракталу - алгоритмічного.

У алгоритмічному сенсі ***фрактал*** є атрактором (граничною множиною) правила (алгоритму), що його породжує.

Алгоритм побудови фракталу (як атрактора) реалізується на кожному кроці як гра хаосу: рекурсивна процедура, що породжує, не знає, в якому напрямі вона буде рухатися до того, як завершиться реалізація попереднього кроку. Прогнозувати цей напрям неможливо, але, одержавши інформацію, процес спрямовується внутрішнім детерміністичним правилом. При цьому множина можливостей нескінченна. З цього випливає, що аттрактор, образно, є нескінченою множиною можливих рішень, тобто реалізацій. При цьому важливо відзначити, що положення кожної його точки залежить від того, де розташувалася точка попередня. Більш того, місце кожної наступної точки залежить від положення всіх попередніх.

У наш час геометрія фракталів, їхня незвичайна краса та різноманіття скорила та продовжує захоплювати численних дослідників, починаючи від програмістів і закінчуючи людьми мистецтва. У наукових публікаціях і на численних сайтах обговорюються питання розробки та реалізації алгоритмів створення красивих картин, що використовують фрактальну природу рекурсивних (ітераційних) відображень.

Для того, щоб зрозуміти сутність та представити все різноманіття фракталів необхідно розглянути їхню класифікацію. Існує декілька класифікацій фракталів. Одна з них розбиває всю множину фракталів на три групи: геометричні, алгебраїчні та стохастичні. Розглянемо їх докладніше.

а) *Геометричні фрактали*

Фрактали цього класу самі наочні. У двомірному випадку їх одержують за допомогою ламаної (або поверхні в тривимірному випадку), що називається генератором. За один крок алгоритму кожний з відрізків, що становлять ламану, замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї процедури утворюється геометричний фрактал.

Одним із самих типових прикладів геометричних фракталів є крива Коха. Вона була винайдена в дев'ятнадцятому столітті німецьким математиком по імені Хельге фон Кох, який, вивчаючи роботи Георга Контора та Карла Вейєрштрасса, наштовхнувся на описи деяких дивних кривих із незвичайною поведінкою. Запал (або, інакше, ініціатор) - пряма лінія. Генератор - рівносторонній трикутник, сторони якого рівні третини довжини великого відрізка. Ці трикутники на кожному кроці додаються до середини кожного сегмента. У своєму дослідженні Мандельброт багато експериментував із кривими Коха, і одержав фігури такі, як Острова Коха, Хрести Коха, Сніжинки Коха (див. рис.1.1) і навіть тривимірні представлення кривої Коха, використовуючи тетраедр і додаючи менші за розмірами тетраедри до кожної його грані. Крива Коха має розмірність $\ln 4/\ln 3 = 1,261859507$.

Характерними є також властивості тріадної кривої Коха.

По-перше, ця крива не має фіксованої довжини - із числом поколінь її довжина прагне до нескінченності.

По-друге, до цієї кривої неможливо побудувати дотичну - кожна її точка є точкою перегину, у якій похідна не існує, - ця крива не гладка.

Довжина та гладкість - фундаментальні властивості кривих, які вивчаються як евклідовою геометрією, так і іншими геометріями (Лобачевського, Римана тощо). До тріадної кривої Коха традиційні методи геометричного аналізу виявилися непридатними, тому криву Коха назвали чудовиськом - «монстром» серед гладких мешканців традиційних геометрій

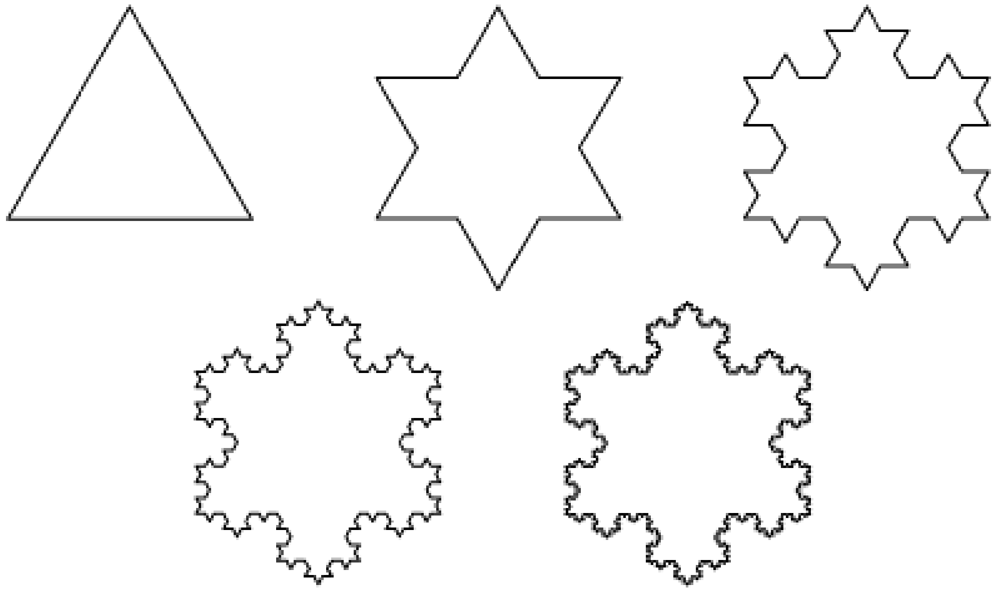

Рисунок 6.1 - Сніжинка (тріадна крива) Коха - за етапами побудови. Запал - одиничний відрізок довжини 1. Алгоритм побудови: запал розбивається на три рівні частини довжиною в 1/3, відкидається середня частина та замінюється ламаною із двох ланок довжиною 1/3 (генератор - утворюючий елемент)

Прикладами геометричних фракталів також є: серветка (або трикутник) Серпіньського (рис.6.2), «дракон» Хартера-Хейтуея (рис.6.3), губка Менгера (рис.6.4) та ін.

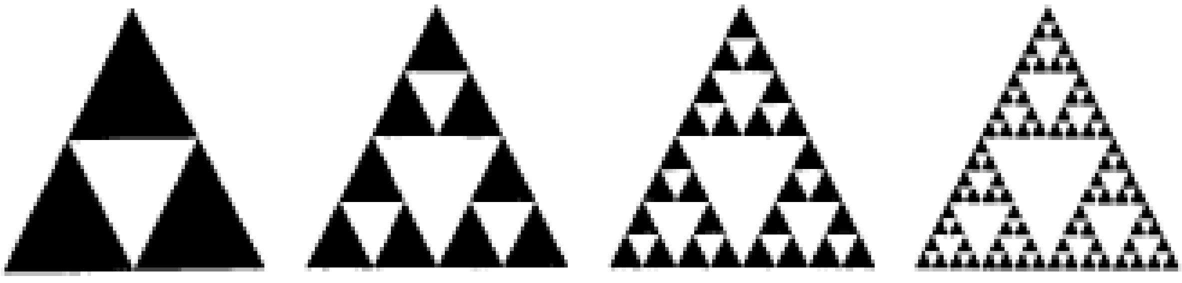

Рисунок 6.2 – Регулярний фрактал – серветка (або трикутник) Серпіньського (Sierpiński gasket) – по етапах побудови. Запал – трикутник з усіма внутрішніми точками. Утворюючий елемент виключає із запалу центральний трикутник. Праворуч: четверте покоління передфракталів; фрактальна крива утворюється у границі при нескінченно великій кількості поколінь і має фрактальну розмірність $D = \ln 3 / \ln 2 = 1{,}58...$

Фрактал, представлений на рис. 6.2 - трикутник Серпіньського (названий на честь польського математика Вацлава Серпіньського, що вперше описав його в 1916 році) - отриманий за допомогою алгоритму зі зворотним зв'язком (рекурсивного алгоритму) і наочно демонструє властивість самоподібності (або scaling): кожна частина фігури, якою б малою вона не була, містить зображення, що у збільшеному вигляді відтворює цілий трикутник Серпіньського.

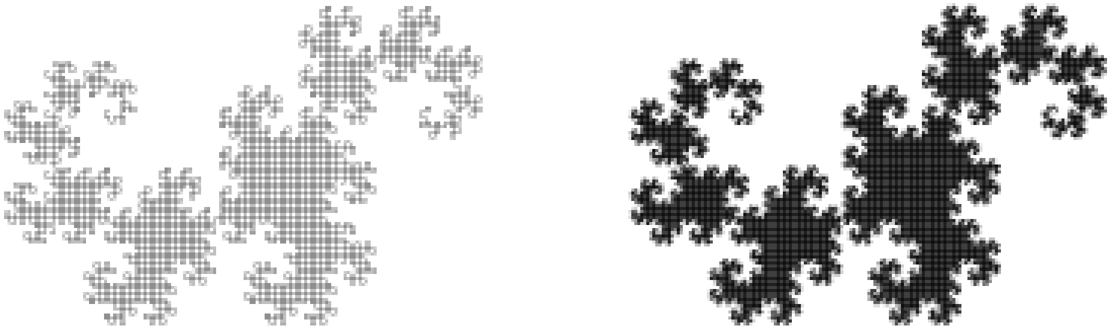

Рисунок 6.3 – 12-те и 16-те покоління дракону Хартера-Хейтуея

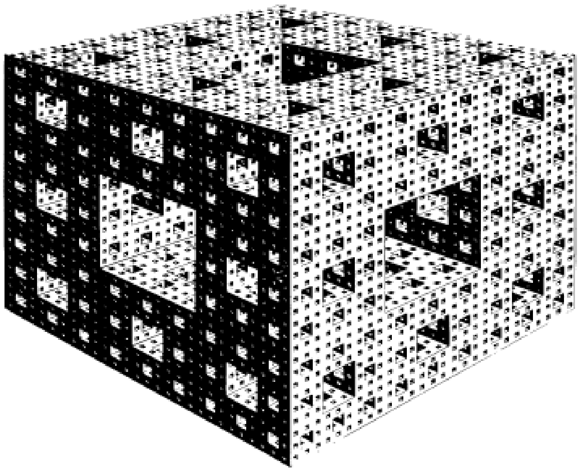

Рисунок 6.4 – Губка Менгера (Menger sponge)

б) *Алгебраїчні фрактали*

Це сама велика група фракталів. Одержують їх за допомогою нелінійних процесів у n-мірних просторах. Найбільш вивчені двовимірні процеси. Інтерпретуючи нелінійний ітераційний процес, як дискретну динамічну систему, можна користуватися термінологією теорії цих систем: фазовий портрет, процес, що встановився, аттрактор та ін. Одним з найбільш відомих прикладів таких фракталів є множина Мандельброта (рис.6.5).

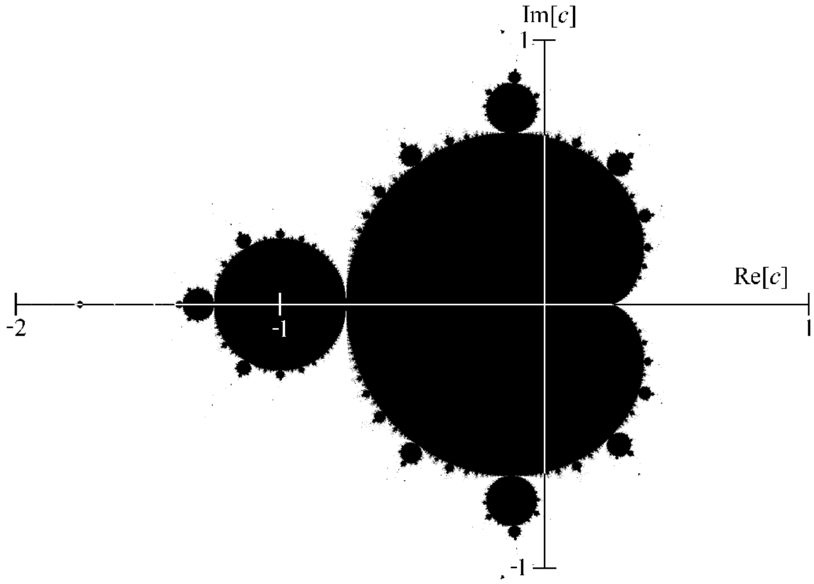

Рисунок 6.5 – Множина Мандельброта

Множина Мандельброта — це фрактал, визначений як множина точок c на комплексній площині, для яких ітеративна послідовність

$$z_0 = 0,$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

не йде на нескінченність.

в) *Стохастичні (випадкові) фрактали*

Це відомий клас фракталів, які утворюються у тому випадку, якщо в ітераційному процесі хаотично змінювати які-небудь його параметри. Випадкові фрактали представляють собою обрані навмання в різних масштабах комбінації правил, що породжують. При цьому утворюються об'єкти дуже схожі на природні - несиметричні дерева, нерівні берегові лінії та ін. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфу місцевості та поверхні моря. Така комбінація випадковості та детермінованості, породжуючи правило, або «причинність», є також корисною в аналізі ринків капіталу. Саме комбінація випадкових подій і деякої залежності є характеристикою фрактальних часових рядів. Одним із прикладів випадкових фракталів є узагальнений броунівський рух, який також був визначений Мандельбротом.

«Сутність концепції фракталів за Мандельбротом зводилась до того, що в реальності завжди існує відхилення від механічних абстракцій, таких як «евклідів простір» або «ньютонівська механіка», отже, похибка, відхилення, фон, перешкоди, неточності та ін. більш фундаментальні та онтологічні, ніж процеси, що описуються класичною наукою». Автор відзначає, що «фактично, Мандельброт запропонував заснувати контр-науку, де за норму приймалися «перешкоди», «шуми», а впорядковані структури розглядалися як відхилення або малоймовірні окремі випадки».

Існує також інша класифікація фракталів, що поділяє всі фрактали на детерміновані (алгебраїчні та геометричні) і недетерміновані (стохастичні, випадкові). Недетерміновані фрактали відрізняються від детермінованих тим, що вони будуються шляхом застосування керованої випадковості.

Потрібно відмітити, що Мандельброт написав величезну кількість наукових праць, присвячених дослідженню фрактальної геометрії, спостережуваній у багатьох галузях людської діяльності: зміні цін і розподілів заробітної плати, статистиці помилок при викликах на телефонних станціях, частоті слів у друкованих текстах, різних математичних об'єктах тощо. Виявилося, що всі об'єкти з нечіткою, хаотичною, невпорядкованою структурою (а таких у природі переважна більшість) виявилися такими, що складаються із фракталів. Зв'язок між хаосом і фракталами далеко не випадковий - він виражає їхню глибинну сутність.

Особливість фрактальної геометрії полягає в тому, що надзвичайно складні форми можуть утворюватися за простих процесів генерування. Більш того, відповідно до теорії динамічних систем: прості, детерміновані рівняння можуть породжувати таку хаотичну поведінку, при якій система ніколи не вертається в стабільний стан і не виявляється ніякої закономірності. Часто такі системи поводяться цілком нормально до деякого певного значення ключового параметра, потім зазнають перехід, в якому існує дві можливості подальшого розвитку, потім чотири, і, нарешті, хаотичний набір можливостей. Тому фрактальну геометрію Мандельброта називають геометрією хаосу. Для вивчення реальних процесів застосовується саме теорія хаосу.

Література:

1. Максишко Н. К. Моделювання економіки методами дискретної нелінійної динаміки : монографія. Запоріжжя : Поліграф, 2009. 416 с.