Лекція 4 . ФРАКТАЛЬНА СТАТИСТИКА НА РИНКАХ КАПІТАЛУ

4.1. Передумови виникнення фрактальної статистики.

4.2. Ознаки порушення умов класичної статистики в динаміці ринків.

4.3. Відкриття нової непараметричної методології - методу нормованого розмаху або R/S-аналізу

4.4. Сутність концепції довгострокової пам'яті

4.5. Показник Херста та його значення

4.1. Передумови виникнення фрактальної статистики

Зародження нової парадигми, що включає в себе ***нову фрактальну статистику***, було визначено часом, розвитком науки та економічних процесів.

Аж до 90-х років XX сторіччя при використанні інструментарію класичної статистики в економіко-математичному моделюванні домінувала лінійна парадигма.

Відповідно до цієї парадигми кожний вплив на початкові умови викликає пропорційну реакцію одержуваного результату.

Проте ринки рідко бувають настільки стійкими й на незначні збурювання можуть реагувати нелінійно.

Ринки – це природне явище, причому їхня діяльність не підпорядковується законам класичної фізики, параметричної статистики або лінійної математики.

До зміни тренда на фінансових ринках призводять несподівані урядові заяви, погодні явища, повідомлення про види на врожай, політичні або економічні події, що відбуваються в країнах, що впливають на світову та регіональну економіку. Такі «поштовхи» здатні змінити поведінку системи, іноді призвести до різких кількісних змін та змін у напрямку.

Тобто, доволі часто виникає ***біфуркаційна*** або, в іншій термінології, ***експонентна суперреакція*** на вплив - це і є ще одне ***трактування сутності нелінійності.***

Тому, відносно цілого ряду реальних економічних процесів класичні лінійні методи статистики є неадекватними, а внаслідок цього, і непридатними для аналізу та прогнозування. Ці методи *моделюють ринок, виходячи з теорії рівноваги*, і, зокрема, ігнорують час.

Іншими словами, використання лінійних методів припускає, що розглянуті еволюційні процеси не мають пам'яті про минуле або мають дуже обмежену пам'ять, що не відповідає суті реальних економічних процесів.

Біфуркаційні явища в динаміці соціально-економічних систем і процесів (великі падіння або великі викиди) пояснює ***теорія хаосу***. З цієї причини багато хто з ринкових технічних аналітиків обґрунтовано припустили, що розпізнати в хаотичній динаміці нові закономірності їм допоможе ***фрактальний аналіз*** та ***фрактальна геометрія***.

Під ***фрактальним аналізом*** розуміють аналіз, що спрямований на виявлення рекурсивних (фрактальних) моделей (recursive model).

***Фрактальна геометрія* -** це та галузь геометрії, яка вивчає *фрактали*.

Нагадаємо, *фрактали* - це складні об’єкти зі структурою, яка повторюється, коли ми спостерігаємо її в різних масштабах.

Вже досягнуте розуміння того, що складність навколишньої нас природи тісно пов'язана з цією геометрією. Природа не є рядом повторюваних закономірностей, але на противагу тому характеризується ***локальною випадковістю та глобальним порядком***.

Фрактали в реальному світі обумовлені глобальними статистичними структурами, що одночасно породжують локальні випадковості, тобто хаос і порядок співіснують. Для ринкового економічного аналізу це має суттєві наслідки.

Б. Мандельброт написав величезну кількість наукових праць, присвячених дослідженню фрактальної геометрії, спостережуваній у багатьох галузях людської діяльності:

зміні цін і розподілів заробітної плати,

статистиці помилок при викликах на телефонних станціях,

частоті слів у друкованих текстах,

різних математичних об'єктах тощо.

Виявилося, що всі об'єкти з нечіткою, хаотичною, невпорядкованою структурою (а таких у природі переважна більшість) виявилися такими, що складаються із фракталів. Зв'язок між хаосом і фракталами далеко не випадковий - він виражає їхню глибинну сутність.

Особливість ***фрактальної геометрії*** полягає в тому, що надзвичайно складні форми можуть утворюватися за простих процесів генерування. Більш того, відповідно до теорії динамічних систем: прості, детерміновані рівняння можуть породжувати таку хаотичну поведінку, при якій система ніколи не вертається в стабільний стан і не виявляється ніякої закономірності. Часто такі системи поводяться цілком нормально до деякого певного значення ключового параметра, потім зазнають перехід, в якому існує дві можливості подальшого розвитку, потім чотири, і, нарешті, хаотичний набір можливостей.

Тому ***фрактальну геометрію Мандельброта*** називають ***геометрією хаосу***. Для вивчення реальних процесів застосовується саме **теорія хаосу**.

4.2. Ознаки порушення умов класичної статистики в динаміці ринків

Повернемося до питання про те, чи дійсно існує необхідність використання фрактальної геометрії в математичному моделюванні еволюції економічних процесів і систем.

Об'єктом моделювання у даному випадку виступають економічні часові ряди (ЧР), що відбивають динаміку економічної системи, процесу та , зокрема, фінансового ринку.

Відзначимо, що класична статистика базується на *центральній граничній теоремі* (або Законі великих чисел), яка стверджує, що в міру проведення все більшої кількості спостережень, граничний розподіл випадкових значень буде нормальним розподілом.

Останнє означає, що події повинні бути незалежними, тобто не повинні впливати одна на одну, і при цьому всі вони повинні мати однакову ймовірність настання.

Довгий час припускалося, що поведінка більшості реальних соціально-економічних систем підпорядковується нормальному або «майже нормальному» закону.

На початку 90-х років минулого сторіччя фактично відпали сумніви в тому, що ***ринки капіталу не підпорядковуються нормальному закону***.

Разом із цим з'явилося усвідомлення того, що для адекватного моделювання цих ринків потрібний інструментарій нової статистики, відмінної від стандартної.

Так, досліджуючи економіку, Б. Мандельброт, виявляє, що довільні на перший погляд коливання ціни можуть слідувати *схованому математичному порядку в часі, що не описується стандартною статистикою*.

На весь світ прославилося «обрахування» Б. Мандельбротом цін на бавовну (за цими цінами були надійні дані більш як за сто років). Коливання їх протягом дня здавалися непередбаченими, але комп'ютерний аналіз допоміг простежити тенденцію цінової зміни. Було виведено графік, на якому коливання цін за один конкретний день були накладені на більш тривалий відрізок часу. Б. Мандельброт простежив симетрію в тривалих коливаннях ціни й коливаннях короткочасних. Це відкриття виявилося повною несподіванкою для економістів. Сам Б. Мандельброт у той час не цілком розумів їхній таємний зміст, але відчував, що знайшов щось дуже важливе. Пізніше з'ясувалося, що він інтуїтивно почав розробляти *рекурсивний (фрактальний) метод* в економіці.

Ознайомившись із роботами знаменитого британського гідролога Херста, він дійшов висновку про існуючу залежність між рівнями цін: про кореляції, які спадають згодом, але настільки повільно, що, «здається, ніколи не зникнуть повністю, як би далеко назад у часі ми не верталися» [2].

4.3. Відкриття нової непараметричної методології - методу нормованого розмаху або R/S-аналізу

Таким чином, виявилося (і до цього часу багато вже дослідників дійшли впевненості в цьому), що відповідний інструментарій нової статистики вже існує у вигляді ***непараметричної методології, що була відкрита Х. Е. Херстом***.

В 1951 р. ***Х. Е. Херст*** опублікував роботу, яка мала назву «Довгострокова місткість водоймища». На перший погляд робота розглядала моделювання проекту водоймища, але Херст залучив у своє дослідження багато природних систем і розробив нову статистичну методологію для розрізнення випадкових та невипадкових систем, сталості трендів і тривалості циклів, якщо такі є.

Тобто, він розробив метод, названий ***методом нормованого розмаху***, або R/S***-аналізом***, який *використовується для розрізнення випадкового часового ряду та фрактального часового ряду*.

Простежимо логіку народження Херстом *нової статистики*, що одержала пізніше назву «**фрактальна статистика**».

Херст знав про роботу Ейнштейна (1908), у якій обґрунтовувалося наступне твердження: у процесі броунівського руху випадкова частка проходить відстань *R*, що збільшується пропорційно квадратному кореню із часу *T* спостереження за цією часткою, тобто $R \sim \sqrt{T}$. Відзначимо, що це рівняння використовується, наприклад, у фінансовій математиці для того, щоб обчислити стандартне відхилення. Херст пронормував розмах *R* стандартним відхиленням *S* і представив наступне узагальнення вищевказаного рівняння: $(R/S)_n = C * n^H$, де *C* – константа, а *n* – число спостережень (рівнів), що складають розглянутий часовий ряд (ЧР). Значення $(R/S)_n$ називаються *нормованим розмахом,* а показник ступеня *H* називається *показником Херста*. Відзначимо при цьому, що показник Херста можна наближено, але з прийнятною точністю, обчислювати за допомогою наступної процедури: побудувати в декартових координатах точки зі значенням ординати $y_n = \log(R/S)_n$ та значеннями абсциси $x_n = \log(n)$ та обчислити тангенс кута нахилу відрізка прямої, що для цих точок представляє просту регресію, яку знайти за допомогою методу найменших квадратів.

Ідея нової статистики народилася у вигляді наслідку з наступного факту:

якби рівні спостережуваного ЧР (у Херста ці рівні представляли собою величину річних приливів Нілу) були незалежно розподілені, то для значення *H* повинна виконуватися рівність $H = 0,50$.

Але Херст виявив, що $H = 0,91$.

Останнє означає, що нормований розмах збільшується швидше, ніж квадратний корінь із часу. Значення $H = 0,91$ означало, що зміни в щорічних нільських розливах впливали один на одного або, інакше кажучи, що розглянутий ЧР (приливів Нілу) має довгострокову пам'ять.

Подалі дослідження Херста та інших учених призвели до відкриття існування пам'яті практично у всіх ЧР, що відбивають еволюцію явищ природи - випадання опадів, плями на сонці, річні кільця у дерев та ін.

Аналіз одної з найдовших виборок методом нормованого розмаху був проведений Мандельбротом та Уоллісом для дослідження давніх кліматичних змін за товщиною шарів у шаруватих мулистих відкладеннях озеру Томіскамінг, що у Канаді. Ці дані охоплюють період з 1809 року, а отримане для них значення показника Херсту дуже велике ($H = 0,96$).

4.4. Сутність концепції довгострокової пам'яті

Якщо H відрізняється від $0,50$, то це означає, що спостереження не є незалежними. Кожне спостереження має пам'ять про всі події, що йому передують. І це не короткострокова пам'ять, яку часто називають «марківською». Це інша пам'ять – довгострокова (або, краще, довготривала), теоретично вона зберігається назавжди. Недавні події мають вплив більший, ніж події віддалені, проте залишковий вплив цих останніх завжди відчутний.

Усвідомлення універсальності цього факту з'явилося через третину сторіччя, коли численними дослідниками було встановлено, що довгострокова пам'ять властива багатьом ЧР, що відбивають динаміку еволюційних процесів у соціально-економічній та інших сферах людської діяльності.

Цікавим є також той факт, що Б. Мандельброт - засновник фрактальної геометрії - визначив концепцію довгострокової пам'яті (залежності) у поясненні результатів, які отримав Херст як «один із стовпів фрактальної геометрії» [166]. У цій самій роботі вчений відмічає, що «ніхто не може бути незалежним від світу … Світова економіка — це безмежно складна машина… У такому світі вплив давно минулих подій на сучасність цілком узгоджується зі здоровим глуздом». Застосування методу нормованого розмаху Херста виявило, що статистичні властивості багатьох природних явищ, а також ринкова статистика краще всього описуються за допомогою одного з видів випадкових одновимірних фракталів – узагальненого броунівського руху (що і пояснює назву «фрактальна статистика»).

Опис математичного інструментарію та алгоритмів використання фрактальної статистики, зокрема, *R/S*-аналізу, розглянемо пізніше (див. Лекцію 5).

4.5. Показник Херста та його значення

Якщо система за достатньо тривалий термін дає ***статистику Херста*** H, то це свідчить про результат взаємопов'язаних подій. Мірою взаємного зв'язку подій, як відомо, є коефіцієнт кореляції. Вплив сучасного на майбутнє може бути поданим наступним кореляційним співвідношенням:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \qquad (4.1)$$

де C - міра кореляції, H - ***показник Херста***.

Область значень показника Херста H – це інтервал (0,1).

Значення показника H дозволяє розбити (класифікувати) всі ЧР на три групи:

1) $H = 0,5$;
2) $0 \le H < 0,5$;
3) $0,5 < H \le 1$.

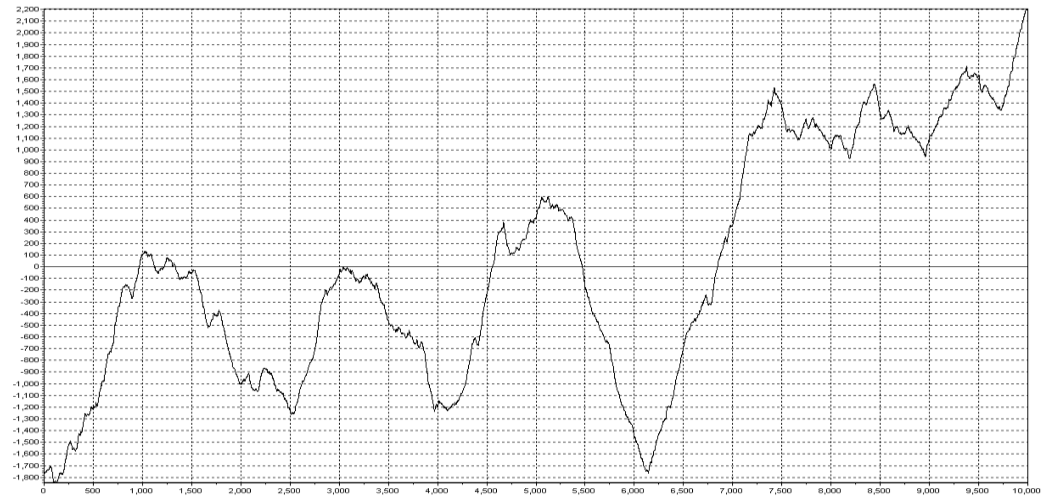
На рис. 4.1 представлено графіки ЧР, що породжено узагальненим броунівським рухом та відрізняються значенням показника Херста H .

Значення $H = 0,5$ (рис.4.1 б) вказує на ***випадковий ЧР***. Події випадкові та некорельовані (відповідно (1.1) $C = 0$). Сучасне не впливає на майбутнє.

Якщо $H \in (0,5;\ 1]$ (рис.4.1 а), то розглянутий ***ЧР*** є ***персистентним***, або ***трендостійким*** і *характеризується ефектом довгострокової пам'яті* . Події тим більш корельовано, чим ближче значення H до одиниці (відповідно C також наближається до одиниці або до 100% кореляції згідно (4.1)).

Відомо також, що на основі значення показника Херста H можна отримати значення фрактальної розмірності D ЧР за наступною формулою

$$D = 2 - H \ . \qquad (4.2)$$



а) $H = 0,95$

б) $H = 0,5$

в) $H = 0,2$

Рисунок 4.1 - Графіки ЧР, що відбивають динаміку узагальненого броунівського руху із різними значенням показника Херста H .

Цілком детермінована система повинна породжувати гладку криву. Фрактальний ЧР «виокремлює» цілком випадковий процес від детермінованої системи, що збурена випадковими подіями. При цьому величина показника Херста H характеризує відношення сили тренду (детермінований чинник) до рівня шуму (випадковий чинник). Тому показник Херста також слугує оцінкою ступеня «зашумленості» ЧР.

У випадку $H \in (0,5;\ 1]$ (рис.4.1а) фрактальна розмірність наближається до одиниці, що відповідає цілком детермінованій системі, а тому рівень шуму тим більш низький, чим більше H, і якщо ЧР зростає (спадає) у попередній період, то ймовірно, що він (за причини несуттєвих або малих збурень) буде зберігати цю тенденцію деякий час в майбутньому. Більш того, наприклад, Е.Федер, розглядаючи статистику морських хвиль і отримавши $H = 0,92$, стверджує, що якщо висота хвиль збільшувалася на протязі часу t, то можна очікувати її збільшення на протязі наступного періоду з такою ж тривалістю. І навпаки, якщо висота хвиль зменшується на протязі часу t, то треба очікувати її подальшого зменшення на протязі такого ж інтервалу часу. Інакше, персистентні стохастичні (випадкові) процеси виявляють достатньо чітко виражені тенденції змін за відносно малого шуму. Тому, коли маємо справу із проявами персистентних стохастичних процесів, виникає спокуса та основа щодо пошуку періодичностей.

Значення $H \in [0;\ 0,50)$ (рис.4.1.в) відповідає ***антиперсистентним***, або ***ергодичним, ЧР*** [207,208].

У нестрогому визначенні антиперсистентність означає повернення до середнього або, в іншій термінології, реверсування (чергування додатних та від'ємних приростів) частіше, ніж у випадковому процесі. Стійкість такої антиперсистентної поведінки залежить від того, наскільки H наближається до нуля. Чим ближче значення H до нуля, тим ближче C у (1.1) до $-0,5$, тобто від'ємної кореляції. Такий ЧР більш мінливий, або волатильний, ніж випадковий ЧР. У цьому випадку фрактальна розмірність D наближається до значення $D = 2$, тобто має місце значна «зашумленість» ЧР, а тому, якщо система демонструє зростання у попередній період, то скоріше за все у наступному періоді (за причини впливу шуму або збурень) почнеться спадання. І навпаки, якщо мало місце зниження, то ймовірним є близьке зростання. Цікавим є той факт, що, незважаючи на широке розповсюдження концепції повернення до середнього в економічних та фінансових джерелах, антиперсистентних економічних ЧР було знайдено дуже замало.

Підсумовуючи значення показника H для аналізу економічної динаміки, що представлена у вигляді ЧР, у тому числі, наприклад, ринку, необхідно вказати, що похідну від нього величину $H-0,5$ вважають **мірою недосконалості такого ринку**.

Фрактальна статистика, яку надає метод нормованого розмаху Херста, є дієвим інструментом моделювання та аналізу явищ, що відбуваються в економіці. Роботи дослідників у цьому напрямі, які можна знайти у наукових джерелах, підтверджують цю думку.

Таким чином, значення числових показників, що характеризують ефекти довгострокової пам'яті, відіграють дуже важливу роль у моделюванні та передпрогнозному аналізі ЧР, особливо *таких ЧР, стосовно яких класичні методи прогнозування є неадекватними*.

Завершуючи огляд щодо появи та застосування фрактального аналізу як нової (фрактальної) статистики для моделювання та аналізу економічних систем та процесів, необхідно відзначити ще два моменти.

Зауваження.

По-перше, важливим є питання щодо адекватності результатів, які отримано на основі значення показника Херста H. Аналіз можливих перешкод та процедуру обґрунтування адекватності H - тесту на перемішування - можна знайти в роботах Е.Петерса. Цей тест базується на тесті, що розроблено Шейнкманом та Ле Бароном для кореляційної розмірності.

По-друге. Ми приділили достатньо уваги до викладу витоків фрактального підходу до моделювання економічних систем. Проте необхідно відмітити, що на даний час розділом фрактальної геометрії, що активно розвивається та має практичні застосування, є *мультифрактальний підхід*. Основні поняття щодо мультифракталів введено Б. Мандельбротом при обговоренні явища турбулентності та надалі розповсюджені на інші ситуації.

Під ***мультифракталом*** розуміють комплексний фрактал, який може визначатися (детермінуватися) не одним єдиним алгоритмом побудови, а декількома послідовно змінюючими один одного алгоритмами.

Кожен з них генерує паттерн зі своєю фрактальною розмірністю.

Для опису *мультифракталу* обчислюють *мультифрактальний* спектр, який містить ряд фрактальних розмірностей, що притаманні елементам даного мультифракталу.

Провідна відмінність, що відрізняє модель уніфрактальну (що розглянуто вище) від мультифрактальної моделі, полягає у характері значення саме показника Херста H : якщо для уніфрактальної моделі показник H є незмінним з часом, то для мультифрактальної моделі він неперервно змінюється ($H = H(t)$) та приймає множину значень.

Тобто показник Херста H та його поведінка знову є визначальними у діагностуванні характеру еволюції системи або процесу. У [163] можна знайти приклади використання мультифракталів для моделювання поведінки цін, які схожі з ринковими системами (товарні, фінансові ринки).

На закінчення відмітимо, що фрактальний аналіз *не витісняє* інші методології (наприклад, спектральний аналіз, вейвлет-аналіз, інші методи еконофізики);

він є сильною формою аналізу ЧР і повинен бути одним із інструментів передпрогнозного аналізу

Література:

1. Максишко Н. К. Моделювання економіки методами дискретної нелінійної динаміки : монографія. Запоріжжя : Поліграф, 2009. 416 с.

2. Мандельброт Б.Б., Хадсон Ричард Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах (The Misbehavior of Markets).М.: Вильямс, 2006. 400 с.