

Лекція 5 . МЕТОДИ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ РИНКІВ

5.1. Метод нормованого розмаху Херста: можливості й недоліки.

5.2. Алгоритм послідовного R/S -аналізу часових рядів – ефективна модифікація методу нормованого розмаху Херсту.

5.3. Оцінка глибини пам'яті часового ряду на базі алгоритму послідовного R/S -аналізу

5.4. Приклад дослідження динаміки ціни на ринку золота (дорогоцінних металів) засобами фрактального аналізу

Метою фрактального аналізу будь-якого часового ряду є:

- виявлення наявності в ньому довгострокової пам'яті, оцінка її глибини;
- виявлення такої характеристики, як трендостійкість або такої оберненої до неї властивості, як «повернення до середнього частіше, ніж у випадковій поведінці ЧР» (часте реверсування спад-підйом);
- виявлення (періодичних) циклів, якщо такі є, або квазіциклів.

Для останніх в використовуються також терміни «дрібна квазіперіодичність» або «хаотичні цикли».

Знання перелічених фрактальних характеристик розглянутого ЧР надає аналітикові передпрогнозу інформацію, тобто дозволяє йому оцінити перспективність надійного прогнозування ЧР.

5.1. Метод нормованого розмаху Херста: можливості й недоліки

В літературі термін « R/S -аналіз ЧР» зустрічається під назвою «метод нормованого розмаху (НР) Херста». Позначимо його алгоритм A_I та наведемо короткий виклад його обчислювальної схеми.

Нехай розглядається ЧР

$$Z = \langle z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.1)$$

де m – кількість спостережень або рівнів, що складають цей ЧР.

Обчислювальна схема методу НР Херста включає наступні 7 етапів.

1⁰. Задамо цілочисельне значення величини кроку $\Delta \geq 1$ та сформуємо послідовність значень довжин відрізків, на які розбивається даний ЧР для кожної фіксованої довжини:

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_l, \quad (5.2)$$

де $n_{k+1} = n_k + \Delta$, $k = \overline{1, l-1}$ і максимальне значення індексу l визначається нерівністю $n_l \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Наступні нижче етапи 2⁰-6⁰ виконуються послідовно за зростанням індексу $k = 1, 2, \dots, l$.

Зауваження 5.1. Послідовність (5.2) сформована відповідно [2]. Інший підхід до її формування викладений в [3], де ця послідовність складається з усіх таких чисел $n_k \geq 10$, на кожне з яких довжина m даного ЧР Z ділиться без залишку (m кратно n_k , $k = \overline{1, l}$).

2⁰. Для чергового значення індексу k розглянутий ЧР Z розбивається на $r_k = \left\lceil \frac{m}{n_k} \right\rceil$ відрізків $Z_k^t = \langle z_j^t \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, $t = 1, 2, \dots, r_k$, де для будь-якого t відрізок Z_k^t визначається своїм першим елементом z_1^t , що у вихідному ЧР Z занумерований індексом $i = i_t = (t-1) \cdot n_k + 1$. Відзначимо, що в процесі розбиття ЧР Z на зазначені відрізки може утворитися залишок, довжина якого менше, ніж n_k . Цей залишок відкидаємо (відповідно [2]). Для кожного відрізка z_k^t обчислюється середнє значення

$$z^t = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} z_j^t, \quad t = \overline{1, r_k}.$$

3⁰. Для кожного відрізка Z_k^t , $t = \overline{1, r_k}$ при фіксованому $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ обчислюється ряд накопичених відхилень $X_{k,q}^t = \sum_{j=1}^q (z_j^t - z^t)$, $q = \overline{3, n_k}$, на базі яких знаходиться значення розмаху

$$R_k^t = \max_{1 \leq q \leq n_k} X_{k,q}^t - \min_{1 \leq q \leq n_k} X_{k,q}^t \quad (5.3)$$

для кожного $t = \overline{1, r_k}$.

4⁰. При фіксованому k для відрізка Z_k^t обчислюємо його стандартне відхилення

$$S_k^t = \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (z_j^t - z^t)^2 \right)^{0,5}$$

й нормуємо значення розмаху (5.3):

$$\left(\frac{R}{S} \right)_k^t = \left(\frac{R_k^t}{S_k^t} \right), \quad t = \overline{1, r_k}, \quad 1 \leq k \leq l. \quad (5.4)$$

5⁰. Для кожного фіксованого k обчислюємо середнє значення нормованих розмахів (3):

$$\left(\frac{R}{S} \right)_k = \frac{1}{r_k} \sum_{t=1}^{r_k} \left(\frac{R}{S} \right)_k^t, \quad 1 \leq k \leq l. \quad (5.5)$$

6⁰. На підставі отриманих середніх значень (5.5) для кожного $k = 1, 2, \dots, l$ обчислюємо для розглянутого ЧР Z логарифмічні координати (абсцису й ординату) точок, що становлять проміжний результат роботи алгоритму нормованого розмаху Херста:

$$x_k = \lg(n_k / 2), \quad y_k = \lg \left(\frac{R}{S} \right)_k, \quad k = \overline{1, l}. \quad (5.6)$$

7⁰. Використовуючи відомий метод найменших квадратів для множини точок з координатами (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, l$ виду (5.6), будуємо графік лінійної регресії. Нахил отриманої лінії регресії до осі абсцис дозволяє дістати усереднену оцінку показника Херста H для ЧР Z [207]. Чисельне значення $H(Z)$ цієї оцінки обчислюється як тангенс кута нахилу отриманої прямої.

Зауваження 5.2. Важливо відзначити, що отримана оцінка $H(Z)$ показника Херста відбиває саме середнє (для розглянутого ЧР Z у цілому) значення цього показника.

З'єднуючи відрізками сусідні точки в послідовності (5.6), одержимо представлену в логарифмічних координатах траєкторію нормованого розмаху розбиття даного ЧР Z , що надалі будемо називати терміном «траєкторія нормованого розмаху».

Якщо розглянутий ЧР Z має властивість циклічності, то йому властива довгострокова пам'ять, у силу чого деяка кількість початкових точок отриманої траєкторії нормованого розмаху утворюють чітко виражений лінійний тренд. При деякому значенні $k = k_0$ траєкторія нормованого розмаху досить різко змінює свій нахил, тобто в точці (x_{k_0}, y_{k_0}) траєкторія одержує значний за абсолютною величиною від'ємний приріст $\delta_k = y_{k+1} - y_k$. Появу цього нахилу називають зміною тренда або «зривом із тренда», маючи на увазі при цьому, що повернення до попереднього тренда не відбувається. При цьому мається на увазі, що в точці k_0 ефект «довгострокової пам'яті про початок розглянутого ЧР» дисипатує [3]. Інакше кажучи, зрив із тренда демонструє втрату пам'яті про початкові умови, а також сигналізує (можливо з лагом, тобто з деяким запізнюванням) про вичерпання циклу або квазіциклу, що міститься в початковому відрізку цього ЧР.

У теорії часових рядів під терміном «квазіцикл» («цикл») мається на увазі локально найбільший відрізок ЧР, що складається із двох частин таких, що елементи першої частини монотонно одержують додатні (від'ємні) прирости, а елементи другої частини монотонно одержують від'ємні (додатні) прирости. Наприклад, у відрізку 2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2 міститься квазіцикл

$$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle \quad (5.7)$$

довжини $l = 13$. У даному визначенні терміни «додатні» («від'ємні») можна розуміти як «невід'ємні» («недодатні»). При цьому «квазіцикл» називається терміном «цикл» у випадку, коли він регулярно повторюється на протязі розглянутого ЧР, зберігаючи свою конфігурацію.

Зауваження 5.3. У реальних процесах аналізу розглянутого ЧР представлено вище визначення квазіциклу не слід застосовувати формально. Так

при визначенні поняття «квазіцикл» може виявитися доцільним використання понять теорії нечітких множин. Практичний досвід, що накопичений у процесі фрактального аналізу конкретних ЧР свідчить, що це визначення має однозначний зміст у тому випадку, коли для розглянутого ЧР (5.1) прирости його елементів $\Delta_i = z_{i+1} - z_i$, $i = \overline{1, m-1}$ за абсолютною величиною однозначно перебільшують абсолютну величину похибки $\varepsilon > 0$ вихідних даних, що використовуються (чисельних значень рівнів z_i , $i = \overline{1, m}$).

Зауваження 5.4. Представлене вище визначення квазіциклу відображає локальну властивість ЧР. Останнє означає, що його не потрібно розглядати в контексті сформованої до теперішнього часу теорії економічних циклів, наприклад таких, як бізнес-цикли та ін.

Як відзначено в [3], алгоритм нормованого розмаху (НР) Херста не тільки виявляє періодичні або неперіодичні цикли, але також може оцінити середню довжину неперіодичних циклів. Але це твердження не можна віднести до всієї необмеженої різноманітності динаміки часових рядів, тобто воно є вірним лише для деякої частини нескінченної множини ЧР.

Приклад. Розглянемо такий ЧР (5.1), що складається з циклів, що не перетинаються, виду (5.7), тобто для $m = 299$ кожний з його відрізків Z^t , $t = \overline{1, 23}$ довжини $l = 13$ визначається значеннями свого першого індексу $i_t = 13(t-1) + j$, $j = 1, 2, \dots, 13$, $t = 1, 2, \dots, 23$ та представляє собою не що інше, як цикл (5.7). Визначений у такий спосіб ЧР (5.1) позначимо через Z^0 .

Для ЧР Z^0 сформуємо послідовність (5.2) довжин відрізків Z^t наступного вигляду

$$18, 23, \dots, n_k, n_k + 5, \dots, n_q, \quad q = 27 \quad (5.8)$$

і послідовно за зростанням індексу $k = 1, 2, \dots, q$ застосуємо описаний вище метод НР Херста 1^0-7^0 . Реалізуючи описані вище етапи 2^0-6^0 для кожного відрізка Z^t довжини з (5.8), одержимо представлену на рис. 5.1 траєкторію нормованого розмаху ЧР Z^0 . Реалізуючи заключний крок методу НР Херста, одержуємо графік лінійної регресії, що на рис. 5.1 представлений пунктирною лінією.

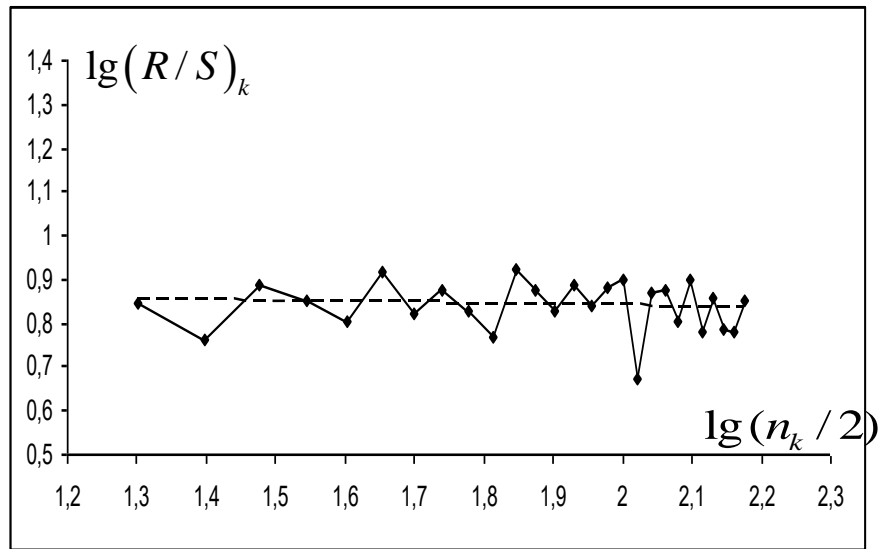


Рисунок 5.1. Траєкторія нормованого розмаху часового ряду Z^0

Зауваження 5.5. На підставі аналізу траєкторії на рис. 5.2 можна сформулювати наступні висновки.

По-перше, нахил отриманої лінії регресії є фактично нульовим, у силу чого не представляється можливим оцінити значення показника Херста H для розглянутого ЧР Z^0 .

По-друге, конфігурація розташування точок з координатами (5.5), а також обумовлена ними траєкторія нормованого розмаху та її лінія регресії фактично не виявляють інформації про цикли виду (5.6) розглянутого ЧР Z^0 .

Сформульований вище негативний результат застосування методу НР Херста до ЧР Z^0 обумовлений наступними властивостями цього ЧР: значення рівнів z_i у розглянутому ЧР Z^0 , а також співвідношення довжини його циклів $l = 13$ і кроку $\Delta = 5$ в послідовності (5.2) спеціально підібрані так, що величина розмаху (5.3) і відповідні значення стандартного відхилення S_k^t забезпечують такі значення нормованого розмаху (5.4), які зі збільшенням довжини відрізків n_k відтворюють регулярні з майже однією й тією ж амплітудою періодичні коливання відносно «майбутньої» лінії регресії, що одержується в результаті реалізації кроку 7⁰ алгоритму НР Херста. Важливо відзначити, що ця властивість ЧР Z^0 практично зберігається і в тому випадку, якщо його довжину m багаторазово збільшувати, наприклад, до $\sim 10^4$ і більше.

Із зауважень 5.2 і 5.5 випливає, що в загальному випадку описаний вище класичний метод НР Херста не завжди є достатнім для цілей фрактального аналізу [3] економічних ЧР. Виникає необхідність у методі, який би враховував та ліквідував недоліки методу НР Херста.

Про недостатність аналізу на основі використання методу НР Херста свідчать і багаточисельні спроби дослідників (зважаючи на те, що коефіцієнт Херста H представляє собою характеристику, усереднену по всьому ЧР) застосувати його для отримання диференційованих характеристик щодо досліджуваного ЧР. Опублікована ціла низка робіт, у яких використовується так звана локальна версія методу НР Херста. У процесі реалізації цієї версії робота описаних вище етапів $1^0 - 7^0$ повторюється для деяких достатньо довгих часових вікон. У випадку фрактального аналізу економічних часових рядів, наприклад, обирається довжина вікна, що дорівнює 1 рік (240 робочих днів), при цьому на кожному кроці вікно зміщується уздовж осі абсцис на 1 день.

З метою оцінки інформативності такого локального підходу до використання методу НР Херста розглянемо представлене на рис. 5.2 графічне зображення ЧР індексу S&P 500 (використана база даних відомих американських фондових індексів S&P 500 і DJIA; finance.yandex.ru) у період відомого краху 19 жовтня 1987 р. На рис. 5.3 представлена динаміка значень обчисленого для зазначеного ЧР локального коефіцієнту Херста, тобто графік значень H , що обчислені шляхом використання локальної версії методу НР Херста.

На підставі аналізу рис.5.2 і 5.3 можна стверджувати про істотно більшу інформативність динаміки зміни значень показника Херста порівняно з його значенням для всього ЧР. При цьому важливо відзначити, що розглянута динаміка характеризує певним чином як передкраховий відрізок ЧР, що представлено на рис.5.2, так і посткраховий відрізок цього ЧР (на рис. 5.2 і 5.3 ці відрізки стикуються в точці, що відзначена стрілкою).

Таким чином, необхідність розробки методу, який би забезпечував диференційовану оцінку динаміки, стає нагальною проблемою.

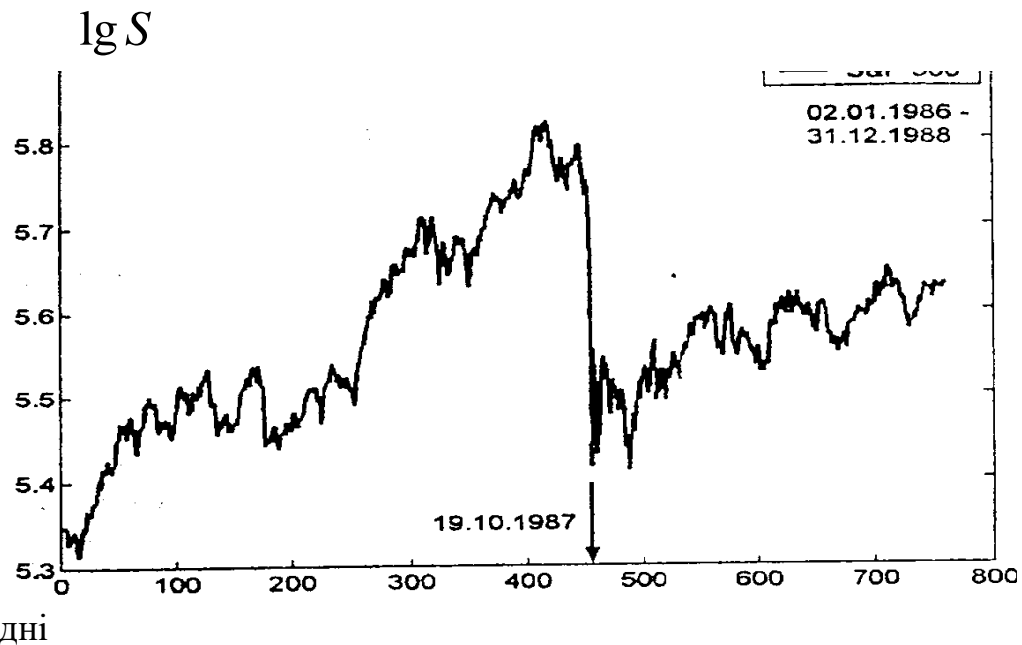


Рисунок 5.2. Залежність логарифма цінкових флуктуацій індексу *S & P 500* в період краху 19 жовтня 1987 р. На осі абсцис нанесений час у днях з 1986-1988 р.р.

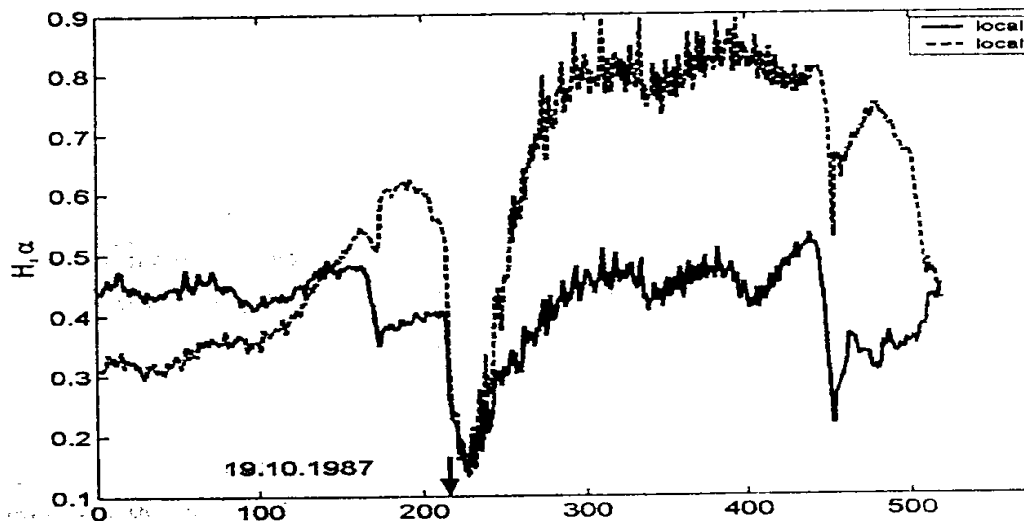


Рисунок 5.3. Поведінка локальних коефіцієнтів Херста й α [61] у період краху 19 жовтня 1987 р. При обчисленнях розмір вікна довжиною приблизно 1 рік (240 робочих днів) зміщується уздовж осі абсцис із кроком в один день

5.2 Алгоритм послідовного R/S -аналізу часових рядів – ефективна модифікація методу нормованого розмаху Херсту

В [1] запропонована модифікація методу нормованого розмаху Херста - новий алгоритм фрактального аналізу, що одержав назву «алгоритм послідовного R/S -аналізу». Перевага запропонованого алгоритму полягає в його здатності виявлення циклів (квазіциклів) у розглянутому ЧР а також обчислення нижньої оцінки глибини пам'яті (про початок цього ЧР).

Наведемо опис алгоритму послідовного R/S -аналізу – позначимо його алгоритм A_2 .

Нехай розглядається ЧР (5.1) :

$$Z = \langle z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

де m – кількість спостережень або рівнів, що становлять цей ЧР.

Алгоритм складається з наступних чотирьох етапів.

Етап 1. Для даного ЧР (5.1) розглядаємо його початкові відрізки

$Z_\tau = z_1, z_2, \dots, z_\tau$, обчислюємо їх поточне середнє $\bar{z}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} z_i$, $\tau = 3, 4, \dots, n$ і

знаходимо для кожного з них накопичене відхилення

$$X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^t (z_i - \bar{z}_\tau) \quad (5.9)$$

для всякого поточного індексу $t = 1, 2, \dots, \tau$.

Етап 2. Для кожного початкового відрізка Z_τ обчислюємо:

а) його розмах

$$R = R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X_{\tau,t} - \min_{1 \leq t \leq \tau} X_{\tau,t}, \quad (5.10)$$

б) стандартне відхилення

$$S = S(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^t (z_i - \bar{z}_\tau)^2 \right)^{0.5} \quad (5.11)$$

в) нормуємо значення розмаху за допомогою стандартного відхилення, тобто представляємо у вигляді дробу R/S :

$$\left(\frac{R}{S}\right)_\tau = \frac{R(\tau)}{S(\tau)}, \quad 3 \leq \tau \leq n \quad (5.12)$$

для кожного відрізка ЧР Z_τ ..

Етап 3. Будуємо H - траєкторію $H = H(\tau)$, $\tau = 3, 4, \dots, n$, координати точок якої (x_τ, y_τ) визначаються “емпіричним законом Херста” $H = H(\tau) = (\log(R(\tau)/S(\tau)))/\log(a\tau)$, у якому згідно [208] вважаємо $a = \frac{1}{2}$. Обчислюємо логарифмічні координати точок H - траєкторії: абсциси

$$x_\tau = \log(\tau/2), \quad \tau = 3, 4, \dots, n \quad (5.13)$$

і ординати

$$y_\tau = H(\tau) = (\log(R(\tau)/S(\tau)))/\log(\tau/2), \quad \tau = 3, 4, \dots, n. \quad (5.14)$$

Етап 4. Друга, так звана R/S - траєкторія розглянутого ЧР (5.1) представляється в логарифмічних координатах послідовністю точок (x_τ, y_τ^0) , де $x_\tau = \log(\tau/2)$, $y_\tau^0 = \log(R(\tau)/S(\tau))$. З'єднуючи відрізком сусідні точки (x_τ, y_τ^0) й $(x_{\tau+1}, y_{\tau+1}^0)$, $\tau = 3, 4, \dots, n-1$, одержуємо графічне представлення R/S - траєкторії.

Суть алгоритму A_2 послідовного R/S - аналізу полягає в послідовному нарощуванні H - траєкторії й R/S - траєкторії даного ЧР, що й визначило його назву.

Проілюструємо роботу алгоритму послідовного R/S - аналізу та його спроможність до виявлення циклів або квазіциклів, застосувавши його до тестового ЧР $Z^0 = \langle z_i \rangle$, $i = \overline{1, 299}$, що складається з 23 циклів (5.7), що не перетинаються, довжини $l = 13$.

Застосувавши алгоритм послідовного R/S - аналізу до описаного ЧР $Z^0 = \langle z_i \rangle$, $i = \overline{1, 299}$, на виході алгоритму A_3 одержимо представлені в логарифмічних координатах H - траєкторію й R/S - траєкторію, графічне зображення яких дано на рис. 5.4.

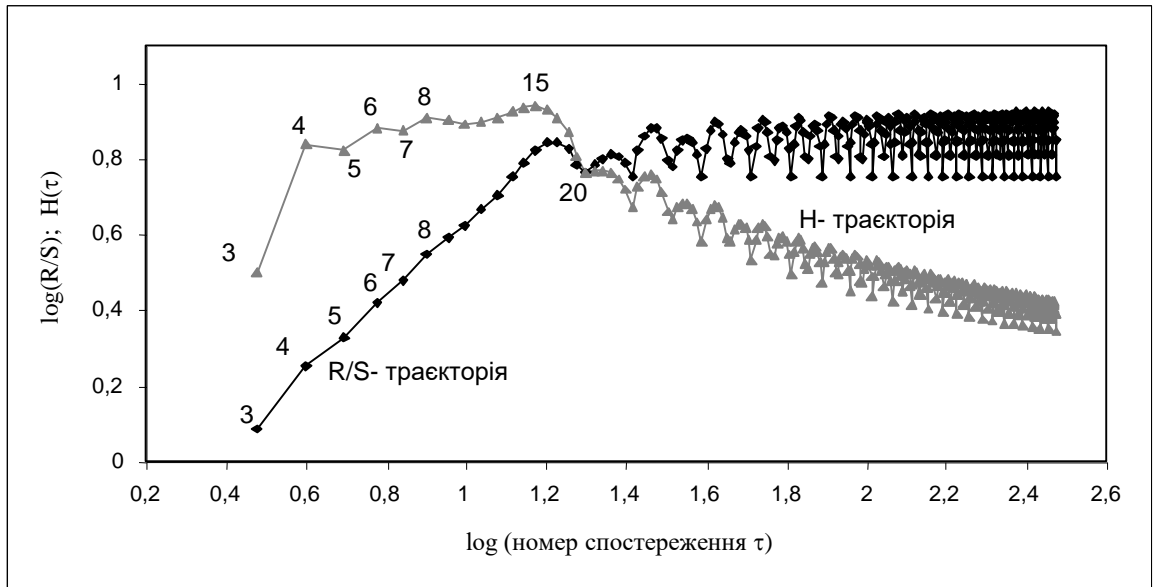


Рисунок 5.4. R/S - і H - траєкторії часового ряду Z^0

Як було зазначено вище, у випадку стандартного методу нормованого розмаху Херста, якщо розглянутому ЧР Z властива довгострокова пам'ять, то деяка кількість початкових точок отриманої траєкторії нормованого розмаху утворюють чітко виражений лінійний тренд. При деякому значенні $k = k_0$ траєкторія нормованого розмаху досить різко змінює свій нахил, тобто в точці (x_{k_0}, y_{k_0}) траєкторія одержує значний по абсолютній величині негативний приріст $\delta_k = y_{k+1} - y_k$, тобто має місце зрив із тренда (при цьому повернення до колишнього тренда не відбувається). При цьому вважається, що в точці k_0 ефект “довгострокової пам'яті про початок розглянутого ЧР” дисипатує.

У нашому випадку зрив із тренда демонструє втрату пам'яті про початкові умови, а також сигналізує (можливо з лагом, тобто з деяким запізненням) про вичерпання циклу або квазіциклу, що міститься в початковому відрізку цього ЧР.

На рис. 5.4 R/S - траєкторія демонструє вичерпання в даному ЧР Z^0 початкового циклу виду (5.7) тим, що в точці $\tau = 15$ цієї R/S - траєкторії відбувається зміна тренда («зрив із тренда») без повернення до початкового тренда наступних точок. Починаючи з цієї ж точки $\tau = 15$ H - траєкторія одержує від'ємні прирости, тобто в часовому ряді

$$H(\tau), \quad \tau = 3, 4, \dots, n \quad (5.15)$$

його рівні $H(15), H(16), \dots, H(19)$ одержують від'ємні прирости. Таким чином, R/S -траєкторія та H -траєкторія сигналізують про вичерпання початкового циклу (довжини $l=13$) з лагом або запізнюванням $\rho = 15 - l = 15 - 13 = 2$.

Зауваження 5.6. H -траєкторія або, що те ж саме, ЧР (5.15) одержує від'ємні прирости також у деяких «проміжних» точках, наприклад, у точках $\tau = 4$ і $\tau = 8$. Однак, у цих точках R/S -траєкторія фактично зберігає первісний тренд. Таким чином, вичерпання початкового циклу (квазіциклу) визначається наступною парою подій у відповідній точці τ : R/S -траєкторія змінює тренд і до нього не повертається; H -траєкторія одержує від'ємний приріст.

Зауваження 5.7. Точка $\tau = 7$ в даному ЧР Z^0 є початком другого за порядком циклу

$$\langle 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle \quad (5.16)$$

довжини $l = 14$. При цьому, якщо в початковому, тобто першому за порядком циклі перша частина є зростаючою, то в другому циклі його перша частина є такою, що спадає (вона складається з рівнів $\langle z_7, z_8, \dots, z_{13} \rangle = \langle 7, 6, \dots, 1 \rangle$), а друга частина – зростаючою (вона складається з рівнів $\langle z_{14}, z_{15}, \dots, z_{20} \rangle = \langle 1, 2, \dots, 7 \rangle$). На рис. 5.4 в R/S -траєкторії й H -траєкторії точка з номером $\tau = 20$ сигналізує про вичерпання вищевказаного другого за порядком циклу (5.16) тим, що в цій точці R/S -траєкторія демонструє зміну другого тренда (що складається з точок 16, 17, ..., 20), а для H -траєкторії в точці 20 попередні від'ємні прирости змінилися на позитивні.

Особливо відзначимо, що ряд Z^0 розглядається як «тестовий ЧР». У випадку реальних ЧР їх R/S -траєкторія та H -траєкторія сигналізують про вичерпання першого циклу (квазіциклу) не настільки чітко, як це представлено в зауваженні 5.6. Що стосується зауваження 5.7, то розпізнавання другого й наступного циклів (квазіциклів) може виявитися просто нездійсненним по цілому ряду причин, у тому числі таких, які відзначені в зауваженні 5.1.

Зауваження 5.8. Розглядаючи рис. 5.4 і досліджуючи представлені на ньому траєкторії, будемо дотримуватися твердження, що після закінчення довжини циклу (квазіциклу) втрачається пам'ять про початкові умови для розглянутого ЧР [207, 208], тобто втрачається довгострокова корельованість наступних спостережень стосовно початкового. Таким чином, говорячи про

нижню оцінку глибини пам'яті для розглянутого початкового відрізка даного ЧР, маємо на увазі довжину першого циклу (квазіциклу), що міститься в цьому відрізку та його початок збігається з початком цього відрізка.

5.3 Оцінка глибини пам'яті часового ряду на базі алгоритму послідовного R/S - аналізу

Алгоритм, що представляється, (позначимо його A_3), забезпечує одержання оцінки глибини пам'яті ЧР на базі використання алгоритму послідовного R/S -аналізу. Особливість результату полягає в тому, що одержана оцінка представляється у вигляді нечіткої множини.

Нехай розглядається ЧР (5.1)

$$Z = \langle z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Суть алгоритму послідовного R/S - аналізу, полягає в побудові H - і R/S - траєкторій даного ЧР, а потім визначення точки, у якій R/S - траєкторія демонструє вичерпання в даному ЧР Z початкового циклу. У цій точці відбувається зміна тренда («зрив із тренда») R/S - траєкторії без повернення до первісного тренда яких-небудь наступних точок. Починаючи з цієї ж точки H - траєкторія одержує від'ємні прирости.

При цьому додержуємося твердження, що після закінчення циклу (квазіциклу) втрачається пам'ять про початкові умови для розглянутого ЧР [207,208], тобто втрачається довгострокова корельованість наступних спостережень відносно початкового. Таким чином, як нижня оцінка глибини пам'яті для розглянутого ЧР приймається довжина першого циклу (квазіциклу), що визначається довжиною початкового відрізка, кінцями якого є точка початку ряду та отримана точка (зриву з тренда).

Обчислювальна схема алгоритму A_3 одержання нечіткої оцінки «глибини пам'яті ЧР у цілому» представляє собою послідовне багаторазове використання алгоритму A_2 послідовного R/S - аналізу для сімейства ЧР.

Робота цього алгоритму починається з формування на базі розглянутого ЧР Z сімейства $S(Z) = \{Z^r\}$, $r = 1, 2, \dots, m$, що складається з $m < n$ часових рядів $Z^r = \langle z_i^r \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n_r$, де ряд Z^r утворюється шляхом видалення першого

елементу z_1^{r-1} в ряді Z^{r-1} . Потужність $m = |S(Z)|$ сімейства $S(Z)$ визначається як найбільше значення індексу $r = m$ таке, що ряд Z^m ще має точку зміни тренда в його R/S -траєкторії. Подальше обчислення шуканої нечіткої оцінки глибини пам'яті ЧР Z здійснюється поетапно.

Еман 1. Формування на базі ЧР Z сімейства $S(Z) = \{Z^r\}$, $Z^r = \langle z_i^r \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n_r$, $r = 1, 2, \dots, m$, що складається з визначених вище m часових рядів Z^r . Вихідний ЧР Z також належить сімейству $S(Z)$, у якому йому привласнене значення індексу $r = 0$.

Еман 2 – послідовне застосування алгоритму A_2 послідовного R/S -аналізу до часових рядів із сімейства $S(Z)$. На виході етапу 2 одержуємо дані для формування нечіткої множини значень глибини пам'яті розглянутого ЧР.

Еман 3 - формування нечіткої множини значень глибини пам'яті розглянутого ЧР.

Наведемо більш докладно опис цього етапу.

Нехай для кожного ЧР $Z^r = \langle z_i^r \rangle$, $i = \overline{1, n_r}$, $r = \overline{1, m}$ у результаті застосування до нього алгоритму A_2 послідовного R/S - аналізу побудовані R/S - траєкторія і H - траєкторія, що визначають собою номер точки l_r , що представляє собою нижню оцінку глибини пам'яті про початок ЧР Z^r .

Введемо наступні позначення:

$N(l)$ – кількість усіх рядів Z^r із сімейства $S(Z)$, у кожного з яких номер точки зміни тренда l_r дорівнює числу l ;

$$l^0 = \min_{1 \leq r \leq m} l_r;$$

$$l' = \max_{1 \leq r \leq m} l_r;$$

$$m = \sum_{l=l^0}^{l'} N(l);$$

$$d(l) = \frac{N(l)}{m} \text{ – доля таких рядів у сімействі } S(Z) \text{ , у кожного з яких}$$

утрата пам'яті відбулася на глибині l ;

$L^0 = \{ l \}$ – множина носіїв, тобто множина значень номерів точок зміни тренда в рядах із сімейства $S(Z)$;

$\mu(l)$ – це значення функції приналежності «глибини l » нечіткій множини $L(Z)$.

Значення $\mu(l)$ пропорційні числам $d(l)$, $l \in L^0$. На виході етапу 2 вони знаходяться шляхом спеціального нормування значень долею $d(l)$ при виконанні нерівностей $\mu(l) < 1$ для всякого $l \in L(Z)$. Для цього спочатку з множини L^0 обирається максимальний елемент l^* , обумовлений рівністю

$$d(l^*) = \max_{l \in L^0} d(l).$$

Після цього експертним шляхом визначається значення $\mu(l)$ функції приналежності елементу l^* множини L^0 . Далі для інших елементів $l \in L^0$ обчислюються значення функції приналежності за формулою

$$\mu(l) = \frac{d(l)}{d(l^*)} \cdot \mu(l^*).$$

Нечітка множина «глибини пам'яті для ЧР Z у цілому», (позначимо її через $L(Z)$) формується шляхом попарного об'єднання в пари елементів $l \in L^0$ та відповідного йому значення $\mu(l)$ функції приналежності, тобто

$$L(Z) = \{ (l, \mu(l)), l \in L^0 \} \quad (5.17)$$

На підставі аналізу розподілу значень функції приналежності $\mu(l)$, $l \in L^0$, які називаються ступенями приналежності, можна виділити так звані характерні або, іншими словами, безумовно значимі ступені (наприклад, $\mu(l) > 0,5$) та значення (наприклад, $\mu(l) \leq 0,1$), які можна вважати нехарактерними. Значення глибини пам'яті $l \in L^0$, яким відповідають значимі ступені, будемо також називати значимими, їх множину позначимо $L_{\text{с}}$. Використавши процедуру дефазифікації для виділених значимих ступенів $\mu(l)$, та, за необхідністю, округляючи обчислене значення до найближчого цілого, обчислимо центр ваги у множині їх значень глибини пам'яті

$$l_{ЦТ} = \left[\left(\sum_{l \in L_{3H}} l \cdot \mu(l) \right) / \left(\sum_{l \in L_{3H}} \mu(l) \right) \right]. \quad (5.18)$$

На підставі отриманої чисельної оцінки характеристики, що відноситься до глибини пам'яті усього ЧР Z в цілому, можна стверджувати про існування деякої закономірності, що властива динаміці розглянутого ЧР. Інтерпретація цієї закономірності в термінах поняття «глибина пам'яті ЧР» представляється в такий спосіб: якщо послідовно розглядати рівні z_i даного ЧР Z , то значення кожного з них в основному (тобто істотно) визначається попереднім відрізком довжини $l_{ЦТ}$, а саме, значеннями рівнів $z_{i-l_{ЦТ}}, \dots, z_{i-2}, z_{i-1}$. Рівень типовості $\tau(Z)$, з яким виявляється вказана вище закономірність, можна оцінювати якісно (лінгвістичними змінними виду «високий», «середній» і «низький») чи кількісно, використовуючи формулу

$$\tau(Z) = \left(\sum_{l \in L_{3H}} \mu(l) \right) / \left(\sum_{l \in L_0} \mu(l) \right).$$

Наприклад, числова оцінка $\tau(Z) \approx 0,9$ відноситься до якісної оцінки «високий».

Таким чином, отримана передпрогнозна інформація полягає в тому, що розглянутому ЧР Z притаманна властивість трендостійкості протягом відрізка часу $l_{ЦТ}$ в середньому. В залежності від значення $l_{ЦТ}$ останнє твердження в контексті передпрогнозного аналізу означає гарні передумови для побудови достатньо надійного прогнозування цього ЧР у межах горизонту прогнозування $l_{ЦТ}$.

Рекомендації щодо горизонту прогнозу (позначимо його h) можна уточнити, якщо використати ще одну характеристику НМ $L(Z)$ глибини пам'яті для ЧР Z у цілому. Виділимо в ній значення глибини пам'яті (позначимо його $l_{f\zeta}$), що має найбільше значення функції приналежності $\mu(l)$ глибини l нечіткій множини $L(Z)$:

$$\mu(l_{H3}) = \max_{l \in L^0} \mu(l).$$

Тоді задовільна точність прогнозу забезпечується у випадку, коли горизонт прогнозу знаходиться в проміжку між центром тяжіння $l_{ЦТ}$ та значенням глибини пам'яті $l_{НЗ}$: $l^* \leq h \leq l^{**}$, $l^*, l^{**} \in \{l_{ЦТ}, l_{НЗ}\}$, $l^* \leq l^{**}$.

5.4. Приклад дослідження динаміки ціни на ринку золота (дорогоцінних металів) засобами фрактального аналізу

Розглянемо ЧР $Z = \{z_i, i = \overline{1, n}\}$ поденних цін на золото за період з січня 2002 р. по березень 2008 р. за даними лондонського фіксингу (в USD за тр.унцію) [4] (рис. 5.5).

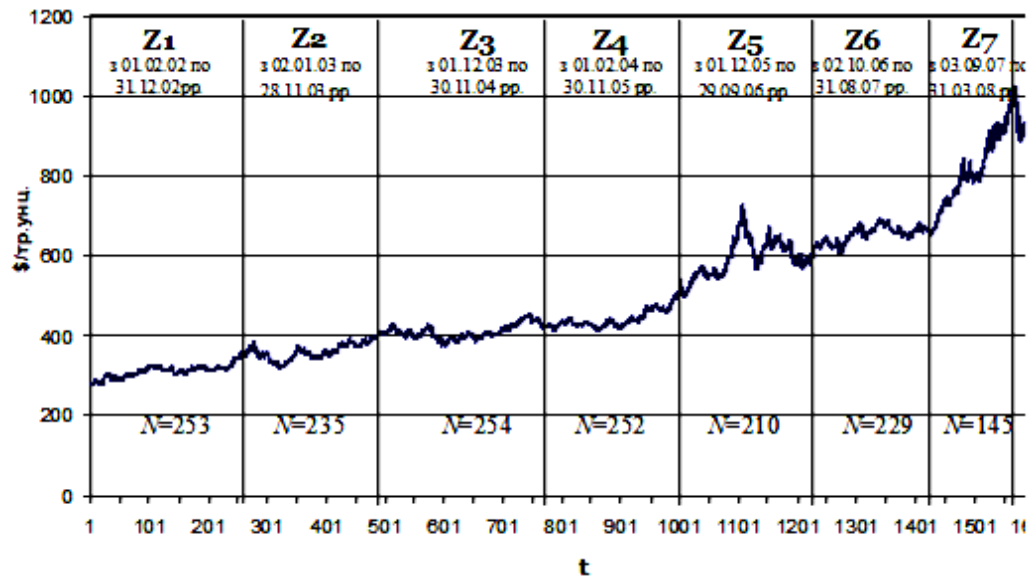


Рисунок 5.5 – Динаміка світових цін на золото (поденно) за період з січня 2002 р. по березень 2008 р.

Для отримання диференційованих характеристик застосуємо до ЧР Z модифікований метод фрактального аналізу - алгоритм послідовного R/S -аналізу.

Для дослідження вихідний ЧР Z розбито на 7 відрізків ($Z_1 - Z_7$), графіки яких представлено на рис. 5.6. У кожного з цих відрізків часового ряду був видалений тренд. Графіки відрізків ЧР $Z_1 - Z_7$ з видаленим трендом (подалі будемо говорити «без тренду») представлено на рис. 5.7.

Розглянемо значення показника Херста, що отримано в результаті розрахунків за стандартним R/S -аналізом – за методом нормованого розмаху Херста, які представлено у табл. 5.1.

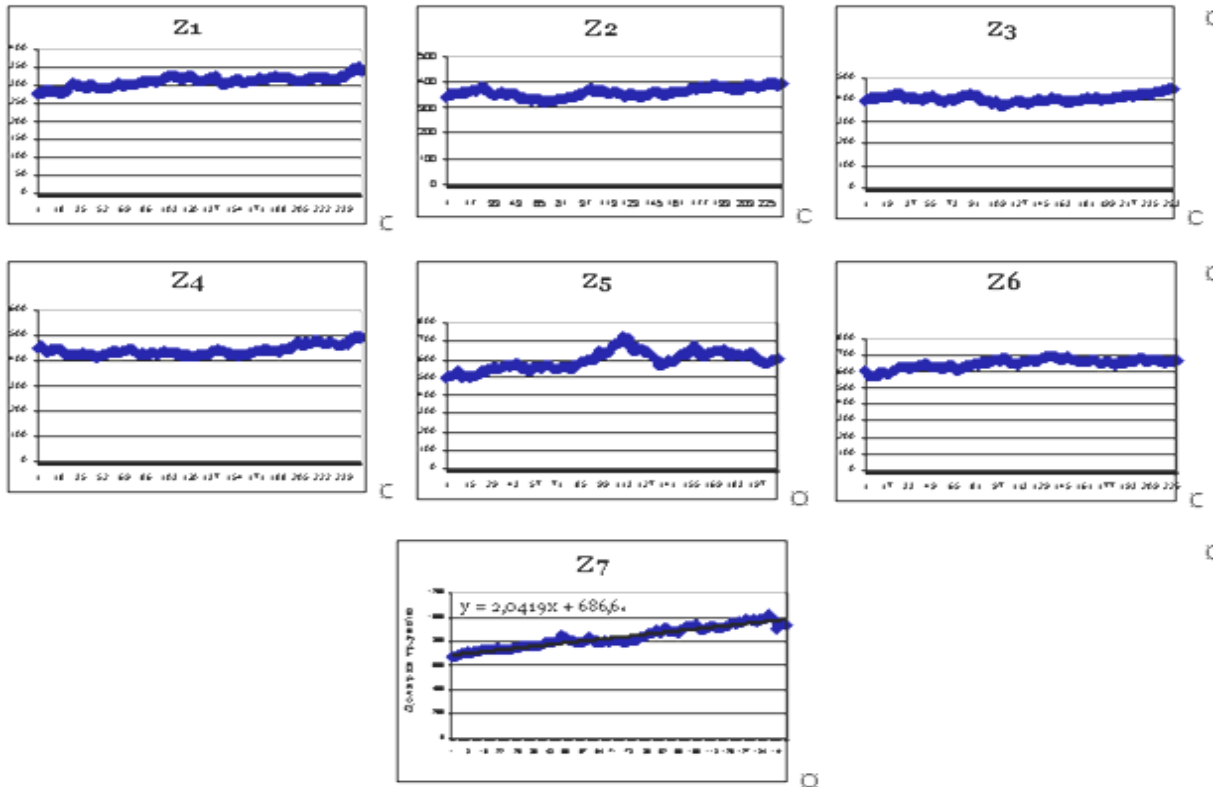


Рисунок 5.6 - Графіки відрізків $Z_1 - Z_7$ ЧР Z ціни на золото

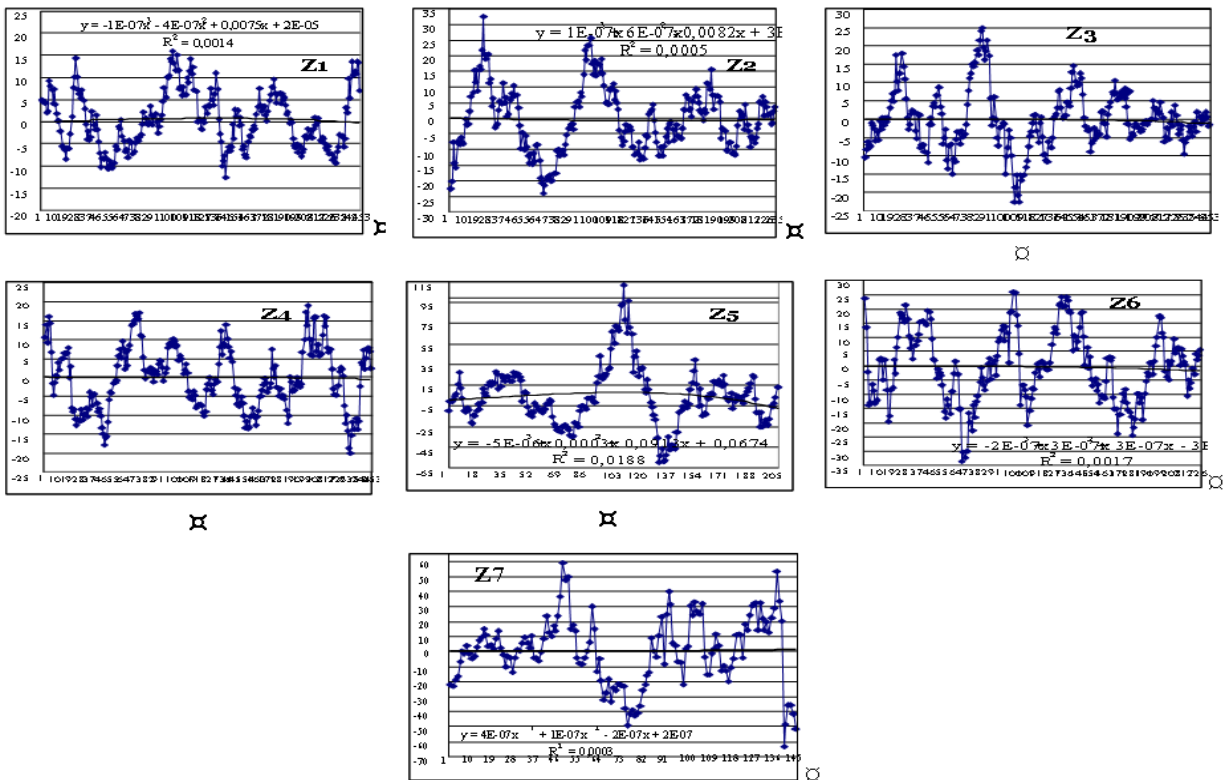


Рисунок 5.7 - Графіки відрізків $Z_1 - Z_7$ з видаленим трендом ЧР Z ціни на золото

Таблиця 5.1 – Зведені результати стандартного R/S – аналізу для динаміки ЧР Z ціни на золото та його відрізків $Z_1 - Z_7$.

Відрізок часового ряду	Показник Херста H ЧР з трендом	H перемішане з трендом	Показник Херста H ЧР без тренду	H перемішане без тренду
Z	0,961	0,561	0,738	0,575
Z_1	0,935	0,566	0,855	0,582
Z_2	0,907	0,580	0,863	0,583
Z_3	0,888	0,542	0,821	0,572
Z_4	0,885	0,557	0,865	0,600
Z_5	0,922	0,548	0,875	0,575
Z_6	0,930	0,530	0,841	0,555
Z_7	0,927	0,558	0,838	0,592

З табл. 5.1 видно, що ЧР Z та всі його відрізки $Z_1 - Z_7$ мають властивість трендостійкості ($H \in [0,885; 0,961]$ - для вихідних ЧР та $H \in [0,738; 0,875]$ - для ЧР з видаленим трендом), а тому мають довгострокову пам'ять. Це підтверджують результати тесту на перемішування ($H_{перем} \in [0,530; 0,600]$ - для всіх ЧР). Видалення тренду, природно, погіршує прояв трендостійкості. Зменшення показника Херста для відрізків $Z_1 - Z_7$ ЧР Z не перевищує 0,089, що за умови припущення відносно деякого завищення значень при $0,5 < H < 1$ можна розглядати як похибку. Значне зниження показника Херста для ЧР Z (на 0,223) та непропорційне зменшення для відрізків $Z_1 - Z_7$ можна пояснити видом тренду (квадратичного), який було видалено.

На основі результатів застосування модифікації фрактального аналізу – методу послідовного R/S – аналізу побудуємо нечітку множину глибини пам'яті та центр тяжіння для кожного відрізка $Z_1 - Z_7$ ЧР ціни на золото та для часового ряду Z в цілому. Зведені результати фрактального аналізу представлені в табл. 5.2.

Як видно з табл. 5.2 показник історичної волатильності σ_{icm} відрізків ЧР природно пов'язаний із розмахом значень ЧР: за умови трендостійкості великий розмах значень ЧР досягається за рахунок їх стрімких змін, що збільшує значення

Таблиця 5.2 – Зведені результати послідовного R/S – аналізу для динаміки ЧР Z ціни на золото та його відрізків $Z_1 - Z_7$.

Відрізок часового ряду	H	Довжина ЧР n	max	min	Розмах	$l_{ЦТ}$	$l_{ЧЗ}$	Історична волатильність $\sigma_{icm}, \%$
Z	0,961	1483	1023,5	277,8	745,7	18,08	10	1,21
Z1	0,935	253	348,5	277,8	70,7	16,97	9	0,71
Z2	0,907	235	398,1	319,75	78,35	17,89	7	1,25
Z3	0,888	254	452	373,5	78,5	15,94	7	0,83
Z4	0,885	252	497,3	411,5	85,8	15,38	6	0,59
Z5	0,922	209	725,75	494,4	231,35	18,15	8	2,67
Z6	0,930	229	691	568,25	122,75	18,59	9	0,79
Z7	0,927	145	1023,5	672,75	350,75	18,24	10	2,42

історичної волатильності. На відміну від значення історичної волатильності середня характеристика глибини пам'яті - $l_{ЦТ}$ (центр тяжіння нечіткої множини пам'яті ЧР) для всіх відрізків майже постійна. Це підтверджує фрактальну природу ЧР Z ціни на золото. Нагадаємо, розглядається ЧР поденних цін на золото. Оскільки центр тяжіння нечіткої множини пам'яті ЧР $Z_1 - Z_7$ дорівнює від 15 до 18 днів, то це означає, що в середньому на прийняття рішень на ринку золота інформація впливає на протязі 2,5 – 3 тижнів. Проте найчастіше значення інформації губиться вже на початку або в середині нового тижня.

Типові для ЧР $Z_1 - Z_7$ R/S -траєкторія та H - траєкторія (що належать ЧР Z_7) представлено на рис. 5.8.

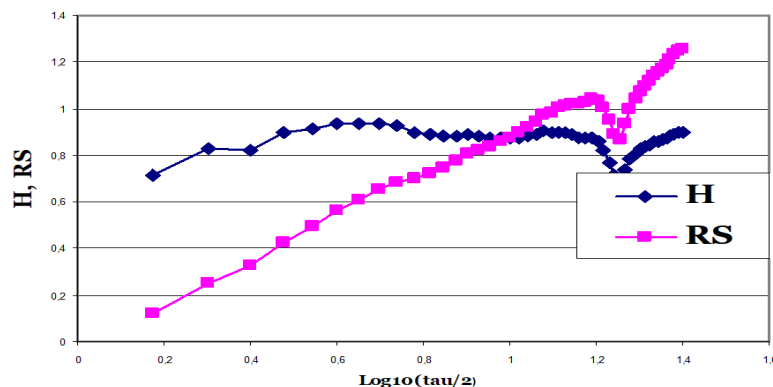


Рисунок 5.8 - R/S -траєкторія та H - траєкторія ЧР Z_7

Приклад нечіткої множини глибини пам'яті ЧР Z_7 представлено на рис. 5.9.

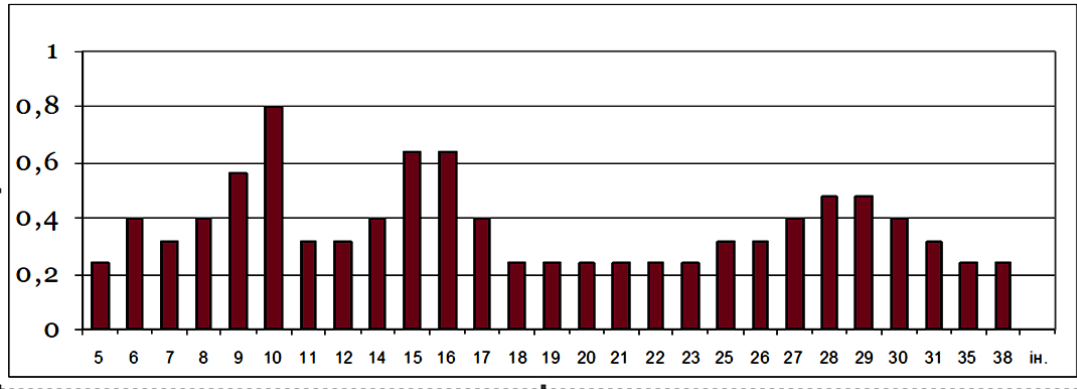


Рисунок 5.9 – Гістограма нечіткої множини пам'яті $L(Z_7)$ відрізка ЧР Z_7 ціни на золото, $l_{цт} = 18,24$, $l_{чз} = 10$.

На рис. 5.10 представлена динаміка вичерпання глибини пам'яті (б) про початок ряду із сімейства $Z^r \in S(Z_7)$, що отримана в результаті застосування алгоритму послідовного R/S - аналізу до (а) вихідного ЧР Z_7 для $r = \overline{1,102}$, та аналогічна динаміка вичерпання глибини пам'яті про початок (відрізка) ряду (г) для ЧР Z_7^i (в) (з видаленим трендом) для $r = \overline{1,102}$.

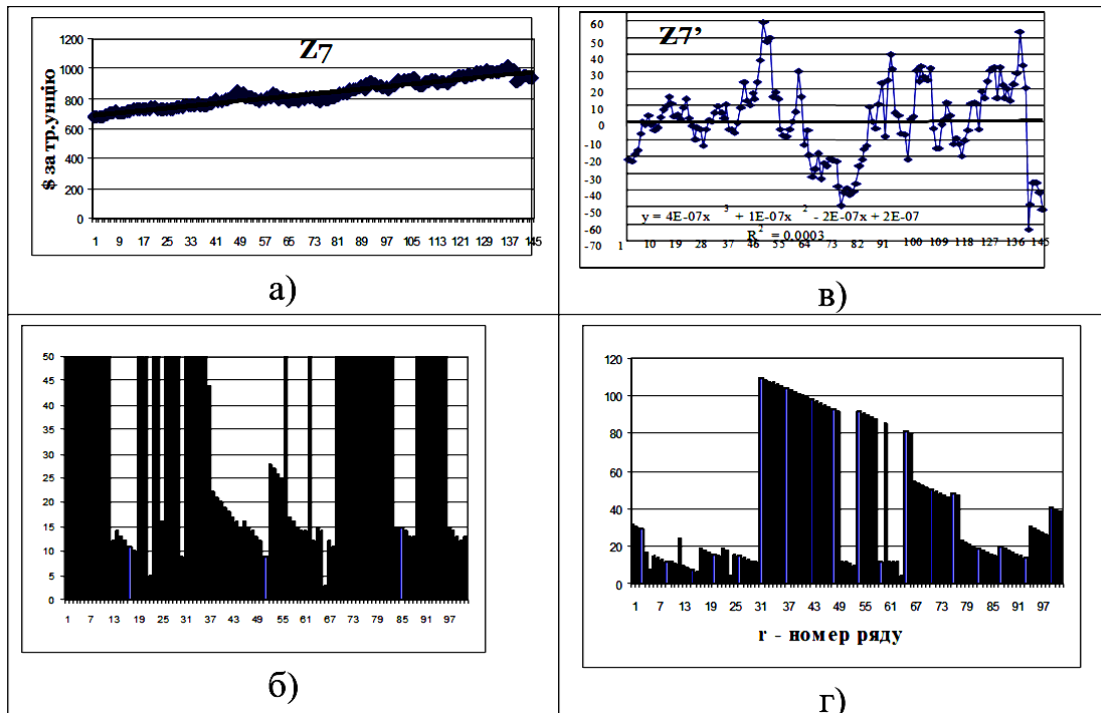


Рисунок 5.10 - а) ЧР Z_7 ; б) графічне представлення динаміки вичерпання глибини пам'яті про початок ряду сімейства $Z^r \in S(Z_7)$ для $r = \overline{1,102}$,

в) ЧР Z'_7 (з видаленим трендом); г) динаміка вичерпання глибини пам'яті про початок ряду сімейства $Z^r \in S(Z'_7)$ для $r = \overline{1,102}$

Максимальні та мінімальні рівні динаміки вичерпання пам'яті про початок ряду сигналізують про зміну знаку приросту $z_{i+1} - z_i$ значень ряду на протилежний.

Визначення нечітких множин пам'яті $L(Z_k)$, $k = \overline{1,7}$ відрізків $Z_1 - Z_7$ ЧР Z та отриманих в результаті процедури дефазифікації відповідних їм значень $l_{цт}$ (центра тяжіння НМ) і $l_{цз}$ (значення глибини пам'яті, що зустрічається найчастіше) надає інформацію для визначення параметрів методу прогнозування.

У даному випадку величину глибини (тобто горизонту) прогнозу рекомендовано обирати в проміжку, що не перевищує значення центра тяжіння та значення глибини пам'яті, яке найчастіше зустрічається в нечіткій множині глибини пам'яті: $h < l^* \leq l^{**}$, $l^* \leq l^{**}$, $l^*, l^{**} \in \{l_{цт}, l_{цз}\}$. Чим більше відрізняються значення $l_{цт}$ та $l_{цз}$, тим менше можна довіряти результату прогнозування. Для відрізків ЧР Z , що досліджувалися, різниця між центром тяжіння та значенням глибини пам'яті, яке зустрічається найчастіше в нечіткій множині глибини пам'яті, найбільша для відрізка Z_5 . Зауважимо, що цьому ж відрізку відповідає найбільше значення показника історичної волатильності σ_{icm} .

У результаті дослідження ЧР цін на золото ми дійшли висновку, що даний ЧР Z , як і кожен з його відрізків $Z'_1 - Z'_7$ мають довгострокову пам'ять та отримали її диференційовані щодо всього ряду характеристики у вигляді нечіткої множини та чисельних оцінок, які безпосередньо можуть бути використані для визначення параметрів методу прогнозування (наприклад, для оцінки горизонту прогнозу тощо).

Виявлення фрактальної природи ринку дорогоцінних металів суперечить гіпотезі ефективного ринку, остаточною формалізація якої належить Фаме та всім кількісним моделям, які з неї випливають. До них відносяться цінова модель Блека-Шоулса, арбітражна цінова теорія (АРТ) Росса та інші чисельні моделі, які передбачають нормальний розподіл та/або скінченну дисперсію. Наявність статистики Херста в ЧР ціни на золото негативно впливає на результати застосування економетричних методів. Ефект довгострокової пам'яті знецінює економетричні моделі та пояснює незадовільні результати прогнозування на їх

базі. Тому висновком з цього впливає необхідність вибору таких моделей і методів прогнозування, у яких «заважаючий» (у зазначеному вище сенсі) фактор довгострокової пам'яті стає таким, що «допомагає». До такого інструментарію прогнозування належить група методів, що базуються на моделі клітинного автомату, а також гібридизація методів: фазового аналізу, клітинного автомата, генетичного алгоритму, нейронної мережі, елементів статистичних методів.

Література:

1. Максишко Н. К. Моделювання економіки методами дискретної нелінійної динаміки : монографія. Запоріжжя : Поліграф, 2009. 416 с.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000. 333 с.
3. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-Трейдинг, 2004. 304 с.
4. Сайт The London Bullion Market Association (LBMA). URL : <http://www.bullion.ru/prices/fixes/>