Спорудження нових будівель при проведенні реконструкції міських територій в умовах щільної забудови пов'язано з проблемами впливу на напружено-деформований стан як конструкцій укріплення ґрунтових масивів, так і основ і фундаментів прилеглої забудови, що вимагає всебічного дослідження та ретельного проектування огороджувальних конструкцій з урахуванням взаємодії з неоднорідним ґрунтовим півпростором на основі вдосконалення існуючої математичної моделі ґрунту з урахуванням складних геологічних умов, включень укріплень та споруд оточуючої забудови.

У даній науковій роботі розробляється методологія дослідження впливу інженерної підготовки території, а саме взаємодії огороджувальних захисних споруд з ґрунтовим півпростором в надграничному стані з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності в постановці завдання, при реалізації еволюції складного завантаження з урахуванням активної і пасивної складових навантаження і ефекту розвантаження ґрунтового півпростору. В основі теорії — співвідношення нелінійної механіки ґрунтів, нелінійної теорії пружності і пластичності, методів нелінійного програмування і методу скінченних елементів.

В основу роботи покладено ідеї узагальнення залежностей механіки ґрунтів, що дозволить більш обґрунтовано визначати величину напружено-деформованого стану складного комбінованого півпростору, зокрема, взаємодії ґрунтових основ з огороджувальними конструкціями укріплень, фундаментів прилеглих будинків і всього комплексу споруд навколишньої забудови.

Проведення аналізу ступеня впливу нового будівництва на стан основ суміжних існуючих будівель та споруд з метою отримання достовірних результатів пов'язане з необхідністю вирішення складної наукової задачі методами механіки суцільного середовища в самому загальному підході. Вирішення цієї проблемної задачі пов'язане з розробкою певної ***теорії***, в основу якої покладено узагальнення залежностей нелінійної механіки грунтів, нелінійної теорії пружності і пластичності, з підключенням апарату нелінійного програмування, і взаємодії твердих деформівних тіл з неоднорідними грунтовими масивами, для отримання закономірностей, які дозволяють більш обгрунтовано визначати величину напружено деформованого стану огороджуючих конструкцій, основ і фундаментів прилеглої забудови, в залежності від неоднорідності грунтової основи.

У зв'язку з цим, основною проблемою є створення теорії аналізу стійкості ділянок міської території при реконструкції в умовах щільної забудови для можливості проведення подальших досліджень зони її впливу, для отримання більш обґрунтованих результатів чисельних досліджень, для аналізу необхідних заходів укріплень грунтових масивів, проектування огороджуючих конструкцій, і для проведення безпечної реконструкції територій в умовах щільної забудови,на основі законів нелінійної механіки грунтів, нелінійної теорії пружності і пластичності, з підключенням апарату нелінійного програмування, і взаємодії твердих деформівних тіл з неоднорідними грунтовими масивами, на основі вдосконалення існуючої математичної моделі грунтових масивів, що знаходяться у взаємодії зі спорудами прилеглої забудови, з урахуванням їх різних фізико-механічних характеристик і просторових структур, які істотно впливають на напружено-деформований стан як конструкцій укріплення грунтових масивів, основ і фундаментів прилеглих будівель і споруд, так і збереження існуючої прилеглої забудови вцілому, а також прогнозування можливих наслідків, що на сьогодні є актуальною проблемою сучасного містобудування і територіального планування.

Теоретичні основи запропонованої методології аналізу стійкості ділянок міської території при реконструкції в умовах щільної забудови полягають у побудові співвідношень напружено деформованого стану розрахункової області з позицій механіки деформованого твердого тіла, із застосуванням алгоритмів розв'язання задач теорії пружності, пластичності та повзучості, з побудовою універсальних розрахункових моделей для грунтових масивів, які перебувають у взаємодії з елементами огороджувальних конструкцій, будівлями і спорудами прилеглої забудови, і подальшим ефективним чисельним методам їх комп'ютерної реалізації.

Створення достовірної розрахункової моделі ґрунтової основи, яка б забезпечувала достатню відповідність між результатами розрахунку і дійсністю, – все ще є однією з найважливіших проблем будівництва. Сучасні методи розрахунку основ в механіці ґрунтів дозволяють оцінити лише їх порядок. Використання в якості розрахункового тиску граничної величини, яка відповідає кінцю (зламу) лінійної ділянки графіка "навантаження – осідання" призводить, як правило, до прийняття не завжди економічно доцільних рішень. За межами класичної (лінійної) механіки ґрунтів залишається неврахованої велика область досліджень пластичних деформацій. Виникає необхідність розробки більш досконалих методів розрахунку, які враховують дійсну схему роботи конструкцій, фундаментів і основ, враховуючи реальні нелінійні властивості ґрунтових основ. Актуальною залишається задача розробки математичної моделі розрахунку опору паль з метою підвищення достовірності та надійності проектних рішень шляхом врахування геометричної та фізичної нелінійності роботи основ, явищ ділатансії у них і уточнення критеріїв граничного стану ґрунтів.

Задача стійкості ґрунтових основ міської території при урахуванні граничного стану рівноваги півпростору полягає у розрахунку огороджувальних конструкцій глибоких котлованів значної довжини, та може розглядатися, як задача про нескінченно довгу підпірну стінку при умові, що навантаження не змінюється уздовж вісі $Z^{1'}$ глобальної системи координат $OZ^{1'}Z^{2'}Z^{3'}$ (рис.3.1). У таких задачах деформації відбуваються тільки у площині $OZ^{2'}Z^{3'}$ і вони відносяться до плоских задач теорії пружності. У даній роботі розглядається плоска задача (задача про плоску деформацію) нелінійної теорії пружності про взаємодію конструкцій укріплення з ґрунтовим півпростором. У загальному випадку при складних навантаженнях для анізотропного багатошарового ґрунтового масиву поставлена задача не має замкнутих, тобто аналітичних розв'язків, тому у запропонованій методиці на основі розвитку теоретичних співвідношень планується використовувати один із найбільш ефективних чисельних методів – метод скінченних елементів (МСЕ).

У постановці задачі передбачається дискретне моделювання ділянок міських територій в процесі проведення їх реконструкції з улаштуванням конструкцій укріплення глибоких котлованів під нове будівництво, з урахуванням існуючої забудови, та складних інженерно-геологічних умов, а саме суттєво неоднорідних шарів ґрунту, наявності твердих вкраплень (на декілька порядків перевищуючих за жорсткістю шари ґрунтового масиву), які моделюють елементи огороджувальних конструкцій, фундаментів оточуючої забудови, а також анкеруючих пристроїв, що обумовлює наявність концентрацій напружень на границях елементів вкраплень і шарів ґрунту. Як наслідок, у пограничному з вкрапленням шарі вимагається утворювати згущення сіткової області з необхідністю дослідження розрахункової моделі півпростору у першому граничному стані відповідно до нелінійної механіки ґрунтів. Отже виникає необхідність враховувати локальні втрати стійкості при наявності значних переміщень і суцільного розвитку у локальних зонах зсувних пластичних деформації. Таким чином розглядається задача плоскої деформації неоднорідного анізотропного півпростору з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності у постановці задачі.

Зазначений підхід передбачає використання нелінійної теорії пружності та пластичності з урахуванням положень теорії у приростах, тобто процес деформування масиву наводиться у вигляді послідовності рівноважних станів. У загальному випадку цей напрям можна представити процесом деформування нелінійно-пружного тіла, який математично описується вектор-функцією:

$$\vec{R} = \vec{R}\left(x^1, x^2, x^3; \tau\right), \tag{3.1}$$

де x^i – матеріальні координати частки середовища; τ – час; $\vec{R}$ – безперервна, диференційована необхідну кількість разів вектор-функція, за допомогою якої визначається актуальна конфігурація суцільного середовища (деформований стан) [76].

Рівноважний стан суцільного середовища може бути описаний рухом фіксованої частки $P\left(x^i\right)$ у відповідній конфігурації у фіксований момент часу t. У зв'язку з таким формулюванням процесу руху масиву вводяться поняття фіксованих конфігурацій нелінійно-деформованого тіла $C^0\left(\tau = 0\right)$, $C^t\left(\tau = t\right)$, $C^{t+\Delta t}\left(\tau = t + \Delta t\right)$ у відповідні моменти часу, які описуються відповідно вектор-функціями $\overset{0}{r}\left(C^0\right), \vec{r}$ і $R\left(C^{t+\Delta t}\right)$ (рис. 3.1).

На основі кінематичного рівняння руху (3.1) визначається гладке відображення актуальної конфігурації деформівного тіла в момент "$t + \Delta t$" на область в евклідовому просторі ε^3, яка визначається завданням області змінювання матеріальних координат, тобто положення точки $P\left(x^i\right)$ визначається радіусами-векторами $\overset{0}{r}, \vec{r}, \vec{R}$, початок яких фіксований в єдиній (глобальній) декартовій системі координат $O\, z^{1'} z^{2'} z^{3'}$ (рис. 3.1). Таким чином, в якості системи відліку вводиться криволінійна система координат – x^i (лагранжеві змінні (x^i, t) у момент $\tau = t$, конфігурація C^t) з векторним базисом:

$$\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial x^i \, . \tag{3.2}$$

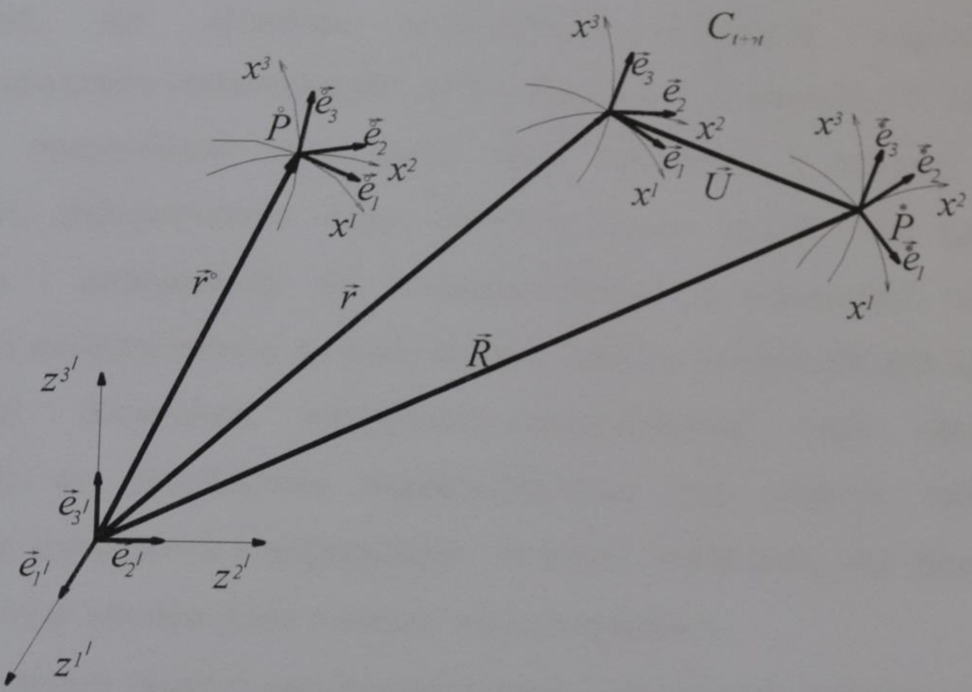

Рис. 3.1. Системи координат рівноваги комбінованого півпростору.

В умовах великих деформацій стан та процеси, які відбуваються в системі "неоднорідний ґрунтовий півпростір – огороджувальні конструкції укріплень – елементи оточуючих споруд", можуть бути описаними за допомогою енергетичного способу на основі використання функції стану, яка відповідає зв'язку приростів напружень і деформацій відповідно до узагальненого закону Гука і визначається рівнянням:

$$\delta U = d\sigma^{ij} \delta d\gamma_{ij} \, . \tag{3.3}$$

Закон стану полягає у встановленому зв'язку між напруженнями та деформаціями суцільного середовища та може бути визначеним через виразу питомої енергії деформації. У роботі використовується один з методів нелінійної теорії, коли відомий довільний стан рівноваги обирається в якості початкового для відліку приростів скінченних напружень і деформацій, які відповідають приростам зовнішніх впливів. На основі цього використовується вираз варіації питомої енергії деформації в інваріантній формі відносно будь-якого початкового базису з використанням лінеаризованих співвідношень зв'язку між приростами напружень і деформацій, що дозволяє визначити інтегральну характеристику напруженого стану неоднорідного суцільного середовища [76, 77, 78].

Цей напружений стан може бути описаний у вигляді еволюції нелінійного деформування через співвідношення зв'язку між приростами напружень і деформацій, які встановлюються в результаті попередньо проведених експериментів на відповідних зразках матеріалів для однорідних деформацій. Загальний напружено-деформований стан може бути визначений як інтегральна характеристика, яка описує зв'язок між приростами напружень і деформацій, та яка є первісною від функції (3.3), якщо вона буде використана в якості підінтегральної.

При такому підході використовується ідеалізована модель матеріалу, і не завжди підінтегральна функція визначальних рівнянь у приростах є повним диференціалом для функціонала, представленого у вигляді:

$$\hat{\tau}\left(\vec{R}(\vec{r},\tau),t\right)=\tau\left(\nabla\vec{R}(\vec{r},\tau),\nabla\nabla\vec{R}(\vec{r},\tau),\ldots,\right) \tag{3.4}$$

з використанням тензор-градієнтів вищого порядку.

Також при формулюванні рівнянь зв'язку приростів напружень і приростів деформацій, необхідно виконання перевірки співвідношень на задоволення необхідних і достатніх умов повноти підінтегральних функцій у визначальних рівняннях, що забезпечить незалежність інтегрального закону стану від шляху інтегрування.

Процес деформування нелінійно-пружного тіла математично описується вектор-функцією (3.1), тензор напружень для однорідних суцільних середовищ представлений функціоналом (3.4), а аргумент часу "t" виконує роль певного зростаючого параметра (параметра збурення), який характеризує навантажування досліджуваної області C^t. Тоді напружено-деформований стан частки, що розглядається, в довільний момент часу $t_1 > 0$ може бути визначений симетричними тензорами напружень і деформацій Коши-Гріна [79, 80]:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\hat{G} - \hat{E}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{G}_{sk} - G_{sk}\right)\vec{e}^{\,s}\vec{e}^{\,k}; \; \hat{E} = \vec{e}^{\,s}\vec{e}_s = \nabla\vec{r} \, . \tag{3.5}$$

Таким чином, для розгляду процесу навантажування використовується його векторне представлення, з урахуванням того, що при використанні тензорної функції $\sigma(t)$ процес формулюється у просторі напружень, а при використанні тензорної функції $\hat{\gamma}(t)$ – в просторі деформацій.

У зв'язку з вище викладеним доцільно функціонал (3.4) звести до складної тензор-функції напружень у наступному вигляді:

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}\left(\hat{\gamma}(t)\right) \, , \tag{3.6}$$

в якому використовуються пари мір напруженого стану – другого тензора напружень Піола-Кірхгоффа і тензора швидкостей міри деформованого стану Коши-Гріна (або приростів деформацій Коши-Гріна).

Тензорну функцію напруженого стану (3.6) можна представити криволінійним інтегралом у просторі "t":

$$\hat{\sigma}\left(\hat{\gamma}(t)\right) = \int_0^t \hat{\sigma},_{\hat{\gamma}} \cdot\cdot \dot{\hat{\gamma}} dt \tag{3.7}$$

де t – параметр збурення (навантажування); $\dot{\hat{\gamma}}$ – швидкість змінювання компонент тензора деформацій Коши-Гріна, або представити криволінійним інтегралом у просторі деформацій з границями інтегрування від $\hat{\gamma}'$ до $\dot{\hat{\gamma}}$ відповідно:

$$\hat{\sigma}(\hat{\gamma}) = \int_{\hat{\gamma}'}^{\dot{\hat{\gamma}}} \hat{\sigma},_{\hat{\gamma}} \cdot\cdot\, d\hat{\gamma}\,. \tag{3.8}$$

При використанні енергетичного способу визначення властивостей зворотності процесів (3.3), що відбуваються в матеріалі, при побудові визначальних рівнянь виходимо зі завдання виразу питомої енергії деформації через компоненти деформації та за ним визначаємо вирази тензора напружень і підінтегральної тензорної функції в (3.8).

Рівняння стану (3.8), що використовується у даній роботі, є формулюванням інтегральної характеристики напруженого стану, або "інтегральним законом стану", та витікає безпосередньо з прийнятого підходу розв'язування задачі нелінійної механіки суцільного середовища, яке називається "поточним лагранжевим формулюванням", в рамках якого потрібно сформулювати необхідні та достатні умови застосування рівняння стану у формі (3.8) при використанні в тому чи іншому вигляді функціоналу (3.4) [81].

Процеси забудови міських територій, а особливо процеси їх реконструкції, під час яких відбувається будівництво в умовах щільної існуючої забудови, пов'язані з еволюційними змінами впливу зовнішнього навантаження, що зумовлюється обов'язковим урахуванням додаткових навантажень від споруд, гравітаційних сил ґрунтового середовища, а також утворенням штучних порожнин типу котлованів, тонелей, виробок, тощо.

Задача визначення фізичних співвідношень, які описують дійсну поведінку ґрунтових мас при взаємодії з розташованими на них конструкціями будівель та споруд, з урахуванням пластичної течії є вельми складною у звязку із залежністю від історії навантаження, що повязане з періодами забудови даної території, тобто з урахуванням неоднозначної поведінки в залежності від періодів активного навантаження, нейтрального стану, або розвантаження, а також їх послідовності та комбінації [82, 83].

Виходячи з поточного лагранжевого формулювання в рамках теорії в приростах, тобто пластичної течії, використовуються прирости симетричного тензора напружень Піола-Кірхгофа і симетричного тензора скінченних деформацій Коши-Гріна з визначенням коефіцієнта пропорційної функції активного навантаження (деформування) із залученням критерію стійкості ґрунтової маси (критерію пластичної течії), і остаточно визначаються загальні прирости напружень і деформацій в еволюційному режимі.

У самому загальному випадку в пластичній області деформування твердого тіла однозначних залежностей напружень від деформацій не існує. В теорії пластичної течії зв'язки напружень і деформацій замінюються співвідношеннями на диференціальному рівні, або в приростах (нелінійне пружне деформування). Деформаційна теорія пластичності є частковим випадком теорії пластичної течії і непридатна для розв'язку задач дослідження всього процесу пружно-пластичного деформування твердого тіла, а також і для ґрунтових мас.

Використання принципів віртуальної роботи у теорії в приростах та інтегрального закону стану без урахування інерційних сил з урахуванням послідовного представлення напружень, скінченних деформацій, переміщень, об'ємних (масових) і поверхневих зовнішніх сил в станах фіксованих конфігурацій C^t і $C^{t+\Delta t}$ на основі чисельних розв'язків, пов'язано із застосуванням наступних положень [76]:

— на кожному послідовному кроці реалізації поточного лагранжевого формулювання визначається істинний напружений стан, який є ейлеровим описом поведінки суцільного середовища при зміні геометрії, тобто в актуальній конфігурації $C^{t+\Delta t}$;

— формулювання задачі нелінійного деформування суцільного середовища в приростах повністю відповідає теорії пластичної течії;

— скінченна загальна деформація з урахуванням пружних та пластичних складових може бути визначена шляхом інтегрування отриманих співвідношень уздовж заданого шляху інтегрування за прийнятим параметром подовження поточного лагранжевого формулювання;

— при реалізації інтегрального закону стану обов’язково виконується умова, що диференціал підінтегральної функції напружень дорівнює нулю (умова симетрії тензора пружностей четвертого рангу).

З урахуванням співвідношень інтегрального закону стану нелінійної теорії пружності перший принцип віртуальної роботи для статичних задач в актуальній конфігурації тривимірного нелінійно деформованого тіла можна записати у вигляді:

$$\int\limits_{v}\left(\sigma'^{ij}+C^{ijk\ell}_{(e,p)}\right)\delta\gamma_{ij}\,dv-\int\limits_{v}p^{i'}\delta u_{i'}\,dv-\int\limits_{s}q^{i'}\delta u_{i'}\,ds=0\,, \qquad (3.9)$$

де σ'^{ij} – компоненти тензора початкових напружень; $C^{ijk\ell}_{(e,p)}$ – компоненти тензора пружностей у пружно-пластичному стані матеріалу; $\delta\gamma_{ij}$ – варіації коваріантних компонент приростів тензора скінченних деформацій Коши-Гріна у місцевій системі координат x^i (див. рис. 3.1), $p^{i'}, q^{i'}$ – компоненти узагальнених векторів об'ємних і поверхневих сил у глобальній системі координат $OZ^{1'}Z^{2'}Z^{3'}$, що діють на тіло в актуальній конфігурації і віднесені до відлікової конфігурації; $\delta u_{j'}$ – варіації компонент вектора приростів переміщень у глобальній декартовій системі координат.

Можна зробити висновок, що із врахуванням виразу тензора деформацій Коши-Гріна через тензор-градієнт вектора переміщень варіаційне рівняння (3.9), як вихідне рівняння при застосуванні методу скінченних елементів може бути зведено до неявної схеми інтегрування, тому що невідомі узагальнені переміщення будуть входити у відповідне варіаційне рівняння із знаком варіації і без знака варіації.

Варіаційне рівняння (3.9) відповідно до енергетичних методів описує рівновагу елементарного об'єму будь-якого суцільного середовища, незалежно від його фізичних властивостей. Це представлення реалізує практичний вихід варіаційних задач теорії пружності і теорії граничного напруженого стану, де розв'язки пов'язані з відокремленням зон зсувних (для ґрунтів) пластичних деформацій. Таким чином розглядається детермінована задача статики ґрунтового півпростору і у кожній точці (вузлах дискретної моделі і границях між ними) виконуються умови граничного напруженого стану.

В запропонованій теорії використовуються природні граничні умови (жорсткі), які реалізуються накладанням жорстких в'язів на границях дискретної розрахункової моделі, а також спеціальні граничні умови при взаємодії з анкерними пристроями із введенням рівнянь геометричних кінематичних умов з реалізацією розв'язків варіаційної задачі методом невизначених множників Лагранжа, коли варіаційне рівняння дискретної моделі (3.9) доповнюється рівнянням умов деформування цієї моделі через систему геометричних зв'язків. Рівняння (3.9) може бути зведено до одного вектору змінних переміщень:

$$\delta U(u_{i'}^{N}) = 0\,, \tag{3.10}$$

а рівняння геометричних зв'язків може бути представлено у вигляді системи функціональних залежностей вектора переміщень:

$$f^m\left(u_{i'}^k\right)=0; \qquad (m<N). \tag{3.11}$$

В такому випадку може бути сформульована умовна варіаційна задача:

$$\delta U'\left(u_{i'}^N\right)=\delta U\left(u_{i'}^N\right)+\delta F\left(f_m\right), \tag{3.12}$$

або

$$\delta U'=\frac{\partial U}{\partial u_{i'}^N}\delta u_{i'}^N+\lambda_m\frac{\partial f^m\left(u_{i'}^N\right)}{\partial u_{i'}^N}\delta u_{i'}^N=0, \tag{3.13}$$

де $\lambda_m\,(m=1,2,.......\ell)$ – сукупність невизначених множників Лагранжа.

Варіаційна задача (3.13) розв'язується методом невизначених множників Лагранжа [84] у кожному конкретному випадку. Щодо типу реалізації варіаційної постановки теорії граничного напружено-деформованого стану, то у постановці прийняті критерії текучості для незв'язних ґрунтів – розширений критерій Мізеса. Завдяки застосуванню теорії у приростах на кожному кроці ітераційного процесу подовження за параметром збурення здійснюється зміцнення жорсткості ґрунтового масиву на зсув (інтенсивності граничного зсуву) через геометричну складову жорсткості (перший інваріант тензора напружень).

Згідно з теоретичними дослідженнями, проблеми міцності, стійкості і тиску ґрунтів на огороджувальні конструкції, є частковими задачами загальної теорії граничної рівноваги ґрунтів [85]. Гранична рівновага ґрунту у даному елементарному околі відповідає такому напруженому стану, коли деякий додатковий вплив може порушити рівновагу. Такий напружений стан характеризується ще тим, що опір зсуву в елементарному околі (скінченному елементі) дорівнює граничному для даного ґрунту значенню. Це, як правило, має місце у другий фазі напруженого стану при суцільному розвитку зон граничної рівноваги, коли необхідно застосовувати теорію нелінійно-деформованого твердого тіла з урахуванням геометричної і фізичної нелійнійності.

Варіаційне рівняння (3.9) відповідно до енергетичних методів описує рівновагу елементарного об'єму будь-якого суцільного середовища, незалежно від його фізичних властивостей, адекватно такому напруженому стану, коли невеликий додатковий вплив може порушити рівновагу. Такий напружений стан характеризується ще й тим, що опір зсуву в елементарній області визначається у граничному стані для даного типу ґрунту. Такий стан відноститься до другої фази граничних станів ґрунтів при значному розвитку зсувних деформацій в масиві ґрунту. Чисельний розв'язок задачі стійкості ґрунтових масивів в цьому випадку здійснюється на основі запропонованої методики з деякими уточненнями критерія текучості для ґрунтового півпростору. При цьому розрахункова модель задачі у процесі деформування трансформується у відповідності з критерієм текучості (критерієм руйнівання) ґрунтового масиву і розділяється на дві області визначення напружено-деформованого стану: пружну і пружно-пластичну. Це представлення реалізує практичний вихід варіаційних задач теорії пружності і теорії граничного напруженого стану деформованого тіла, де розв'язки пов'язані з відокремленням зон пружних і зсувних (для ґрунтів) пластичних деформацій.

Таким чином розглядається детермінована задача статики комбінованого півпростору: ґрунтового з вкрапленням (за топологією дискретної моделі – "вставки") твердих (бетон, залізобетон, метал) тіл і у кожній точці півпростору (вузлах дискретної моделі і границях між ними) виконуються умови граничного (або позаграничного) напруженого стану з урахуванням розвитку зсувних деформацій. Вихідна розрахункова скінченно-елементна модель у процесі деформування трансформується відповідно до критерію стійкості (руйнування) ґрунтового масиву і складається з двох областей визначення: з розвитком пружних і пружно-пластичних деформацій.

Пластичність — явище, яке залежить від історії навантажування, і тому стає необхідним упродовж усієї історії навантажування обчислювати похідні та прирости пластичних деформацій, а потім отримувати накопичені напруження інтегруванням. У загальному випадку складного навантаження при розвитку пластичних деформацій твердого тіла однозначних залежностей напружень від деформацій не існує. Пластичні деформації залежать не тільки від напружень у скінченному стані, але і від передісторії навантаження.

У відповідності до алгоритму поточного лагранжевого формулювання, згідно з яким при розв'язку системи нелінійних рівнянь скінченноелементної моделі на кожному (N+1)-ому кроці подовження за параметром збурення визначаються напруження $\tau'^{ij}+\sigma^{ij}$ (сума накопичених переднапружень і їх приростів), які перетворюються у кінці кроку N+1 після зміни геометрії дискретної моделі у напруження $\tau'^{ij}+\ \tau^{ij}$ і дорівнюють початковим напруженням Коши на (N+2)-ому кроці подовження за параметром. При цьому використовується тензор напружень для однорідних суцільних середовищ с функціоналом історії деформування тіла в часі [86]:

$$\hat{\tau}\left(\vec{R}(\vec{r},\tau),t\right)=\tau\left(\nabla\vec{R}(\vec{r},\tau),t\right). \tag{3.14}$$

На основі співвідношень нелінійної теорії пружності, введено симетричний дійсний тензор напружень Коши:

$$\hat{\tau}=\tau^{sk}\,\overset{*}{\vec{e}}_s\,\overset{*}{\vec{e}}_k\,, \tag{3.15}$$

який представлений контраваріантними компонентами в актуальній конфігурації, та симетричний другий тензор напружень Піола-Кірхгоффа:

$$\hat{\sigma}=\sigma^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\,, \tag{3.16}$$

віднесений до конфігурації відліку. Тензори $\hat{\tau}$ і $\hat{\sigma}$ є симетричними, зв'язок між ними встановлюється формулами:

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\overset{*}{G}}{G}}\,\overset{*}{\nabla}\vec{r}^{\,T}\cdot\hat{\tau}\cdot\overset{*}{\nabla}\vec{r};\quad \sigma^{ij}=\sqrt{\frac{\overset{*}{G}}{G}}\tau^{ij} \qquad (3.17)$$

де G – тензори мір деформацій Коши-Гріна [87].

Таким чином, на кожному послідовному кроці процесу реалізації поточного лагранжевого формулювання визначається дійсний напружений стан, який можна оцінювати як Ейлерове описання поведінки суцільного середовища при забезпеченні критерію рівноваги дискретної моделі твердого тіла під дією зовнішніх і внутрішніх сил.

Скінченна пластична деформація може бути визначена шляхом інтегрування рівнянь у приростах уздовж заданого шляху інтегрування за прийнятим параметром збурення поточного лагранжевого формулювання, внаслідок того, що лагранжеве формулювання нелінійного деформування суцільного середовища у приростах повністю відповідає теорії пластичної течії [88]. Оскільки теорію пластичної течії можна вважати теорією приростів деформацій, та допускаючи, що у задану мить часу t (конфігурація C^t) тверде тіло, яке розглядається, знаходиться у стані, що описується тензором Коши τ'^{ij} у конфігурації C^t і його передісторія передбачається відомими у кожній його точці (скінченному елементі), можна записати два принципи — віртуальної і додаткової роботи у приростах:

— віртуальна робота

$$\iiint\limits_{v}\left[\sigma^{ij}\delta\gamma_{ij}+\tau'^{ij}\delta\Delta\varepsilon_{ij}-\Delta p^{i}\delta u_{i}\right]dv-\iint\limits_{S_1}\Delta q^{i}\delta u_{i}dS=0; \qquad (3.18)$$

— додаткова робота

$$\iiint\limits_{v}\gamma_{ij}\delta\sigma^{ij}dv-\iint\limits_{S_2}u_{i}\delta\sigma^{ij}n_{j}dS=0; \qquad (3.19)$$

$\Delta q_i=\delta\sigma^{ij}n_j=0$ на S_I (граничні умови).

Тому що напруження τ'^{ij} у заданий момент часу t (в конфігурації C^t) самоурівноважені, можна додатково сформулювати ще два варіаційних принципа у швидкостях [88]:

— віртуальна робота

$$\iiint\limits_{V} \sigma^{ij}\delta\dot{\gamma}_{ij}dV - \iint\limits_{S_1} \Delta q^i \delta\dot{u}_i dS = 0 \; ; \tag{3.20}$$

— додаткова робота

$$\iiint\limits_{V} \dot{\gamma}_{ij}\delta\sigma^{ij}dV - \iint\limits_{S_2} \dot{u}_i \delta\sigma^{ij} n_j dS = 0 \; ; \tag{3.21}$$

$\Delta q_i = \delta\sigma^{ij} n_j = 0$ на S_2 (граничні умови).

На основі виразів (3.18 – 3.21) і з урахуванням розширеного критерію Мізеса для ґрунтового суцільного середовища можна представити варіанти визначення рівнянь стану для різних стадій напруженого стану в елементарному околі (скінченному елементі):

— лінеаризована однорідна форма у приростах напружень:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}{}_{(e,p)}\gamma_{kl} = C^{ijkl}{}_{(e)}\gamma_{kl} - \overset{*}{\alpha}\,\beta\, n^{ij} n^{kl}\gamma_{kl} \; ; \tag{3.22}$$

де $n^{ij} = C^{ijkl}{}_{(e)} \dfrac{\partial f(\overset{*}{S}{}^{ij}\, \overset{*}{\sigma}{}^{ij})}{\partial S^{kl}}$, $\quad S^{kl} \equiv dev\ \overset{*}{\sigma}{}^{kl}$;

$$f(\overset{*}{S}{}^{ij}) > \left[\frac{1}{\sqrt{3}} I_1(\hat{\sigma}^*) \cdot \sin\varphi - \sqrt{3}C \cdot \cos\varphi\right]^2 ; \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial f(\overset{*}{S}{}^{ij}\, \overset{*}{\sigma}{}^{ij})}{\partial S^{kl}} \sigma^{kl} > 0 \quad \text{(активне навантаження);}$$

$$f(\overset{*}{S}{}^{ij}) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} I_1(\hat{\sigma}^*) \cdot \sin\varphi - \sqrt{3}C \cdot \cos\varphi\right]^2 ; \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial f(\overset{*}{S}{}^{ij}\,\overset{*}{\sigma}{}^{ij})}{\partial S^{kl}}\sigma^{kl}=0 \quad \text{(нейтральний стан);}$$

$$f(\overset{*}{S}{}^{ij})<\left[\frac{1}{\sqrt{3}}I_1(\hat{\sigma}^*)\cdot\sin\varphi-\sqrt{3}C\cdot\cos\varphi\right]^2; \qquad (3.25)$$

$$\frac{\partial f(\overset{*}{S}{}^{ij}\,\overset{*}{\sigma}{}^{ij})}{\partial S^{kl}}\sigma^{kl}<0 \quad \text{(розвантаження).}$$

Поверхня навантаження в околі регулярної точки (скінченному елементі) є гладкою безперервною функцією. Пружній області відповідають від'ємні значення функції навантаження. При розвантаженні прирости пластичних деформацій дорівнюють нулю, а неповний диференціал функції навантаження менше нуля. В рівняннях стану пружно-пластичного деформування ґрунту, наведеного у формі приростів (3.22) умовам розвитку тільки пружних деформацій, нейтрального стану і розвантаження відповідають обмеження відповідно (3.23, 3.24, 3.25).

При нейтральному навантаженні напружений стан знаходиться на межі пружності і зміна поверхні пластичності не відбувається, тобто в рівняннях стану при обчисленні приростів напружень і деформацій враховуються тільки пружні компоненти.

Таким чином, теорія пластичної течії, яка ґрунтується на побудові диференціальних залежностей між напруженнями та деформаціями або у формі приростів, дозволяє більш точно моделювати пружно-пластичну поведінку матеріалів. Явище пластичності, яке залежить від історії навантажування, потребує обчислювати похідні та прирости пластичних деформацій упродовж усієї історії навантажування, з подальшим отриманням накопичених напружень інтегруванням. Поверхня пластичності є поверхнею текучості, яка для матеріалів, що зміцнюються, може змінюватися при змінюванні напруженого стану.