Для досліджень процесів нелінійного деформування розвиток нелінійної теорії пружності і пластичності побудований на використанні концепції теорії у формі приростів, згідно з якою в нелінійній частині розв'язувальних рівнянь не відкидаються члени більш високого порядку малості, а також на алгоритмах лагранжевого формулювання теорії в приростах, який використовується для задач великих нелінійно-пружних і пластичних деформацій з урахуванням геометричної нелінійності [76]. Розв'язання задачі полягає у визначенні приростів напружень, деформацій та переміщень, при цьому прийнято, що всі прирости скінченні, а визначальні рівняння нелінійні; весь процес деформування представлений у вигляді ряду малих етапів за часом як параметром збурення; система розв'язувальних рівнянь записується однотипово для кожного з етапів із використанням лагранжевих змінних і відповідних тензорів напружень, деформацій; визначення після розв'язування задачі на даному кроці збурення тензорів напружень і деформацій, нової геометрії конфігурації, які відповідають завершенню етапу подовження.

У застосованій постановці задачі передбачається, що в заданий момент часу "*t*" тіло, що розглядається, знаходиться в стані статичної рівноваги, причому напружений стан і його передісторія передбачаються відомими у фіксованих конфігураціях в кожній точці тіла; прирости зовнішніх сил задаються; принцип віртуальної роботи та пов'язані з ним інші варіаційні принципи враховують неконсервативний вплив і є дуже ефективними для аналізу стану грунтових масивів у взаємодії з міською забудовою.

Для формулювання варіаційного принципу застосовується стандартний підхід при побудові співвідношень методу скінченних елементів [89, 90], що є найефективним способом вираження переміщень комплексної системи за допомогою дискретних моделей її складових, серед яких суцільний багатошаровий грунтовий масив, елементи його укріплення, конструкції будівель та споруд існуючої забудови, та ін.

Апроксимацію міжвузлових переміщень в МСЕ визначають функції форми на підставі полілінійного закону Лагранжа. Переваги застосування методу скінченних елементів полягають у будь-якій кількості узагальнених координат, що може бути використана шляхом розділення системи на відповідну кількість скінченних елементів; процес обчислень відповідно спрощується, оскільки функції переміщень для скінченних елементів одного типу однакові; а обчислювальний процес значно спрощується внаслідок локального характеру впливу функції переміщень [91].

Отже, у запропонованій методиці варіаційний принцип може бути сформульований з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності у постановці задачі для отримання розв'язувальних рівнянь метода скінченних елементів з метою розв'язування задач дослідження напружено-деформованого стану і оптимізації параметрів системи "ґрунтовий півпростір – огороджувальні конструкції – існуюча забудова".

Виходячи з поточного лагранжевого формулювання в рамках інкрементальної теорії [81], використовуються симетричні другий тензор напружень Піола–Кірхгоффа і тензор скінченної деформації Коші–Гріна. У запропонованій модифікації інкрементальної теорії знайдені сумарні напруження на попередньому кроці продовження перетворюються в актуальну конфігурацію

$$\overset{*}{\tau}{}^{ij} = 1\Big/\sqrt{I_3}\,\overset{*}{\sigma}{}^{ij} = 1\Big/\sqrt{I_3}\left(\sigma'^{ij} + \sigma'^{ij}\right)$$

і використовуються як початкові на наступному кроці продовження. Тоді принцип віртуальної роботи у стані $C^{t+\Delta t}$ запишеться у вигляді:

$$\int_{\upsilon} \hat{\overset{*}{\sigma}} \cdot\cdot\, \delta\hat{\gamma} d\upsilon - \int_{\upsilon} \vec{p} \cdot \delta\vec{u} d\upsilon - \int_{s} \vec{q} \cdot \delta\vec{u} ds = 0 \quad , \qquad (3.26)$$

що є першим принципом віртуальної роботи для статичних задач.

Як було показано у 3.3, з використанням співвідношень інтегрального закону стану цей вираз зводиться до вигляду (3.26):

$$\int_v \left(\sigma'^{ij} + C^{ijk\ell}_{(e,p)}\right) \delta\gamma_{ij}\, dv - \int_v p^{i'} \delta u_{i'}\, dv - \int_s q^{i'} \delta u_{i'}\, ds = 0 \cdot \qquad (3.27)$$

Варіаційне рівняння (3.27) справедливо при розв'язанні плоских задач нелінійно-деформованого півпростору, при цьому треба урахувати, що деформації відбуваються тільки в площині OX^2X^3 місцевої системи координат і рівняння Коші-Гріна мають вигляд:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\gamma \nabla_\beta u_\varepsilon G^{\gamma\varepsilon}\right); \ \alpha, \beta = 2{,}3; \qquad (3.28)$$

Відсутність деформацій у направленні вісі OX^1 веде до виникнення нормальних напружень σ^{11}, які залежать від напружень, що діють у площині OX^2X^3 . Виходячи із формули закону Гука $\gamma_{11}=0$ відповідно до формули (3.28), а також допущень $G_{a\beta}=G^{a\beta}=0$ для ізотропного матеріалу витікає:

$$\sigma^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\chi\varepsilon}\gamma_{\chi\varepsilon}; \quad \chi\varepsilon = 2{,}3; \qquad (3.29)$$

$$B^{\alpha\beta\chi\varepsilon} = \frac{E_1}{1+\nu_1}\left[\frac{\nu_1}{1-\nu_1} G^{\alpha\beta} G^{\chi\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(G^{\alpha\chi} G^{\beta\varepsilon} G^{\alpha\varepsilon} G^{\beta\chi}\right)\right]; \qquad (3.30)$$

$$\sigma^{11} = \nu\left(\sigma^{22} + \sigma^{33}\right); \qquad (3.31)$$

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \qquad (3.32)$$

де $\widetilde{B}^{\rho\xi\chi\varepsilon}$ – компоненти тензора пружності у базисі ортотропії $\overset{\circ}{e}'^{\rho}$, які можна обчислити у елементарному околі через технічні константи прямолінійної ортотропії.

Застосована методика дослідження ґрунтового півпростору на основі співвідношень нелінійної теорії пружності передбачає визначення величини другого критичного навантаження, при якому у ґрунтовому півпросторі виникають суцільні ділянки граничного напруженого стану. Для описування процесу розвитку зсувних деформацій ґрунту використовується розширений критерій пластичної течії Мізеса для незв’язних ґрунтів, або критерій Друкера-Прагера для зв'язаних ґрунтів плоскодеформованого півпростору.

Критерій текучості не залежить від орієнтації обраної матеріальної системи координат і тому може бути функцією від трьох інваріантів тензору напружень, але враховуючи, що перший інваріант тензор-девіатора напружень дорівнює нулю, то критерій текучості є функцією від двох інваріантів тензора-девіатора напружень. Другий тензор напружень Піола-Кірхгоффа представлений у відліковій конфігурації C^t сумою двох складових: шарового і тензор-девіатора:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{3} I_1(\hat{\sigma})\hat{G} + dev\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{(v)} + \hat{S}. \tag{3.33}$$

Шаровий тензор $\hat{\sigma}_{(v)}$ визначає гідростатичний тиск у деформованому тілі:

$$\hat{\sigma}_{(v)} = -p\hat{G} \tag{3.34}$$

Тензор-девіатор напружень $\hat{S}$ у деформованому базисі визначається формулою [76]:

$$\hat{S} = dev\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} dev\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{G}{\overset{*}{G}}} dev\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\left(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_{(v)}\right) = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\left[\hat{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\hat{\sigma})\hat{G}\right], \tag{3.35}$$

а його деякі інваріанти визначаються формулами [92]:

$$\begin{gathered} I_1(\hat{S}) = 0\,; \\ I_2(\hat{S}) = -\frac{1}{2} I_1(\hat{S}^2), \quad I_1(\hat{S}^2) = S^{i\cdot}_{\cdot k} S^{k\cdot}_{\cdot i}\,; \\ I_3(\hat{S}) = \frac{1}{3} I_1(\hat{S}^3), \quad I_1(\hat{S}^3) = S^{i\cdot}_{\cdot k} S^{k\cdot}_{\cdot m} S^{m\cdot}_{\cdot i}\,. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Отже, для формулювання співвідношень теорії пружнопластичного деформування матеріалу прийнято, що рівняння стану у пружній стадії є пружними співвідношеннями між напруженнями і деформаціями, а критерій текучості визначає рівень напружень, при якому починається пластична течія і перехід до відповідних співвідношень між напруженнями і деформаціями. Відповідно до цього їх умов констатуємо, що в нелінійно пружній стадії деформування ґрунтового півпростору зв'язок між приростами напруг і деформацій описується узагальненим законом Гука, розповсюдженого на область скінченних деформацій. Дійсний тензор напруг Коші, або другий тензор Піола-Кірхгоффа розділяються на шарову і девіаторну частини. Сумарні прирости деформацій Коші-Гріна включають пружну і пластичну складові:

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{(e)} + \hat{\gamma}^{(p)};$$

або

$$d\hat{\gamma} = d\hat{\gamma}^{(e)} + d\hat{\gamma}^{(p)}. \tag{3.37}$$

Теорія пластичної течії у формі приростів, або у вигляді диференціальних залежностей між напруженнями і деформаціями, дозволяє більш точно моделювати пружнопластичну поведінку ґрунтів, із застосуванням співвідношень асоційованого закону пластичної течії з ізотропним зміцненням. Область пружних деформацій обмежується поверхнею пластичності у девятимірному просторі напружень [93]:

$$f\left(\hat{\tau}, \hat{\gamma}^{(p)}, x\right) = 0, \tag{3.38}$$

де $x = \int\limits_{\hat{\gamma}^{(p)}} d\hat{\gamma}^{(p)}$ параметр пластичності Одквіста фіксує історію навантаження;

$d\hat{\gamma}^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3} d\hat{\gamma}(p)..d\hat{\gamma}(p)}$ – диференціал ефективних пластичних деформацій. Для зміцнювальних матеріалів поверхня пластичності (3.38) може змінюватися при зміні напруженого стану, при цьому поверхня пластичності називається поверхнею зміцнення, або поверхню навантаження [69].

Якщо прирощення напружень $\hat{\tau}$ супроводжується приростом пластичних деформацій, то процес називається навантаженням:

$$d\hat{\gamma}^{(p)} \neq 0; \quad d'f > 0; \quad d'f = \hat{f}, \hat{\tau} \cdot\cdot d\hat{\tau}. \tag{3.39}$$

При нейтральному навантаженні зміна поверхні пластичності не відбувається:

$$d\hat{\gamma}^{(p)} = 0; \quad d'f = 0. \tag{3.40}$$

Розширений критерій Мізеса може бути прийнятий у вигляді:

$$f = \frac{3}{2}\hat{S} \cdot\cdot \hat{S}^T - \sigma_{(s)}^2 = 0;$$

$$\text{або} \quad f = \frac{3}{2} I_1\left(\hat{S}^2\right) - \sigma_{(s)}^2 = 0; \tag{3.41}$$

$$\text{або} \quad f = 3I_2\left(\hat{S}\right) - \sigma_{(s)}^2 = 0,$$

де $\sigma_s = \sigma_s\left(\hat{\sigma}, \hat{\gamma}^{(p)}, \chi\right)$ – гранична інтенсивність напружень ґрунту.

Виходячи із функції (3.41) і враховуючи залежність гідростатичного тиску (3.34) маємо:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{(s)} = \frac{tg\varphi I_1(\hat{\sigma}) + 3c}{\left(3 + 4tg^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}; \text{ або } \overset{\circ}{\sigma}_{(s)} = \frac{1}{3} I_1(\hat{\sigma}) tg\varphi + c;$$

$$\sigma_{(s)} = \overset{\circ}{\sigma}_{(s)} + h'\chi; \quad h' = E_T \Big/ \left(1 - \frac{E_T}{E_0}\right), \tag{3.42}$$

де φ – кут внутрішнього тертя в ґрунті; c – сила питомого зчеплення ґрунту; h' – значення функції зміцнення при біноміальному розкладанні у ряд функції, E_o, $E_т$ – модулі загальної деформації ґрунту на ділянках ломаної, що відповідає пружному стану і лінійному зміцненню відповідно до діаграм пластичності $\sigma_{(e)} \to \tilde{\varepsilon}_e^p$ (рис. 3.2) при зведенні до одновісної деформації:

$$\sigma_{(e)} - \sigma_{(s)} = 0; \quad \sigma_{(e)} = \sqrt{\frac{2}{3}\hat{S} \cdot\cdot \hat{S}^T}.$$

Згідно з асоційованим законом течії, приріст тензору пластичних деформацій є пропорційним вектору нормалі до поверхні навантаження:

$$d\hat{\gamma}^{(p)} = d\lambda \hat{f}_{,\hat{S}}; \quad \hat{f}_{,\hat{S}} = \frac{\partial f}{\partial \hat{S}}, \tag{3.43}$$

де $d\lambda$ – коефіцієнт пропорційності (пластичний множник).

Прирости напружень (диференціали функції напружень) визначаються пружними деформаціями:

$$d\hat{\sigma} = d\left(\underset{4}{\hat{C}^{(e)}} \cdot\cdot d\hat{\gamma}^{(e)}\right) \tag{3.44}$$

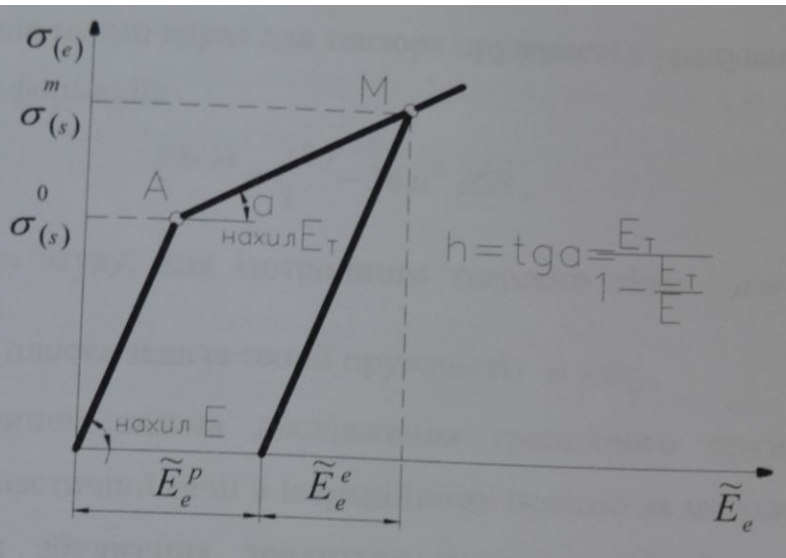

Рис. 3.2. Одновісні діаграми пластичності.

Якщо використати рівняння (3.37) і підставити значення диференціалу пружних деформацій у (3.44), то отримаємо вираз для приростів напружень через прирости (диференціали) загальної деформації

$$d\hat{\sigma} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} \cdot\cdot \left(d\hat{\gamma} - d\hat{\gamma}^{(p)}\right) \tag{3.45}$$

Маючи конкретну функцію критерію пластичної течії і визначаючи прирости напружень через диференціали цієї функції [94] знаходимо рівняння, яке можна розв'язати відносно множника dλ :

$$d\lambda = \beta \hat{f}_{,\hat{S}} \cdot\cdot \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} \cdot\cdot d\hat{\gamma}, \tag{3.46}$$

де

$$\beta = \left(\hat{f}_{,\hat{S}} \cdot\cdot \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} \cdot\cdot \hat{f}_{,\hat{S}} + h\right)^{-1}; \quad h = \frac{1}{3} I_1(\hat{\sigma}) tg\varphi$$

Співвідношення між приростами напружень і приростами загальних деформацій:

$$d\hat{\sigma} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e,p)} \cdot\cdot d\hat{\gamma}; \tag{3.47}$$

$$\underset{4}{\hat{C}}^{(e,p)} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} - \beta \vec{n}\vec{n}, \tag{3.48}$$

де

$$\vec{n} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} \cdot\cdot \hat{f}_{,\hat{S}}; \quad \hat{f}_{,\hat{S}} = I_1\left(\hat{S}^2\right)_{,\hat{S}} = 2\hat{S}.$$

Остаточно маємо вираз для тензора пружності з урахуванням пружних і пластичних деформацій:

$$\hat{C}^{(e,p)} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} - 36\mu^2\ \beta\hat{S}\hat{S}\,, \tag{3.49}$$

де μ – модуль зсуву, для ізотропного твердого тіла, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, а для ортотропного (плоска задача теорії пружності) $\mu = G_{23}$.

Таким чином задача дослідження граничного пружного стану з урахуванням пластичної течії в ітераційному процесі за методом подовження за параметром збудження зводиться до еволюційної корекції тензора пружностей $\underset{4}{\hat{C}}^{(e,p)}$.

Остаточно з урахуванням співвідношень теорії нелінійної теорії пружності і пластичності варіаційне рівняння (3.26) буде мати вигляд:

$$\int_v \left(\sigma'^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta\lambda\mu}_{(e,p)}\gamma_{\lambda\mu}\right)\delta\gamma_{\alpha\beta}dv - \int_v p^{\alpha'}\delta u_{\alpha'}dv - \int_S q^{\alpha'}\delta u_{\alpha'}dS = 0\,, \tag{3.50}$$

$\alpha, \beta, \lambda, \mu = 2{,}3$.

Запропонована методика дослідження ґрунтового півпростору на основі співвідношень нелінійної теорії пружності є розвитком теорії граничного напруженого стану ґрунтового півпростору на основі запровадження розширеного критерію текучості Мізеса для плоскої задачі нелінійної теорії пружності пластичності, яка передбачає визначення величини другого критичного навантаження, при якому у ґрунтовому півпросторі виникають суцільні ділянки граничного напруженого стану.

Як було показано, у запропонованій методології використовується моментна схема методу скінченних елементів (МСКЕ), згідно якої функції приростів переміщень, деформацій і напружень представлені тензорними рядами Тейлора:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{\overrightarrow{(r)}} &= \hat{u}_{(0)} + \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla\hat{u}\big|_{(0)} + \frac{1}{2}\vec{r}_{(e)}\vec{r}_{(e)} \cdot\cdot \nabla\nabla\hat{u}\Big|_{(0)} + \cdots; \\
\hat{\gamma}_{\overrightarrow{(r)}} &= \hat{\gamma}_{(0)} + \nabla\hat{\gamma}_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)} + \frac{1}{2}\vec{r}_{(e)} \cdot \nabla\nabla\hat{\gamma}^{T}\Big|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)} + \cdots; \\
\hat{\sigma}_{\overrightarrow{(r)}} &= \hat{\sigma}_{(0)} + \nabla\hat{\sigma}_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)} + \frac{1}{2}\vec{r}_{(e)} \cdot \nabla\nabla\hat{\sigma}^{T}\Big|_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)} + \cdots;
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Водночас, теорія пластичної течії вимагає розподілу напружено-деформованого стану на кульову і девіаторну частини, у зв'язку з чим тензори деформацій і напружень представлені у вигляді сум кульових і девіаторних тензорів:

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{\varepsilon}} &= \frac{1}{3}I_1\big(\hat{\hat{\varepsilon}}\big)\hat{E} + dev\big(\hat{\hat{\varepsilon}}\big); \\
\hat{\hat{\sigma}} &= \frac{1}{3}I_1(\hat{\sigma})\hat{E} + dev(\hat{\sigma}) = \hat{T}_{(V)} + \hat{S}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

У теорії пластичної течії зв'язки напружень з деформаціями заміюються співвідношеннями на диференціальному рівні або в приростах. Такий напрямок в теорії пластичності є теорією приростів деформацій або теорією пластичної течії. В такій постановці задачі теорія пластичної течії узгоджується з теорією у приростах, та є частковим випадком теорії поточного лагранжевого формулювання. При використанні рівнянь в приростах (так звана інкрементальна теорія) дуже важливим є опис рівнянь стану для визначення величин напружень у будь-який момент часу, у зв'язку з чим в даній методології використовується інтегральний закон стану в лагранжевому формулюванні.

Плоскодеформований півпростір моделюється набором двовимірних чотирикутних скінченних елементів (СЕ), які розглядаються у трьох станах: натуральному (дійсна конфігурація C°), початковому (відлікова конфігурація C^{t}) і деформованому (актуальна конфігурація $C^{t+\Delta t}$). В кожному СЕ введений місцевий косокутний базис з початком у центрі СЕ. Модулі масштабних векторів $\vec{e}_i$ дорівнюють розмірам СЕ по середнім лініям його поверхні і товщині плоскодеформованої моделі півпростору у центрі СЕ. Невідомими прийняті вузлові переміщення СЕ в глобальній системі координат $OZ^{1'}Z^{2'}Z^{3'}$ (рис. 3.3). Зміна переміщень і координат точок у межах СЕ визначається полілінійними функціями двох координат x^2, x^3 локальної поверхні півпростору:

$$u^{\alpha'} = \sum_{S_2=\pm 1}\sum_{S_3=\pm 1} u^{\alpha'}_{S_2S_3}\prod_{\delta=2}^{3}\left(S_{(\delta)}x^{(\delta)} + \frac{1}{2}\right); \quad -\frac{1}{2} \le x^{\delta} \le \frac{1}{2}, \tag{3.53}$$

де $S_\delta = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ – умовні лагранжеві координати;

$u^{\alpha'}_{S_2S_3}$ – вузлові переміщення СЕ.

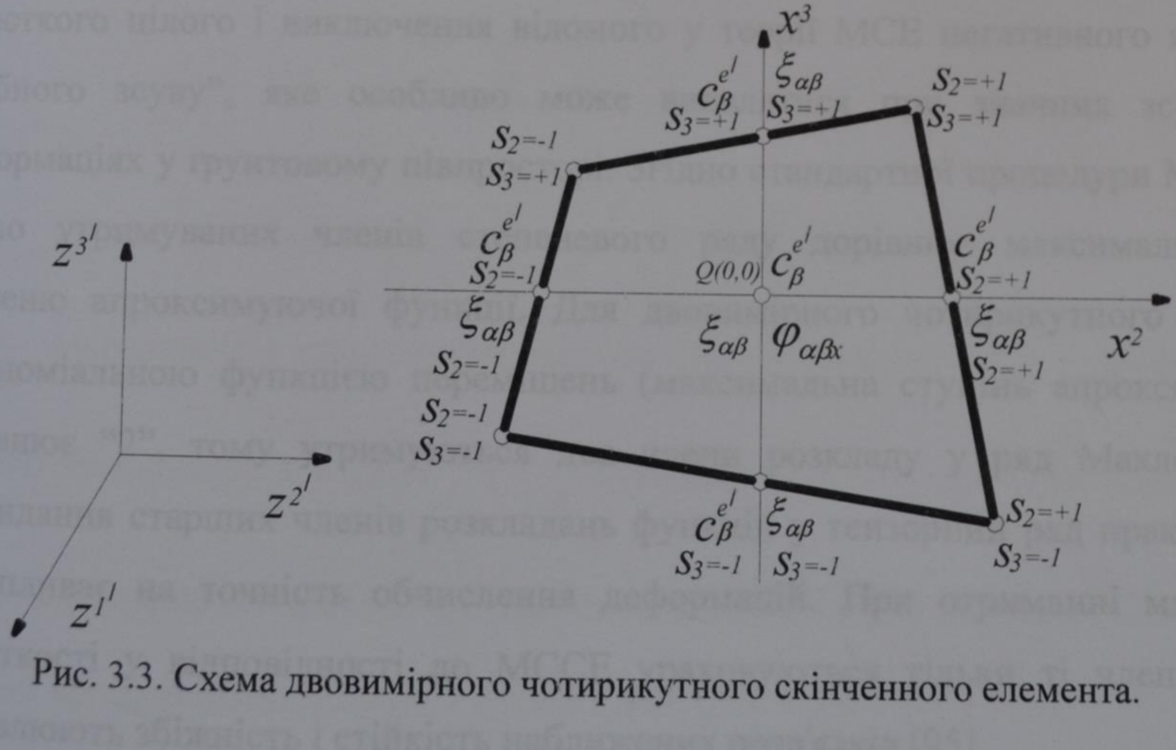

Рис. 3.3. Схема двовимірного чотирикутного скінченного елемента.

Скінченні елементи є ізопараметричними, оскільки апроксімація переміщень у межах СЕ та функція форми збігаються [95]. У моментній схемі скінченних елементів (МССЕ) виконується розкладання функцій деформацій і напружень у ряд Маклорена в центрі СЕ:

$$\nabla_{\alpha} u\beta = \xi_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta x} x^{x} \omega_{(xx)}^{(\alpha\beta)} \tag{3.54}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = N_{o}^{\alpha\beta} + M_{\gamma}^{\alpha\beta} x^{\gamma} \omega_{(\alpha\beta)}^{(\gamma\gamma)}, \tag{3.55}$$

де

$$\omega_{(x\beta\cdot\alpha)}^{(\lambda m\cdot\rho)} = \omega_{x}^{\lambda}\omega_{\beta}^{\mu}\cdot\ldots\cdot\omega_{\alpha}^{\rho}; \qquad \omega_{x}^{\lambda} = \begin{cases} 1, x \neq \lambda \\ 0, x = \lambda \end{cases}; \tag{3.56}$$

$$\xi_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} u_{\beta}\Big|_{(0)}; \qquad \varphi_{\alpha\beta x} = \frac{\partial\left(\nabla_{\alpha} u_{\beta}\right)}{\partial x^{x}}\Big|_{(0)}; \tag{3.57}$$

$$N_{0}^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}\Big|_{(0)}; \qquad M_{\gamma}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\Big|_{(0)}. \tag{3.58}$$

Застосування моментної схеми методу скінченних елементів дозволяє утримувати тільки ті члени ряду (у виразах 3.54, 3.55), які при прийнятому полілінійному законі апроксимації функцій переміщень можуть бути точно обчислені, що забезпечує урахування зміщень на елементарному рівні як жорсткого цілого і виключення відомого у теорії МСЕ негативного явища “хибного зсуву”, яке особливо може виявлятися при значних зсувних деформаціях у ґрунтовому півпросторі. Згідно стандартної процедури МССЕ число утримуваних членів степеневого ряду дорівнює максимальному ступеню апроксимуючої функції. Для двовимірного чотирикутного СЕ з поліноміальною функцією переміщень (максимальна ступінь апроксимації дорівнює “2”, тому утримуються два члени розкладу у ряд Маклорена. Відкидання старших членів розкладань функцій у тензорний ряд практично не впливає на точність обчислення деформацій. При отриманні матриці жорсткості у відповідності до МССЕ ураховуються тільки ті члени, які зумовлюють збіжність і стійкість наближених розв'язків [95].

Враховуючи вирази (3.54 – 3.58), а також вираз (3.3) для двовимірного чотирикутного СЕ можна записати:

$$\delta U_{(e)} = \int_v \left(\overset{*}{N}{}_0^{\alpha\beta} + \overset{*}{M}{}_\gamma^{\alpha\beta} x^\gamma \omega_{(\alpha\beta)}^{(\gamma\gamma)} \right) \times \left(\overset{*}{\xi}_{\alpha\beta} + \overset{*}{\varphi}_{\alpha\beta\lambda} x^\lambda \omega_{(\lambda\lambda)}^{\alpha\beta} \right) \times dv_{(e)} . \tag{3.59}$$

Після інтегрування варіаційного рівняння одержимо:

$$\delta U_{(e)} = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} R_{P_2P_3}^{\varepsilon'} \delta \underset{P_2P_3}{u}{}^{\varepsilon'} \quad ; \tag{3.60}$$

де $R_{P_2P_3}^{\varepsilon'}$ – коефіцієнти нелінійної матриці реакцій:

$$R_{P_2P_3}^{\varepsilon'} = \sqrt{G} \left(\frac{1}{2} \overset{*}{N}{}_0^{\alpha\beta} \overset{*}{Z}{}_{,\beta}^{\varepsilon'} P_\alpha + \frac{1}{12} \overset{*}{M}{}_\gamma^{\alpha\beta} \underset{P_\gamma}{\overset{*}{Z}}{}_{,\beta}^{\varepsilon'} P_\alpha P_\gamma \omega_{(\alpha\beta)}^{(\gamma\gamma)} \right); \tag{3.61}$$

$\sqrt{G} \equiv v_{(e)}$ – у відліковій конфігурації C^t; $\overset{*}{Z}{}_{,\beta}^{\varepsilon'} \equiv \overset{*}{C}{}_{\cdot\beta}^{\varepsilon!}$; $\underset{P_\gamma}{\overset{*}{Z}}{}_{,\beta}^{\varepsilon'} \equiv \overset{*}{C}{}_{\cdot\beta,\gamma}^{\varepsilon!} = \dfrac{\partial^2 \left(Z^{\varepsilon'} + u^{\varepsilon'} \right)}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$.

При полілінійній апроксимації функції переміщень (3.53) у двовимірному СЕ значення членів розкладання деформацій у ряд $\xi_{\alpha\beta}$ і $\varphi_{\alpha\beta\chi}$ обчислюються за формулами:

$$\xi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} C_\beta^{\varepsilon'} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \underset{S_2S_3}{u_{\varepsilon'}} \; S_\alpha ; \quad \alpha, \beta = 2,3 \tag{3.62}$$

$$\varphi_{\alpha\beta\chi} = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \underset{S_x}{C_\beta}{}^{\varepsilon'} \underset{S_2S_3}{u_{\varepsilon'}} \; S_\alpha S_x \omega_{(xx)}^{(\alpha\beta)} , \tag{3.63}$$

де $\underset{S_2S_3}{u_{\varepsilon'}}$ – коваріантні компоненти вектора вузлових переміщень у декартовій системі координат, $\varepsilon' = 2,3$; $C_\beta^{\varepsilon'}$ і $\underset{S_x}{C}{}_\beta^{\varepsilon'}$ – компоненти тензора перетворення у центрі СЕ (перші похідні від функції координат $Z^{\varepsilon'}(x^\beta)$) і на гранях СЕ (другі похідні від функції координат) $Z^{\varepsilon'}(x^\beta)$ (див. рис. 3.3).

Для чотирикутного скінченного елементу віртуальна робота зовнішніх об'ємних поверхневих сил має вираз:

$$\delta A_{(e)} = \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=+\frac{1}{2}} \int\limits_{x^3=-\frac{1}{2}}^{x^3=+\frac{1}{2}} q^{\alpha'} \delta u_{\alpha'} \sqrt{a} dx^2 dx^3 , \tag{3.64}$$

де $a = Det(G_{\alpha\beta})$ – у відліковій конфігурації C'.

Вважаючи, що компоненти вектора узагальнених об'ємних, або поверхневих сил у межах СЕ обчислюються через вузлові значення за полілінійним законом аналогічно рівнянню (3.53), після інтегрування:

$$\delta A_{(e)} = \sum_{p_2=\pm1} \sum_{p_3=\pm1} \overset{*}{Q}{}^{\varepsilon'}_{P_2P_3} \, \delta \underset{P_2P_3}{u_{\varepsilon'}} ; \tag{3.65}$$

де $\overset{*}{Q}_{P_2P_3}$ – компоненти повного вектора узагальнених вузлових рівномірно розподілених об'ємних, або поверхневих сил:

$$\overset{*}{Q}{}^{\varepsilon'}_{P_2P_3} = \frac{1}{4} q^{\varepsilon'}_{P_2P_3} \left[1 + G^{\lambda\mu} \left(\overset{*}{\xi}_{\lambda\mu} + \frac{1}{6} \overset{*}{\varphi}_{\lambda\mu\varepsilon} \omega^{(\lambda\mu)}_{(\varepsilon\varepsilon)} \right) S_\varepsilon \right] \sqrt{a} . \tag{3.66}$$

Систему нелінійних рівнянь рівноваги скінченно-елементної моделі плоского півпростору одержимо з виразу варіації повної потенціальної енергії:

$$\delta \Pi_{(e)} = \sum_{p_2=\pm1} \sum_{p_3=\pm1} \left(R^{\varepsilon'}_{P_2P_3} - \overset{*}{Q}{}^{\varepsilon'}_{P_2P_3} \right) \delta \underset{P_2P_3}{u_{\varepsilon'}} ; \tag{3.67}$$

які сумуємо за всіма скінченими елементами моделі півпростору:

$$\sum_{e=1}^{e=E} \left[\sum_{P_2=\pm1} \sum_{P_3=\pm1} \left(\underset{P_2P_3}{R^{\varepsilon'}_{(e)}} - \underset{P_2P_3}{\overset{*}{Q}{}^{\varepsilon'}_{(e)}} \right) \delta \underset{P_2P_3}{u^{(e)}_{\varepsilon'}} \right] = 0 , \tag{3.68}$$

а перейшовши від сумування за елементами до сумування за вузлами:

$$\sum_{N=1}^{N=M} \left(R^{\varepsilon'}_N - \overset{*}{Q}{}^{\varepsilon'}_N \right) \delta u^N_{\varepsilon'} = 0 ; \qquad N = 1, 2, \ldots\ldots, M , \tag{3.69}$$

де M – число вузлів СЕ – моделі.

Через незалежність варіацій переміщень, що допускаються в'язями, одержимо систему нелінійних рівнянь рівноваги СЕ–моделі з чотирикутним скінченим елементом:

$$\sum_{N=1}^{M}\left(R_N^{\varepsilon'} - \dot{Q}_N^{\varepsilon'}\right) = 0 . \tag{3.70}$$

Для виводу матриці жорсткості системи лінеаризованих рівнянь рівноваги скінченноелементної моделі, компоненти тензора скінченних деформацій Коші представлені у вигляді суми:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \overset{H}{\varepsilon}_{\alpha\beta}; \tag{3.71}$$

де

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(C^{\varepsilon'}_{\cdot\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon'}}{\partial x^{\alpha}} + C^{\varepsilon'}_{\cdot\alpha}\frac{\partial u_{\varepsilon'}}{\partial x^{\beta}}\right); \quad \overset{H}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_{\varepsilon'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial u^{\varepsilon'}}{\partial x^{\beta}},$$

а компоненти другого тензора приростів напружень Піола-Кірхгоффа у вигляді:

$$\sigma^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\chi\varepsilon}\left(\hat{\varepsilon}_{\chi\varepsilon} + \overset{H}{\varepsilon}_{\chi\varepsilon}\right). \tag{3.72}$$

З урахуванням (3.71, 3.72), варіаційне рівняння для чотирикутного СЕ буде мати вигляд:

$$\delta U = \int_{v}\left(\sigma'^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta\chi\varepsilon}_{(e,p)}\hat{\varepsilon}_{x\varepsilon} + B^{\alpha\beta\chi\varepsilon}_{(e,p)}\overset{H}{\varepsilon}_{x\varepsilon}\right)\delta\left(\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \overset{H}{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right)dv . \tag{3.73}$$

Представлені основні співвідношення модифікованої схеми методу скінченних елементів, дозволяють проводити дослідження комбінованого ґрунтового півпростору з елементами конструкцій укріплення, будівель та споруд з урахуванням геометричної і фізичної нелінійностей у постановці задачі.

Розроблення уточнених методів розрахунку стійкості ділянок міської території в умовах реконструкції в її межах пов'язано з урахуванням наступних критеріїв: граничного стану огороджувальних конструкцій укріплень за міцністю, допустимих їх пружних прогинів, та граничного опору ґрунту зсуву і допустимих переміщень шарів основи оточуючої забудови. Це зумовлює необхідність розглядати комбінований багатопараметричний простір з ґрунтових основ і штучних споруд при зведенні просторової задачі до задачі у плоскій постановці, розв'язання якої полягає у визначенні граничних деформацій всього багатошарового розрахункового фрагменту півпростору із включеннями елементів оточуючої забудови у взаємодії з огороджувальними конструкціями, з урахуванням граничного опору ґрунту зсуву і допустимих напружень у конструкціях укріплень, із врахуванням розвитку локальних пластичних деформацій.

Гранична рівновага ґрунту в елементарному околі (скінченному елементі) адекватна такому напруженого стану, за якого навіть невеликий додатковий вплив може порушити цю рівновагу [96, 97]. Такий напружений стан характеризується ще й тим, що опір зсуву в елементарній області (скінченному елементі) повинен дорівнювати граничному для даного типу ґрунту [98]. Вказаний стан відноситься до другої фази граничного стану ґрунтів при обширному розвитку зсувних деформацій у масиві ґрунту. Числовий розв'язок задачі стійкості ґрунтових масивів у цьому випадку здійснюється на основі запропонованої в попередніх розділах методики з деякими уточненнями критерію текучості для ґрунтового півпростору, що знаходиться у взаємодії з елементами міської забудови.

Варіаційне рівняння відповідно до енергетичних методів описує рівновагу елементарного об'єму будь-якого суцільного середовища незалежно від його фізико-механічних характеристик. У запропонованій методиці реалізується прикладний підхід варіаційних принципів і теорії граничного напруженого стану деформованого тіла, коли отримані рішення пов'язані з розподілом спочатку пружних областей на пружні і непружні з зонами, що розвиваються, пружно-пластичних (зсувних для ґрунтів) деформацій. Вихідна розрахункова скінченноелементна модель у процесі деформування трансформується відповідно до критерію текучості (руйнування) ґрунтового масиву і поділяється на дві області визначення напружено-деформованого стану: пружну і пружно-пластичну.

У даній роботі критерій стійкості або текучості ґрунтового півпростору для окремої локальної однорідної ізотропної області, пропонується у найбільш точній та універсальній формі на основі розширеного критерію Мізеса, за рахунок включення в його загальну квадратичну форму:

— залежностей від шарового тензора функції загальних напружень — внутрішній гідростатичний тиск [82];

— залежностей Кулона-Мора на основі використання поверхні навантаження [85];

— тензор-девіатора функції напружень враховує не тільки другий, а й третій інваріант через інваріант Лоде-Надаї [82].

Виходячи з того, що інваріанти тензора напружень визначаються через компоненти шарової і девіаторної частин функції напружень і допущення про однорідність і ізотропність локального околу півпростору обумовлюють їх незалежність від направлення нормалей октаедричних площин, розширений модифікований критерій текучості Мізеса можна навести у наступній формі:

$$f\left(\hat{\sigma}, \hat{S}, \hat{\gamma}^{(p)}, \alpha, \varphi, c\right) = \frac{2}{3}\, \mathrm{I}_1\left(\hat{S}^2\right) \cdot \left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\varphi\right)^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{I}_1\left(\hat{\sigma}\right)\sin\varphi - \sqrt{3}\; c\cos\varphi\right]^2 = 0\,, \tag{3.74}$$

де $\hat{\sigma}, \hat{S}, \hat{\gamma}^{(p)}$ — тензори відповідно загальних (повних) напружень, напружень девіаторної частини і пластичних деформацій; α, φ, c — відповідно кут Лоде-Надаі через третій інваріант девіаторних напружень, кут внутрішнього тертя ґрунту і питоме зчеплення ґрунту; $\mathrm{I}_1(\hat{S}^2)$, $\mathrm{I}_1(\hat{\sigma})$ — перший інваріант квадрата тензор-девіатора напружень і перший інваріант загального тензора напружень (гідростатичний тиск) відповідно.

Кут Лоде-Надаї визначається за формулою [82]:

$$\alpha = \frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{I_3}{I_2^{3/2}}\right); \tag{3.75}$$

де I_3 — третій інваріант тензора девіатора напружень $\hat{S}$; I_2 — другий інваріант тензора девіатора напружень $\hat{S}$:

$$I_3 = I_3(\hat{S}) = \frac{1}{3}I_1(\hat{S}^3),$$

$$I_2 = I_2(\hat{S}) = \frac{1}{2}I_1(\hat{S}^2). \tag{3.76}$$

З урахуванням (3.76) маємо:

$$\alpha = \frac{1}{3}\arcsin\left\{-\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{I_1(\hat{S}^3)}{\left[I_1(\hat{S}^2)\right]^{3/2}}\right\}. \tag{3.77}$$

На підставі формули (3.77) можна констатувати, що параметр функції напружень "α" (параметр Лоде–Надаї) є функцією інваріантів $I_1(\hat{S}^2)$ і $I_1(\hat{S}^3)$.

Використовуючи теорію пластичної течії в рамках розширеного принципу Мізеса, тобто на основі асоційованого закону текучості можна записати:

$$d\hat{\gamma}^{(p)} = d\lambda\,\hat{f}_{,\hat{S}} \tag{3.78}$$

де $d\lambda$ — коефіцієнт пропорційності (пластичний множник); $\hat{f}_{,\hat{S}}$ — похідна скалярної функції поверхні пластичної течії по тензорному аргументу $\hat{S}$ —

тензор-девіатор напружень другого рангу. З використанням (3.78) отримуємо співвідношення для рівняння стану при розвитку пружно-пластичних деформацій у приростах загальних скінченних деформацій:

$$\sigma = \underset{4}{\hat{C}}^{(e,p)} \cdot\cdot \hat{\gamma} \;, \tag{3.79}$$

де $\underset{4}{\hat{C}}^{(e,p)}$ — тензор пружності четвертого рангу для матеріалу в пружно-пластичному стані:

$$\underset{4}{\hat{C}}^{(e,p)} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} - \beta\,\hat{n}\,\hat{n}\;; \tag{3.80}$$

де $\underset{4}{\hat{C}}^{(e)}$ — тензор пружості для пружного матеріалу,

$$\hat{n} = \underset{4}{\hat{C}}^{(e)} \cdot\cdot \hat{f},\hat{S}\;; \tag{3.81}$$

$$\beta = (\hat{n} \cdot\cdot \hat{f},\hat{S})^{-1}\;; \tag{3.82}$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{(e)} + \hat{\gamma}^{(p)} \quad . \tag{3.83}$$

Для отримання співвідношень (3.80 – 3.83) була виконана операція диференціювання скалярної функції (3.74) по тензорному аргументу $\hat{S}$ як складної функції, враховуючи, що параметр "α" є теж функцією від $\hat{S}$:

$$f,_{\hat{S}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{S}} = \frac{\partial\left(\frac{3}{2}\mathrm{I}_1(\hat{S}^2)\right)\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\cdot\sin\varphi\right)^2}{\partial \hat{S}}\,. \tag{3.84}$$

В результаті перетворень одержано тензорний ряд наступного вигляду:

$$\hat{f},_{\hat{S}} = \xi\,\hat{S} + \Psi\,\hat{S}^2 \;. \tag{3.85}$$

Вирази для скалярних величин ξ і ψ :

$$\xi = 3\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\cdot\sin\varphi\right)\left[\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\cdot\sin\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{6}\cdot\mathrm{I}_1(\hat{S}^3)\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\sin\varphi\right)}{\mathrm{I}_1^{3/2}(\hat{S}^2) + \sqrt{6}\cdot\mathrm{I}_1(\hat{S}^3)}\right]; \tag{3.86}$$

$$\psi = \frac{3\sqrt{6}\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\cdot\sin\varphi\right)\cdot \mathrm{I}_1(\hat{S}^2)\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\sin\varphi\right)}{\mathrm{I}_1^{3/2}(\hat{S}^2) + \sqrt{6}\cdot \mathrm{I}_1(\hat{S}^3)}. \quad (3.87)$$

Остаточно можна зробити висновок, що для чисельних досліджень стійкості ґрунтового масиву на основі методу скінченних елементів у якості вихідних співвідношень в запропонованій методології можуть використовуватись варіаційні рівняння рівноваги (3.9) і рівняння поверхні навантаження у шестивимірному просторі напружень (3.74), які в скалярній формі мають вигляд:

$$f\left(\sigma^{*ij}, S^{*ij}\right) = \frac{2}{3} S^{*}_{ij} S^{*ij}\left(\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\varphi\right)^2 -$$

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^{*ij} G_{ij}\sin\varphi - \sqrt{3}\; c\cos\varphi\right]^2 = 0, \quad (3.88)$$

де σ^{*ij}, S^{*ij} – компоненти повних загального і девіаторного тензора напружень; α – параметр Лоде–Надаї, що є функцією інваріантів $\mathrm{I}_2(\hat{S}), \mathrm{I}_3(\hat{S})$; φ, c – незалежні параметри фізико-механічних характеристик досліджуваного шару ґрунту.

На основі теорії пластичної течії з використанням рівняння поверхні навантаження (3.88) можна отримати рівняння стану в лінеаризованій формі узагальненого закону Гука, поширеного на область скінченних деформацій для встановлення зв'язку на рівні приростів напружень і приростів скінченних деформацій у стадіях активного навантаження і розвантаження при розвитку пружно-пластичних деформацій:

$$\sigma^{ij} = C^{ijk\ell}_{(e,p)}\,\gamma_{kl},$$

$$C^{ijk\ell} = C^{ijk\ell}_{(e)} - \beta\, n^{ij} n^{kl}, \quad (3.89)$$

де $C_{(e)}^{ijk\ell}$, $C_{(e,p)}^{ijk\ell}$ – компоненти тензорів в пружній стадії і пружно-пластичній стадії розвитку пружно-пластичних деформацій відповідно; n^{ij} – компоненти тензора другого рангу, що зумовлені розвитком пластичних деформацій, коли функція $f(\sigma^{*ij}, S^{*ij}) > 0$. При розвантаженні використовуються тільки $C_{(e)}^{ijk\ell}$.

Якщо у формулі (3.85) утримати тільки один член ряду, тобто знехтувати складовою тензор-девіатора у другому ступені, то співвідношення (3.89) буде мати вигляд:

$$C_{(e,p)}^{ijk\ell} = C_{(e)}^{ijk\ell} - \frac{2\mu}{S_k^i S_i^k} S^{ij} S^{k\ell}, \qquad (3.90)$$

що узгоджується із співвідношеннями, отриманими з використанням розширеного критерію Мізеса. Опис приростів тензора напружень при розвитку пружно-пластичних деформацій з використанням отриманих співвідношень забезпечує більш точне урахування пластичних деформацій у тривимірній деформованій області суцільного середовища.

Наведені рівняння стану в приростах у відповідності з теоріями приростів і пластичної течії забезпечують біль точне урахування як пружних, так і пластичних деформацій у двовимірному просторі.