**ЛЕКЦІЯ 6**

**Дослідження системи аксіом планіметрії Лобачевського. Інтерпретації Пуанкаре.**

**Повторення:**

1. Вимоги до системи аксіом
2. Змістовно несуперечлива система аксіом
3. Модель системи аксіом
4. Приклади моделей систем аксіом

Побудуємо модель неевклідової планіметрії на множині об’єктів евклідової площини, що була запропонована А.Пуанкаре. Розглянемо на евклідовій площині деяку пряму  (наприклад, горизонтальну). Ця пряма визначає дві півплощини. Одну з них назвемо «верхньою». Будемо називати *неевклідовими точками* точки верхньої півплощини (без точок прямої ), *неевклідовими прямими* – евклідові півкола, що знаходяться в верхній півплощині та ортогональні до прямої  (тобто мають центри на прямій ), а також евклідові півпрямі, що спираються на пряму  та утворюють з нею прямий кут. Ці півпрямі будемо називати півколами нескінченно великого радіусу



Далі визначимо поняття: «точка належить прямій» або «пряма проходить через точку». Нехай  – неевклідова точка,  – неевклідова пряма, яка є деяким півколом (яке теж будемо позначати буквою ). Будемо говорити, що точка  знаходиться на (неевклідовій) прямій , якщо ця точка розташована на евклідовому півколі  в сенсі тих відношень, які мають місце в евклідовій геометрії. Те, що для неевклідових точок та прямих справедливі аксіоми 1.1–1.3, легко перевіряється засобами евклідової геометрії.

Насправді, аксіома 1.1 виконується, оскільки через дві точки  і  верхньої півплощини завжди можна провести півколо, ортогональне до прямої .

Аксіома 1.2 виконується, оскільки два півкола, що зображають неевклідові прямі, можуть мати не більше однієї спільної точки.

Аксіома 1.3. виконується, оскільки на півколі існує нескінченно багато точок і в верхній півплощині існує нескінченно багато точок, що не належать вибраному півколу.

Далі визначимо поняття «лежати між» по відношенню до неевклідових точок на неевклідових прямих. Нехай  – три точки неевклідової прямої, яка зображується півколом . Будемо говорити, що точка  (в неевклідовому сенсі) лежить між точками  і , якщо на півколі  вона розташована між точками  і  в тому сенсі, як це розуміється в евклідовій геометрії . Інакше кажучи, порядок точок на неевклідовій прямій співпадає з порядком точок на евклідовому півколі, що зображає цю пряму в верхній півплощині.

Тому неевклідів відрізок  зображується дугою півкола з кінцями ; неевклідова півпряма, що виходить з точки , зображується дугою , кінець  якої знаходиться на прямій . Точка  при цьому не повинна зараховуватись до точок неевклідової півпрямої.



*Неевклідовим кутом* будемо називати сукупність двох неевклідових півпрямих, що виходять з однієї неевклідової точки.

В цій моделі роль рухів відіграють інверсії з центрами на прямій . Тому для неозначуваного поняття «конгруентність» дамо такі означення.

Назвемо неевклідів відрізок  *конгруентним* неевклідову відрізку , якщо існує така послідовність інверсій, що їх добуток відображає евклідову кругову дугу  в кругову дугу .

Аналогічно, назвемо неевклідів  *конгруентним* неевклідовому куту , якщо існує така послідовність інверсій, що їх добуток відображає сторони першого кута на сторони другого кута.

Можна перевірити, що аксіоми другої, третьої та четвертої груп теж виконуються.

Перевіримо, чи виконується на цій моделі аксіома Лобачевського.

Візьмемо будь-яке півколо  верхньої півплощини, ортогональне до прямої  (неевклідову пряму). Нехай  – деяка точка верхньої півплощини, яка не належить цьому півколу. Легко перевірити що через точку  проходить нескінченно багато різних півкіл, ортогональних до прямої , які не мають спільних точок з півколом . Іншими словами можна сказати: через довільну неевклідову точку, що лежить поза даною неевклідовою прямою, проходить нескінченно багато різних неевклідових прямих, які не перетинають дану пряму. Отже, в системі об’єктів, що розглядаються, має місце постулат Лобачевського. Таким чином, ця система представляє собою модель геометрії Лобачевського.

**Модель геометрії Лобачевського в одиничному крузі.**

***Задача з самостійної роботи 1 варіант 1:***

«Точка» - довільна внутрішня точка круга на евклідовій площині, «пряма» - довільна хорда цього круга (без кінців), «належить», «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі.

**Твердження:**

: для будь-яких двох різних точок існує єдина пряма, якій належить кожна з точок.

: для будь-яких двох різних прямих існує єдина точка, яка належить кожній з прямих.

: кожній прямій належать принаймні дві точки.

: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

: через будь-яку точку, що не належить цій прямій, проходить єдина пряма, що не перетинає цю пряму.

: через будь-яку точку, що не належить цій прямій, проходить дві прямі, що не перетинають цю пряму.

: існує чотири точки, ніякі три з яких не належать одній прямій

**ЗАВДАННЯ. Вибрати правильну відповідь і обгрунтувати свій вибір**

1. Сума внутрішніх кутів трикутника на площині Лобачевского
a. дорівнює ,
b. менша ,
c. більша .

2. Вектор є основним поняттям в системі аксіом
a. Г. Вейля,
b. А. В. Погорєлова,
c. Д. Гільберта,
d. А. Д. Олександрова.

3. На площині Лобачевського між собою рівні всі
a. кола,
b. еквідистанти,
c. оріцикли.

4. Твердження «Через дану точку поза прямою можна провести не більше однієї прямої, що не перетинає дану» вірне в

a. геометрії Евкліда,

b. геометрії Лобачевского,

c. абсолютній геометрії.

5 . Подібних трикутників не існує в
a. геометрії Евкліда,
b. геометрії Лобачевского,
c. абсолютній геометрії.

6.У системі аксіом Вейля залежною є аксіома
a. асоціативності додавання векторів,
b. комутативності додавання векторів,
c. комутативності скалярного добутку векторів,
d. існування трьох лінійно незалежних векторів.

7. Відрізок є основним поняттям в системі аксіом
a. Г. Вейля,
b. А. В. Погорєлова,
c. Д. Гільберта,
d. А. Д. Олександрова.

8. В евклідовому просторі геометрія Лобачевського «в малому» реалізується на
a. сфері,
b. псевдосфері,
c. гелікоїді,
d. катеноїді.

9. Прямих, які не перетинаються, немає в

a. геометрії Евкліда,

b. геометрії Лобачевского,

c. абсолютній геометрії,

d. сферичній геометрії.

**ДОДАТКОВЕ ЗАВДАННЯ:**

***Побудувати ізоморфне відображення моделі Пуанкаре геометрії Лобачевського на евклідовій півплощині на модель геометрії Лобачевського в одиничному крузі.***