

Прийняття в умовах ризику та невизначеності

При математичному моделюванні прийнятті рішень здебільшого використовують концепцію гри з природою. У математичній теорії ігор розглядають ігри з двома учасниками, де осмислені дії двох учасників. У випадків ігор з природою один з гравець діє, як такий, що немає конкретної мети і свої дії здійснює навмання, тобто вибирає випадковим чином. Моделювання таких ігор повинно розпочинатися з побудови платіжної матриці. Цей етап звичайно є найбільш складніший при підготовці рішень. Помилки у платіжній матриці неможливо компенсувати використовувати, використанням якимось особливими математичними методами і ведуть до прийняття невірної рішення.

У випадку гри з природою відсутність обміркованої протидії спрощує вибір альтернативи, проте, у цьому випадку складніше обґрунтувати вибір альтернативи, оскільки у цьому випадку гарантований результат наперед невідомий. Методи прийняття рішень у іграх з природою залежать від характеру невизначеності, а саме, чи є відомі ймовірності стани природи (зовнішнього середовища), тобто має місце інформаційний стан ризику чи невизначеності.

Розглянемо аналітичне подання гри з природою у вигляді платіжної матриці. Нехай суб'єкт прийняття рішень має n можливих альтернатив: A_1, A_2, \dots, A_n , у зовнішнього середовища є m можливих станів. Тоді умови гри з природою (зовнішнього середовища) можна задати у вигляді матриці виграшів:

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	A_{2m}
....
A_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{nm}

У випадку гри з природою можливий і інший спосіб задання платіжної матриці: не у вигляді матриці виграшів, а у виду матриці ризиків: $R = \|r_{ij}\|$ розмірності $m \times n$, або матриці втрачених можливостей. Тут величина ризику – це розмір плати за відсутність інформації про майбутній стан зовнішнього середовища. Матрицю R можна безпосередньо побудувати з умови задачі або на основі матриці виграшу. Ризиком r_{ij} при прийнятті рішення A_i при стану зовнішнього середовища B_j будемо називати різницею між виграшом, який був отриманий про настання у майбутньому стан зовнішнього середовища B_j і виграш без цієї інформації. Знаючи майбутній стан зовнішнього середовища B_j , була б вибрана альтернатива, при якій сума виграшу була б максимальна, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij}$ при заданій j . Наприклад, для матриці виграшу, наведеної нижче, побудувати матриці ризику.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Тут $\beta_1 = 4, \beta_2 = 8, \beta_3 = 6, \beta_4 = 9$. У цьому випадку отримуємо матрицю ризику:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Незалежно від вигляду матриці гри потрібно вибрати альтернативу, найкращу у порівнянні з іншою альтернативою. Розглянемо, ситуацію, коли альтернатива вибирається в умовах невизначеності при відсутності інформації про можливі стани зовнішнього середовища. Для вибору оптимальної альтернативи використовують критерії максимакса, Вальда, Севіджа, Гурвіца. За наявності інформації про ймовірності різних станів зовнішнього середовища використовують критерії Байєсп та Лапласа.

З допомогою **критерія максимаксу** визначається альтернатива, що максимізує можливі виграші для кожного стану зовнішнього середовища, тому цей критерій називають також «критерієм оптиміста». Найкраща тут вважається альтернатива, за якої досягається максимальний виграш, що дорівнює $M = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$.

Для платіжної матриці – матриці виграшу A за максимакс-критерієм оптимальна альтернатива A_1 , для якої досягає максимальний виграш 9.

Розглянемо максимінний **критерій Вальда**. Тут суб'єкт прийняття рішень розглядає зовнішнє середовище як гравця, що активно намагається протидіяти його інтереси, набуває найгірші для нього стану. Тому вибирається альтернатива, для якої досягається значення $W = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$.

У розглянутому прикладі для альтернативи A_1 $\min_{1 \leq j \leq m} a_{1j} = 1$, для альтернативи A_2 $\min_{1 \leq j \leq m} a_{2j} = 3$, для A_3 – $\min_{1 \leq j \leq m} a_{3j} = 2$. Отже, $W = 3$, що відповідає альтернативі A_2 . Отже, у відповідності з критерія Вальда з самих невдалих результатів вибирається найкращий. Це позиція крайнього песимізму. Така стратегія прийняття рішення є допустимою, якщо суб'єкт ризику, у першу чергу, бажає застрахувати від ризиків несподіваних великих втрат. Вибір між критеріями максимаксу та Вальда залежить від відношення СПР (суб'єкта прийняття рішень) до ризику.

При застосування критерія мінімаксного ризику Севіджа вибір альтернативи аналогічний критерію Вальда з тією відмінністю, що використовується не матрица вигришу, а матриця ризику R . Знаходять у кожному рядку матриці ризику максимальний елемент, вибирають ту альтернативу, для якої цей елемент найменший, тобто визначають $S = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} r_{ij}$. У розглянутому вище прикладі $S = 4 = \min\{4; 6; 7\}$.

Критерій, що намагається врахувати і найгірший, і найкращий стан зовнішнього середовища, є «критерій песимізма-оптимізма» або **критерій Гурвіца**. Цей критерій при прийнятті рішення рекомендує певним можливим середнім результатом, між найгіршим та найкращим. Згідно з критерієм Гурвіцем альтернатива у матриці виграшів вибирається згідно зі значенням:

$$H = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ p \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} + (1 - p) \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij} \right\}.$$

Тут коефіцієнт p називають коефіцієнтом песимізму. Він приймає значення з відрізка $[0; 1]$. Він дорівнює ймовірності найгіршого наслідку. При $p = 0$ критерій Гурвіца співпадає з максімаксним критерієм, при $p = 1$ – з критерієм Вальда. Покажемо процедуру застосування цього критерія для матриці виграшів з розглянутого прикладу при $p = 0,5$. Для кожної альтернативи розрахуємо значення альтернативи $z_i = p \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} + (1 - p) \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$. У нашому прикладі маємо: $z_1 = 0,5(1 + 9) = 5$, $z_2 = 0,5(3 + 8) = 5,5$, $z_3 = 0,5(2 + 6) = 4$. Маємо $H = \max_i z_i = 5,5$. Це значення відповідає другій альтернативі, тобто, за критерієм Гурвіца є оптимальною альтернатива A_2 .

Критерій Гурвіца можна застосувати і до матриці ризику R . У цьому випадку $H_R = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ p \max_{1 \leq j \leq m} r_{ij} + (1 - p) \min_{1 \leq j \leq m} r_{ij} \right\}$.

При $p = 0$ вибір альтернативи здійснюється з умови найменшого з всіх можливих ризиків, при $p = 1$ – маємо фактичний вибір за критерієм Севіджа.

Взагалі вибора певного критерія залежить від схильності СПР до ризику, від цього залежить і вибір коефіцієнта песимізму у критерія Гурвіца. У випадку, коли за вибраному критерію рекомендується до використання кількох альтернатив, тоді можна прийняти до розгляду додатково інший критерій, або додатково використовувати інший показник, наприклад, середнє квадратичне відхилення вигришу для кожної альтернативи.

Отже, при відсутності інформації про ймовірності можливих станів зовнішнього середовища теорія не надає однозначних строгих рекомендацій з вибору критерія прийняття рішення. Це пояснюється невизначеністю самої ситуації. Єдиний вихід у цій ситуації – це отримання додаткової інформації, що дозволило б оцінити ймовірностей майбутніх станів зовнішнього середовища. Без неї рішення приймається в основному суб'єктивно внаслідок суб'єктивного вибору критерія прийняття рішення. Про те при цьому використання

розглянутих критеріїв дозволяє певною мірою упорядкувати альтернативи по значимості для СПР і при цьому уточнює уявлення про проблему, відносно якої приймається рішення. Таке впорядкування сприяє підвищенню якості прийнятого рішення.

При відомих ймовірностей майбутніх станів зовнішнього середовища альтернатива вибирається в умовах ризику. Тоді для вибора оптимальної альтернативи можна використати критерій Байєса, або критерія мінімуму дисперсії виграша. Для матриці виграшів **критерій Байєса** полягає у виборі альтернативи для якої математичне сподівання виграша буде найбільшим. Якщо цей критерій застосовується для матриці ризику, то тоді навпаки: оптимальною вважається альтернатива, для якої математичне сподівання ризику втрачених можливостей буде найменше.

Якщо всі можливі стани зовнішнього середовища вважаються рівноймовірними, то для вибору оптимальної альтернативи можна використовувати **критерій Лапласа**. Згідно з нею оптимальною альтернатива, для якої сума всіх можливих виграшів є максимальною.

При прийнятті рішень про інвестуванні у цінних папери виникає проблема узгодженості їх надійності та доходності. Якщо відомі ймовірності змін доходності цін паперів, то прийняти рішення про інвестування, можна використовувати критерій Байєса, або на основі розрахунку коефіцієнту варіації доходності. При відсутності такої інформації для вибору альтернативу доводиться застосовувати критерії прийняття рішення в умовах невизначеності. Одним з таких критеріїв є критерій добутків. Він дозволить вибрати варіант інвестування, де поєднується дохідність та надійність. При використанні цього критерія розраховується добуток елементів у кожному рядку матриці виграші. При інвестуванні у придбанні акцій, потенціальний інвестор можна зібрати інформацію про дохідність акцій за останні періоди часу й використати для прийняття рішень. Високі коливання доходності свідчить про ненадійності акцій. При малих коливаннях середня дохідність невисока. Розглянемо на прикладі, як критерій добутку узгоджує рівень доходності та рівень коливання курсу цінних паперів на прикладі.

Приклад. Маємо дані про динаміку доходності акцій компаній А, В, С за три місяці. Акції якої компанії потрібно вибрати?

Емітент акцій	Дохідність у % річних			Добуток доходностей	Ваговий коефіцієнт β_i
	Січень, $i=3$	Лютий $i=2$	Березень, $i=1$		
А	10	30	20	6000	0,5
В	5	33	25	4125	0,25
С	19	19	19	6859	0,125

Розв'язування. При виборі акції потрібно враховувати дохідність не одного якогось періоду, а середню за довгий проміжок часу. При розрахунку

середнє анулюються випадкові короткотермінові коливання. По окремих компаніях середня доходність складає тут 20%, 21% та 19%. На основі середньої доходності найпривабливішими є акції компанії В, проте у неї спостерігається найбільші коливання доходності, тобто вона ризикована. Найбільш надійною є компанія С, у якої відсутні коливання доходності. Для вибору оптимальної альтернативи застосуємо критерій добутку. Для цього знайдем добутки доходності для кожного варіанту інвестування. За максимуму добутку доходності слід віддати перевагу акціям компанії С.

Суттєвим недоліком критерієм добутку є те, що він не здатний враховувати тенденції в зміні доходності. Наприклад, доходності за акціями компанії A_1 за останні три роки 10%, 20%, 30%; для акцій компанії A_2 – 30%, 20%, 10%. За критерієм добутку вони рівноцінні. Щоб усунути цей недолік, в розрахунок критерію добутку для окремих періодів часу потрібно ввести вагові коефіцієнти, які зменшуються при зростанні віддаленості відповідного періоду часу. Для розрахунку цих вагових коефіцієнтів вводять параметр згладжування $\alpha = \frac{2}{n+1}$, n – кількість періодів часу, що враховують. Для i -го періоду часу відповідає ваговий коефіцієнт $\alpha(1 - \alpha)^{i-1}$. Значенню $i=1$ відповідає останній, найближчий до нинішнього, період часу, відлік періодів часів йде у минуле, $i=1, 2, \dots, n$. Позначимо ваговий коефіцієнт для i -го порядку часу $\beta_i = \alpha(1 - \alpha)^{i-1}$. Для розглянутого вище прикладу $\alpha = \frac{2}{3+1} = 0,5$. При розрахунку критерію добутку окремі співмножники входять у степенях, що дорівнюють ваговим коефіцієнтам для відповідним періодам часу. Для акцій A_1 та A_2 маємо розрахунок критерію добутку: $P_1 = 10^{0,125} \cdot 20^{0,25} \cdot 30^{0,5} = 15,38$. $P_2 = 30^{0,125} \cdot 20^{0,25} \cdot 10^{0,5} = 7,67$. Отже, $P_1 > P_2$, тобто вибираємо варіант інвестування у акції A_1 . Критерій добутків з введенням ваговими коефіцієнтами називають модифікованим критерієм добутку. Аналіз застосування модифікованого критерія добутку свідчить про те, що він орієнтує інвестора на дуже обережну поведінку, що може привести до втраченого прибутку, але дозволяє запобігти збитки.

Задачі на використання критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику

1. Відділ збуту компанії надав дані керівництву компанії про прогнозовані значення обсягу збуту товару при 3 варіантах ціни. Ці дані наведені у таблиці.

Можлива ціна (г.о.)	8.00	8.60	8.80
Прогнозований обсяг реалізації за такої ціні (одиниць товару у рік)			
Кращий з можливих	16000	14000	12500

Найбільш ймовірний	14000	12500	12000
Гірший зі всіх можливих	10000	8000	6000

Сталі витрати складають 40000 г.о. у рік, змінні – 4 г.о. на одиницю товару. Визначити оптимальну ціну за одиницю товару, використовуючи: а) критерій Вальда; б) критерій максимакс, критерій Гурвіца при $p=0,5$.

Розв'язання. Побудуємо платіжну матрицю у вигляді матрицю виграшу. Розрахуємо її елементи: $a_{11}=16(8-4)-40=24$ (тис.г.о.), $a_{12}=14(8-4)-40=16$ (тис.г.о.) і т.д.

Альтернативи (варіант ціни)	Стан зовнішнього середовища (обсяг реалізації)		
	Найкращий	Найбільш ймовірний	Найгірший
A1 (8.00)	24	16	0
A2 (8.60)	24,4	17,5	-4
A3(8.80)	20	17,6	-11,2

Застосуємо критерій Вальда. Виберемо для кожної альтернативи мінімальний елемент. Оптимальна альтернатива (за критерієм Вальда), для якої він найбільший. $\max\{0; -4; -11,2\} = 0$. Це відповідає альтернативі A1, тобто вибирає ціну 8 г.о. Застосуємо для вибору оптимальної альтернативи максимакс-критерій: $\max\{24; 24,4; 20\} = 24,4$. За цим критерієм оптимальною є альтернатива – ціна 8,60 г.о. Розрахуємо значення критерія Гурвіца для кожної з альтернативи.

$z_i = p \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} + (1 - p) \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$. $z_1 = 0,5(24 + 0) = 12$, $z_2 = 0,5(24,4 - 4) = 10,2$, $z_3 = 0,5(20 - 11,2) = 0,5 \cdot 8,8 = 4,4$. $H_{\max} = z_1 = 12$. Отже, за цим критерієм оптимальною є альтернатива A1.

2. Власник кондитерської приймає рішення про кількість тортів, які потрібно замовити на наступний день. Кожний торт він закупляє за 7 г.о., а продає по 13 г.о. Непроданий торт продати на наступний день неможливо. Потрібно визначити, скільки тортів потрібно придбати на початок кожного дня, якщо денний попит на них колихається від 6 до 9 одиниць. Використавши: а) критерій Вальда; б) критерій максимакса; в) критерій Севіджа, г) критерій Лапласа.

Розв'язування. Побудуємо матрицю виграшу для задачі. Альтернативи – це кількість тортів, які потрібно закупати на наступний день. Стан зовнішнього середовища – це стан попиту. Знайдемо елементи матрицю виграшу. На кожному проданому торті прибуток складає 6 г.о., на кожному непроданому – збиток 7 г.о. Маємо $a_{1i} = 6 \cdot 6 = 36, i = 1,2,3$.

Альтернатива	Стан попиту			
	6	7	8	9
A1 (6)	36	36	36	36
A2 (7)	29	42	42	42

A3(8)	22	35	48	48
A4 (9)	15	28	41	54

Застосуємо критерій Вальда. $\max_i \min_j a_{ij}$. $\max\{36; 29; 29; 15\} = 36$. Це значення відповідає альтернативі A1, закупівля 6 тортів. Використаємо максимакс-критерій. $\max\{36; 42; 48; 54\} = 64$. За цим критерієм оптимальною є альтернатива A4 – закупівля 9 тортів. Для застосування критерія Севіджа потрібно на основі матриці виграшу побудувати матрицю ризику. Для цього у кожному j – му стовпчику матриці виграшу виберемо максимальний елемент β_j . Елементи матриці ризику $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$.

Альтернатива	Стан попиту			
	6	7	8	9
A1 (6)	0	7	12	18
A2 (7)	7	0	6	12
A3(8)	14	7	0	6
A4 (9)	21	14	7	0

У кожному рядку матриці ризику виберемо максимальний елемент. Оптимальною за критерієм Севіджа вважається альтернатива, де цей елемент є найменшим по відношенням до інших альтернатив. $\min\{18; 12; 14; 21\} = 12$. Він відповідає альтернативі A2.

Для вибору оптимальної альтернативи за критерієм Лапласа оптимальною альтернатива є, для якої сума елементів її рядку матриці виграшів є максимальною. $\sum a_{1j} = 144, \sum a_{2j} = 155; \sum a_{3j} = 153; \sum a_{4j} = 138$. Максимальною сума відповідає альтернативі A2.

3. Пекарня випікає хліб на продажу у магазини. Собівартість 1 булки складає 3 г.о., а продають за 4 г.о. Щоденний попит може складати 10 тис., 12 тис., 14 тис. та 16 тис. булок на день. Якщо булка випечена, а не продана, то збитки складає 2 г.о. на одиниці. Визначити, скільки булок повинна випікати пекарня за день. Використати: а) критерій Вальда; б) критерій Севіджа; в) максимакс-критерій; г) критерій Гурвіца зі значеннями $p=0,7$ та $p=0,4$; д) критерій Лапласа.

4. Підприємство з виготовлення безалкогольних напоїв випускає фірменний напій, який розливається у 40-літрові діжки. Напій готується на протязі тижня, а кожний понеділок чергова партія готова до продажу. Змінні витрати на виробництво 1 л напою складають 0,7г.о., він продається за ціною 1,5г.о.. Оскільки напій швидко псується, то, якщо у кінці тижня залишається його непроданий запас, то він продається на 0,5 г.о. дешевше за літр. За останні 90 тижнів маємо наступні значення попиту.

Попит у діжках	3	4	5	6	7
Кількість тижнів	5	10	15	10	10

Визначити щотижневий обсяг виробництва напою, користуючись критерієм Байєса, критерієм Вальда, максимакс-критерієм, критерієм Севіджа, критерієм Лапласа.

5. Підприємство розпочинає виробництво нових для себе товарів. Можливі 4 альтернативи: x_1, x_2, x_3, x_4 , кожної з якої відповідає виробництво певного товару. Величина прибутку від реалізації кожного товару залежить від стану попиту на нього. Величина попиту можлива у 3 варіантах $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. У платіжній матриці (матриці виграшу) вказані значення прибутку для кожного поєднання альтернативи та стану попиту.

	θ_1	θ_2	θ_3
A_1	2,5	3,5	4,0
A_2	1,5	2,0	3,5
A_3	3,0	8,0	2,5
A_4	6,0	1,0	3,0

Вибрати оптимальну альтернативу, користуючись критеріями Лапласа, Вальда та максимакс-критерієм.

6. Торгівельна компанія з власним капіталом 300 тис. г.о. вирішила відкрити новий магазин. При сприятливій економічній ситуації, ймовірності якої становить 0,6 на протязі року вона отримує прибуток 200 тис. г.о., інакше збитки складуть 150 тис. г.о. Аналогічний магазин вирішив відкрити приватний підприємець з власним капіталом 50 тис. г.о., взявши кредит для цього 40 тис. г.о. під 18% річних на 1 рік. Знайти коефіцієнтів варіації прибутків та ризику банкрутства для компанії та підприємця.

7. Видавництво збирається видати нову книгу. За даними відділу маркетингу видавництва обсяг її продаж з ймовірністю 0,4 складе 150 тис. екземплярів, 250 тис. екземплярів з ймовірністю 0,5, 50 тис. екземплярів з ймовірністю 0,1. Витрати на видання 1 екземпляра становлять 1,6 г.о., запланувати продавати – за ціною 3,5 г.о. Знайти математичне сподівання прибутку видавництва, її стандартне відхилення та коефіцієнт варіації.

8. У інвестора наявні дані про доходності акцій компаній А, В, С за три квартали минулого року, наведені у таблиці. Використовуючи модифікований критерій добутків, вибрати варіант інвестування у акції однієї з цих компаній.

Емітент акцій	Доходність у % річних		
	Січень, $i=3$	Лютий $i=2$	Березень, $i=1$
А	20	15	10
В	22	18	20
С	12	15	20

9. Підприємець збирається придбати акції однієї з компанії А чи В. Їх норма прибутку є випадковою величиною та залежить від стану економіки. На думку експертів зараз на ринку можливі дві ситуації. У першій ситуації курс акцій А зростає на 10%, курс акцій В знижується на 2%. У другій ситуації курс акцій А зростає на 2%, акцій В – на 15%. Ймовірність першої ситуації 0,4, другої ситуації 0,6. Які акції він повинен придбати?