

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$,

де D – прямокутник ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$).

► Область D (рис.3.4) є правильною як у напрямі осі Oy , так і осі Ox .

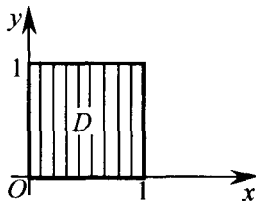


Рис.3.4

Тоді за формулою (3.2) маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \\ &= \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \left(\arctg y \Big|_0^1 \right) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що у цьому прикладі внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування і тому він дорівнює сталій величині. У даному випадку подвійний інтеграл перетворився на добуток двох визначених інтегралів. ◀

Приклад 2. Знайти межі інтегрування подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$, якщо область D є трикутник, обмежений

лініями: $y = 0$, $y = 2 - x$, $x = 0$.

► Область D (рис.3.5) є правильною як у напрямі осі Oy , так і осі Ox .

Тоді за формулою (3.2) маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

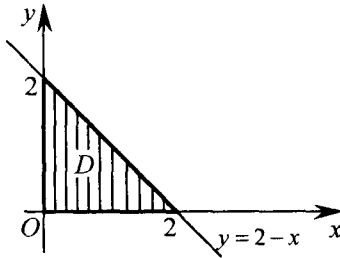


Рис.3.5 ◀

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy$.

► Область інтегрування D (рис.3.6) обмежена лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$. З останніх двох рівнянь маємо: $x = y^2$, $x = 2 - y$.

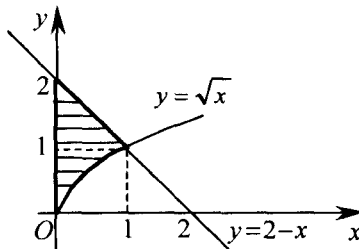


Рис.3.6

Пряма $y = 1$ розбиває область D на області D_1 і D_2 , де

$$D_1: 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y^2, \quad D_2: 1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 2 - y.$$

Отже,

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Обчислити повторний інтеграл $\int_1^2 dx \int_0^x y dy$.

$$\blacktriangleright \int_1^2 dx \int_0^x y dy = \int_1^2 \left(\int_0^x y dy \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^x \right) dx = \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_1^2 = \frac{7}{6}. \quad \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xy^2 dx dy$, де область D обмежена лініями $x=0$, $x=1$, $y=x^2$, $y=x$.

► Область D зображена на рис.3.7. Ця область правильна у напрямі як осі Oy , так і осі Ox . Для обчислення даного інтеграла можна користуватись як формулою (3.2), так і формулою (3.3).

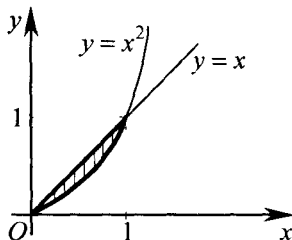


Рис.3.7

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x y^2 dy = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^x y^2 dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^x \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x(x^3 - x^6) dx = \frac{x^5}{15} \Big|_0^1 - \frac{x^8}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Приклад 6. Перейти у подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ до полярних координат, якщо область D обмежена колом $x^2 + y^2 = 2x$.

► Перетворимо рівняння $x^2 + y^2 = 2x$ до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат відносно змінної x . Маємо $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Отже, це рівняння кола з центром $O_1(1, 0)$ радіуса $R=1$, а область D відповідно круг (рис.3.8).

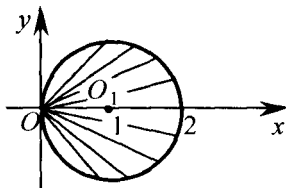


Рис.3.8

Перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, тоді рівняння кола набуває вигляду $\rho = 2 \cos \varphi$, причому змінна φ задовольняє умові:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \text{ бо } \rho \geq 0, \text{ а } 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi.$$

Тоді за формулою (3.8) маємо

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi, & D \rightarrow D', \\ y = \rho \sin \varphi, & D': 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right| = \\ &= \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Приклад 7. Обчислити $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, де область D є круг радіуса R з центром у початку координат: $x^2 + y^2 \leq R^2$.

► Зробимо заміну змінних: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, тоді рівняння $x^2 + y^2 = R^2$ перетвориться на $\rho = R$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Тоді за формулою (3.8) маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi, & D \rightarrow D', \\ y = \rho \sin \varphi, & D': 0 \leq \rho \leq R, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{array} \right| = \iint_{D'} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \int_0^R e^{-\rho^2} d(-\rho^2) \right) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(e^{-\rho^2} \Big|_0^R \right) d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(e^{-R^2} - 1 \right) d\varphi = \frac{1 - e^{-R^2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

де область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

► Перейдемо до узагальнених полярних координат, поклавши:
 $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$. Тоді рівняння еліпса у цих координатах:

$$\frac{a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

Отже, $0 \leq \rho \leq 1$. Кут. φ змінюється від 0 до 2π . Тоді

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy &= \left| \begin{array}{ll} x = a\rho \cos \varphi, & D \rightarrow D', \\ y = b\rho \sin \varphi, & D' : 0 \leq \rho \leq 1, \\ dx dy = ab\rho d\rho d\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{array} \right| = \\ &= \iint_{D'} \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= ab \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2(1 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} \pi ab. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 3.1 – 3.9 обчислити повторні (двократні) інтеграли.

$$3.1. \int_0^1 dx \int_0^2 xy dy. \qquad 3.2. \int_0^{2b} dx \int_0^a (a - y)x^2 dy.$$

$$3.3. \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1 + y^2} dy. \qquad 3.4. \int_1^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho \sin \varphi d\varphi.$$

$$3.5. \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x+y} dy. \qquad 3.6. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy.$$

$$3.7. \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx. \qquad 3.8. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$$

$$3.9. \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} dy.$$

У задачах 3.10 – 3.19 визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ для заданої області інтегрування D .

3.10. D – прямокутник: $2 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 3$.

3.11. D – трикутник, обмежений прямими: $x + y = 6$, $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$.

3.12. D – трикутник: $x + y \leq 1$, $x - y \leq 1$, $x \geq 0$.

3.13. D – паралелограм, обмежений прямими: $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

3.14. D – чверть круга: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

3.15. D – область, обмежена параболою: $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

3.16. D – область, обмежена параболою: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

3.17. D : $y \leq \frac{2}{1+x^2}$, $y \geq x^2$.

3.18. D : $y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, $x \leq 2$.

3.19. D : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

У задачах 3.20 – 3.29 змінити порядок інтегрування в заданих інтегралах.

$$\text{3.20. } \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$\text{3.21. } \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$\text{3.22. } \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$\text{3.23. } \int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$\text{3.24. } \int_2^4 dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy.$$

$$\text{3.25. } \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy.$$

$$3.26. \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3.27. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

$$3.28. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy.$$

$$3.29. \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy.$$

У задачах 3.30 – 3.40 обчислити подвійний інтеграл по заданій області D .

3.30. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де D – область, обмежена параболою $y = x^2$ та прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

3.31. $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$, де D – трикутник, обмежений прямими $y = \frac{x}{2}$, $y = x$, $x = 4$.

3.32. $\iint_D \frac{y^3}{x^2} dx dy$, де D – область, обмежена параболою $y = \sqrt{x}$ та прямими $y = \frac{x}{3}$, $x = 1$.

3.33. $\iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy$, де D – прямокутник $0 \leq x \leq 1$, $2 \leq y \leq 3$.

3.34. $\iint_D (x + y) dx dy$, де D – область, обмежена параболою $y = 4 - (x - 1)^2$ та прямими $x = 0$, $y = \frac{3x}{2}$.

3.35. $\iint_D (1+x+y) dx dy$, де D – область, обмежена параболою $x = \sqrt{y}$ та прямими $y = -x$, $y = 2$.

3.36. $\iint_D xy^2 dx dy$, де D – область, обмежена параболою $y = 2 - x^2$ та прямими $y = x$, $x = 0$.

3.37. $\iint_D \sqrt{xy - y^2} dx dy$, де D – трикутник з вершинами $O(0, 0)$, $A(10, 1)$ і $B(1, 1)$.

3.38. $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, де D – область, обмежена параболою $y^2 = x$ та прямими $x = 0$, $y = 1$.

3.39. Перейти у подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ до полярних координат ρ і φ та розставити межі інтегрування:

а) D – круг: $x^2 + y^2 \leq by$;

б) D – область, що обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ та прямими $y = x$, $y = 2x$;

в) D – область, що обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$;

г) D – сегмент, який відтинається від кола $x^2 + y^2 = 4$ прямою $x + y = 2$;

д) D – внутрішня частина правої петлі лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3.40. Перетворити задані інтеграли до полярних координат:

$$\text{а) } \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy;$$

$$\text{б) } \int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry - y^2}} f(x, y) dx.$$

У задачах 3.41 – 3.50 перейти у подвійному інтегралі до полярних координат та обчислити його.

$$3.41. \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx dy, \text{ де } D - \text{круг радіуса } R = 2 \text{ з цен-}$$

тром у початку координат: $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$3.42. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ де } D - \text{кільце: } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$3.43. \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx dy, \text{ де область } D \text{ обмежена лем-}$$

ніскатаю Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geq 0, a > 0)$.

$$3.44. \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy, \text{ де } D - \text{область, що обмежена ко-}$$

лом $x^2 + y^2 = 2ax \quad (a > 0)$.

$$3.45. \iint_D \arctg \frac{y}{x} \, dx dy, \text{ де } D - \text{частина кільця: } x^2 + y^2 \geq 1,$$

$$x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x\sqrt{3}.$$

$$3.46. \iint_D y \, dx dy, \text{ де } D - \text{півкруг діаметра } a \text{ з центром у}$$

точці $C(a/2, 0)$: $x^2 + y^2 \leq ax, y \geq 0$.

$$3.47. \iint_D (1 - 2x - 3y) \, dx dy, \text{ де } D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

3.48. Перетворити задані інтеграли до узагальнених полярних координат:

$$а) \iint_D f(x, y) \, dx dy, \text{ де область } D \text{ обмежена еліпсом}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i ,$$

яка не залежить від способу розбиття області G на частинні області G_i та від вибору точок $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області G .

Потрійний інтеграл позначається так:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV, \quad \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz, \quad \iiint_G f(P) dV.$$

Отже, за означенням

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i.$$

Теорема. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G , то існує потрійний інтеграл від функції $f(x, y, z)$ по області G .

Обчислення потрійного інтеграла

Означення. Якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області G паралельно осі Oz , перетинає границю області G у двох точках, а проекція G на площину xOy є правильною областю D , то область G називається *правильною* у напрямі осі Oz .

Аналогічно вводиться означення правильної області у напрямках осей Ox і Oy .

Нехай область G обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$ відповідно, а з боків *циліндричною* поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz . Позначимо проекцію області G на площину xOy через D , тобто $\text{пр}_{xOy} G = D$ (рис.3.9).

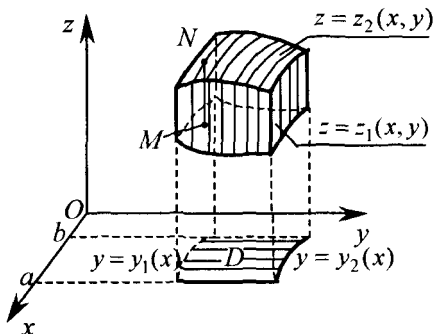


Рис.3.9

§3. Застосування кратних інтегралів

1. Короткі теоретичні відомості

Геометричні застосування подвійного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур

Площа S_D області $D \subset \mathbf{R}^2$ обчислюється за формулою:

$$S_D = \iint_D dx dy. \quad (3.20)$$

Якщо $D: \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис.3.14), то

$$S_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \quad (3.21)$$

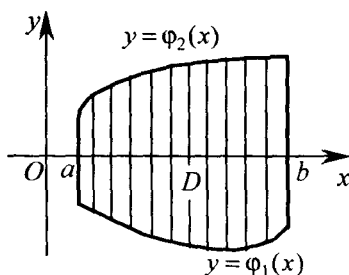


Рис.3.14

Якщо $D: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$ (рис.3.15), то

$$S_D = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx. \quad (3.22)$$

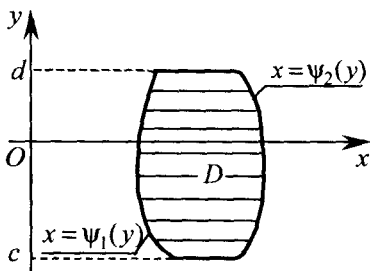


Рис.3.15

Якщо область D обмежена лініями, рівняння яких задаються у полярній системі координат $D: \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рис.3.16), то площа S_D обчислюється за формулою:

$$S_D = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \, d\rho. \quad (3.23)$$

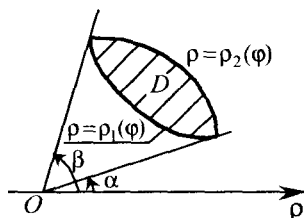


Рис.3.16

Обчислення об'єму тіла

Об'єм циліндричного тіла G , твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини xOy , а зверху – поверхнею $\sigma: z = f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$ в області D , $\text{пр}_{xOy} \sigma = D$ (рис.3.17), обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy. \quad (3.24)$$

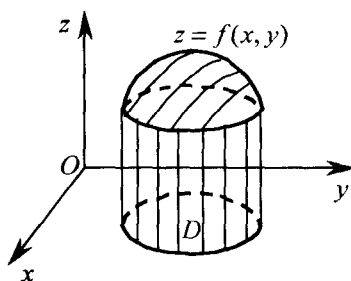


Рис.3.17

Якщо тіло G обмежене знизу поверхнею з рівнянням $z = f_1(x, y)$, зверху – поверхнею з рівнянням $z = f_2(x, y)$, а проекція верхньої та нижньої поверхонь на площину xOy є областю D (рис.3.18), то об'єм тіла G обчислюється за формулою:

$$V_G = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) \, dx \, dy. \quad (3.25)$$

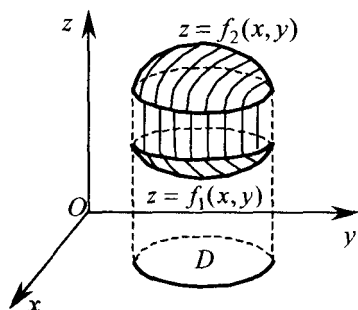


Рис.3.18

Обчислення площі поверхні

Якщо поверхня σ задається рівнянням $z = f(x, y)$ і її проекція на площину xOy є замкнена область D , то площа S_σ поверхні σ обчислюється за формулою:

$$S_\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy. \quad (3.26)$$

Фізичні застосування подвійного інтеграла

Обчислення маси матеріальної пластинки

Якщо пластинка лежить у площині xOy і має форму замкненої області D , в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x, y)$, то маса m пластинки обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy. \quad (3.27)$$

Середня густина $\mu_{\text{сеп}}$ матеріальної пластинки

Якщо маса пластинки дорівнює m , а площа пластинки S , то середня густина пластинки

$$\mu_{\text{сеп}} = \frac{m}{S} = \frac{\iint_D \mu(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad (3.28)$$

де $\mu(x, y)$ – густина пластинки у кожній точці пластинки.

Статичні моменти пластинки D відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами:

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy.$$

У випадку однорідної пластинки $\mu = \text{const}$.

Координати центра ваги пластинки обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса пластинки, M_x, M_y – її статичні моменти відносно координатних осей.

У випадку однорідної пластинки ці формули приймають вигляд:

$$x_c = \frac{\iint_D x \, dx dy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \, dx dy}{S},$$

де S – площа області D .

Моменти інерції пластинки D відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) \, dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) \, dx dy,$$

а момент інерції відносно початку координат – за формулою:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) \, dx dy = I_x + I_y.$$

Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'єму тіла

Об'єм тіла $G \subset \mathbf{R}^3$ обчислюється за формулою:

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (3.29)$$

Обчислення маси матеріального тіла $G \subset \mathbf{R}^3$

Якщо матеріальне тіло G має об'ємну густину $\mu = \mu(x, y, z)$, то маса тіла обчислюється за формулою:

$$m = \iiint_G \mu(x, y, z) \, dx dy dz. \quad (3.30)$$

Середня густина $\mu_{\text{сеп}}$ тіла G є відношенням маси тіла до його об'єму, тобто:

$$\mu_{\text{сеп}} = \frac{m}{V} = \frac{\iiint_G \mu(x, y, z) \, dx dy dz}{\iiint_G dx dy dz}, \quad (3.31)$$

де $\mu(x, y, z)$ – густина тіла G у кожній точці.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити площу фігури D , яка обмежена параболою $y = x^2 - 2x$ та прямою $y = x$.

► Побудуємо фігуру D за рівняннями її межі (рис.3.19).

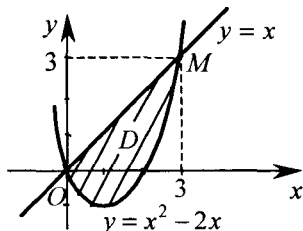


Рис.3.19

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases}$, знайдемо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y_1 = 0$, $y_2 = 3$ відповідно. Отже, лінії, що обмежують область, перетинаються в точках $O(0,0)$ та $M(3,3)$.

Область D задається системою нерівностей:

$$D: 0 \leq x \leq 3, x^2 - 2x \leq y \leq x.$$

Тоді

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^x dy = \int_0^3 (x - x^2 + 2x) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскою Бернуллі з рівнянням: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

► Оскільки лемніска Бернуллі (рис.3.20) симетрична відносно координатних осей, то $S = 4S_D$.

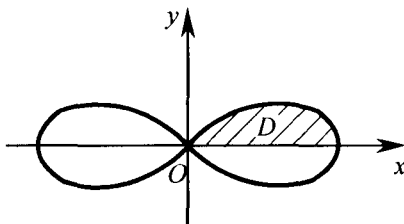


Рис.3.20

Перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, тоді рівняння лемніскати перетвориться на рівняння

$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi),$$

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \quad \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, маємо $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Тоді

$$S = 4S_D = 4 \iint_D dx dy = \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi, & D \rightarrow D', \\ y = \rho \sin \varphi, & D': 0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{array} \right| =$$

$$= 4 \iint_{D'} \rho d\rho d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= 4 \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 (\sin 2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла G , обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ та площинами $x + z = 4$, $z = 0$.

► Задане тіло G обмежено зверху площиною $x + z = 4$, знизу площиною $z = 0$ і з боків прямими циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ (рис.3.21а). Область інтегрування $D = \text{пр}_{xOy} G$ зображена на рис.3.21 б).

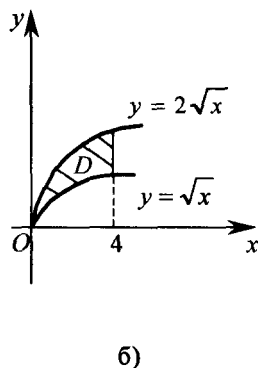
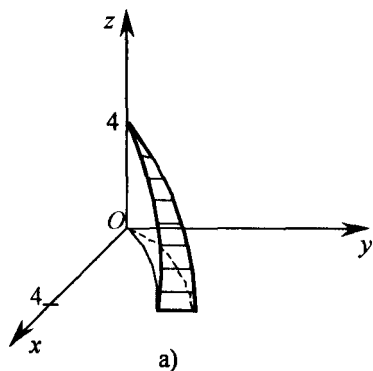


Рис.3.21

Змінна x змінюється від 0 до 4, тобто $0 \leq x \leq 4$; при будь-якому значенні з цього проміжку $\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}$. Крім того, $z = 4 - x$.

Отже,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (4-x) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy = \int_0^4 (4-x) y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^4 (4-x)(2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx = \int_0^4 (4-x)\sqrt{x} dx = \int_0^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \\ &= \left(4 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене циліндром $x^2 + y^2 = Rx$ і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($x \geq 0$), за допомогою подвійного інтеграла.

► Перша поверхня є циліндр із твірною, паралельною осі Oz , і прямою: $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$, друга – сфера із центром у початку координат і радіусом R . Від перетину двох поверхонь утворюється тіло, яке має дві симетричні частини відносно площини xOy . Проекцію цього тіла на площину xOy зображено на рис.3.22. Це є круг. На рисунку заштриховано область D – півкруга. Об'єм тіла обчислюється за формулою (3.24), де $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Враховано симетрію тіла і симетрію проєкції цього тіла на площину xOy .

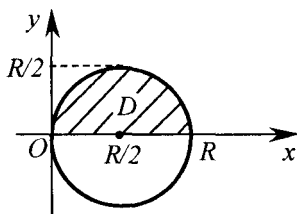


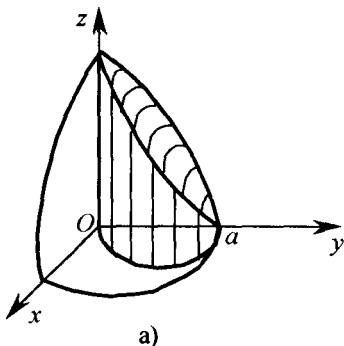
Рис.3.22

$$V = 4 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi, & D \rightarrow D', \\ y = \rho \sin \varphi, & D' : 0 \leq \rho \leq R \cos \varphi, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right| =$$

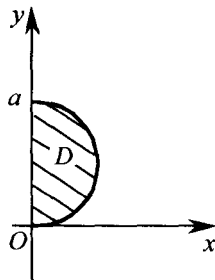
$$\begin{aligned}
&= 4 \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho = \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \right) d\varphi = -\frac{2 \cdot 2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right) \bigg|_0^{R \cos \varphi} d\varphi = \\
&= -\frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1 - \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\varphi = -\frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi - 1) d\varphi = \\
&= -\frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi + \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d \cos \varphi + \frac{4}{3} R^3 \frac{\pi}{2} = \\
&= \frac{4}{3} R^3 \left(\cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} R^3 \left(-1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \pi R^3 = \\
&= \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{8}{9} R^3 = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = ay$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

► Частина сфери, що знаходиться в першому октанті і міститься всередині циліндра, проектується у півкруг, обмежений колом $x^2 + y^2 = ay$ та віссю Oy (рис.3.23).



а)



б)

Рис.3.23