

Маємо рівняння кола $x^2 + y^2 = 4$.

в) Знайдемо перетин із площинами $z = 1$ і $z = -1$:

$$\begin{cases} y = 1, \\ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0. \end{cases}$$

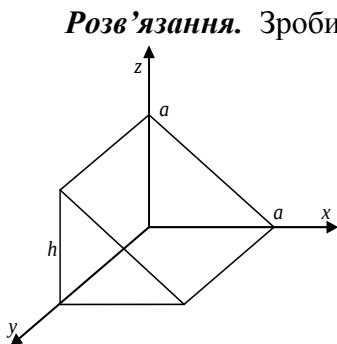
Одержуємо рівняння гіперболи $\frac{z^2}{2^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$.

Побудувавши всі перерізи в декартовій системі координат, зображаємо шукану поверхню (рис. 3.9).

Для того щоб зобразити тіло, зображають поверхні, що обмежують його, та лінії перерізів цих поверхонь.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_{(T)} x dx dy dz$, де область (T) обмежена площинами

$$x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a.$$



Розв'язання. Зробивши рисунок (дивись рис. 3.10), можна помітити, що дана область інтегрування обмежена зверху площиною $x + z = a$, знизу – площиною $z = 0$, тому для змінної z маємо нерівності:

$$0 \leq z \leq a - x.$$

Проекцією даного тіла в площині xOy є прямокутник

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h.$$

Тому

Рисунок 3.10

одержуємо

$$\begin{aligned} \iiint_{(T)} x dx dy dz &= \int_0^a dx \int_0^h dy \int_0^{a-x} x dz = \int_0^a x dx \int_0^h dy \cdot z \Big|_0^{a-x} = \int_0^a x(a-x) dx \cdot y \Big|_0^h = \\ &= h \int_0^a (ax - x^2) dx = h \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{ha^3}{6}. \end{aligned}$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл

$\iiint_{(T)} ze^{x+y} dx dy dz$, якщо область (T) обмежена поверхнями

$$x = 2, \quad x = 3, \quad y^2 + z^2 = 1, \quad z = 0 \quad (z > 0).$$

Розв'язання. Область (T) зображена на рис. 3.11.

Маємо: $0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$, $-1 \leq y \leq 1$, $2 \leq x \leq 3$.

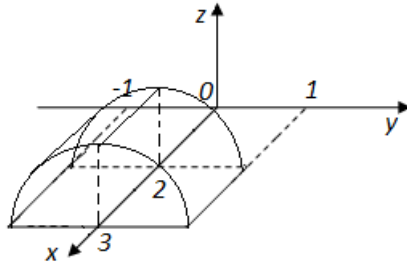


Рисунок 3.11

Тоді перейдемо до обчислення повторного інтеграла:

$$\begin{aligned} \iiint_{(T)} ze^{x+y} dx dy dz &= \iint_{(D)} e^{x+y} dx dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_2^3 e^x dx \int_{-1}^1 e^y (1-y^2) dy = \\ &= \frac{1}{2} (e^3 - e^2) \int_{-1}^1 e^y (1-y^2) dy = \left| \begin{array}{l} u = 1-y^2, \quad du = -2y dy, \\ dv = e^y dy, \quad v = e^y, \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} (e^3 - e^2) \left((1-y^2) e^y \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 y e^y dy \right) = \frac{1}{2} (e^3 - e^2) \cdot 2 \int_{-1}^1 y e^y dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = y, \quad du = dy, \\ dv = e^y dy, \quad v = e^y \end{array} \right| = e^2 (e-1) \left(y e^y \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^y dy \right) = e^2 (e-1) \cdot \frac{2}{e} = 2e(e-1). \end{aligned}$$

3.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай неперервні та диференційовні функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ взаємно однозначно відображають область (V) на область (V') .

Введемо до розгляду визначник

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \quad (3.14)$$

який за аналогією з двомірним випадком називається **якобіаном відображення**. Якщо $I \neq 0$ в області (V) , то справедлива формула заміни змінних у потрібному інтегралі:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(T')} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |I| du dv dw. \quad (3.15)$$

Виведення цієї формули аналогічне виведенню формули заміни змінних для подвійного інтеграла.

Змінні u, v, w називають криволінійними координатами точки (x, y, z) , а вираз $|I(u, v, w)| du dv dw$ – елементом об'єму в криволінійних координатах.

Розглянемо два випадки найбільш вживаних на практиці криволінійних координат: циліндричні та сферичні.

Циліндричними координатами точки $M(x, y, z)$ називають числа ρ, φ, z , де ρ і φ – полярні координати точки (x, y) (рис. 3. 12 а). Тоді формули переходу такі:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (3.16)$$

де $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$.

Якобіан переходу має вигляд $I(\rho, \varphi, z) = \rho$. Тому формула заміни змінних у циліндричних координатах під час роботи з потрібним інтегралом має вигляд

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(T')} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz. \quad (3.17)$$

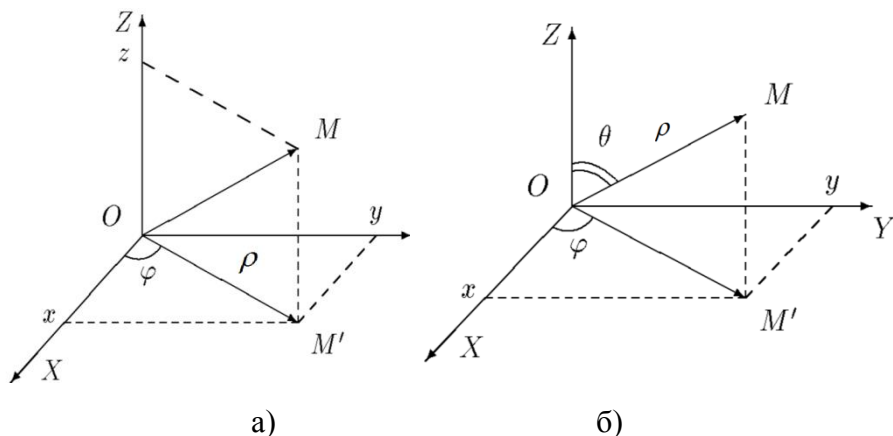


Рисунок 3.12

Сферичними координатами точки $M(x, y, z)$ називають числа ρ, φ, θ , де θ – кут між віссю Oz і радіусом-вектором OM точки M , ρ – довжина цього радіуса-вектора, φ – кут між проекцією OM' радіуса-вектора OM на площину xOy і віссю Ox (рис. 3.12 б). Маємо $OM' = \rho \sin \theta$, і тоді

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (3.18)$$

де $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Якобіан цього перетворення $I(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \theta$, тому формула заміни змінних у сферичних координатах така:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(T)} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \quad (3.19)$$

Приклад. Обчислити потрібний інтеграл

$$\iiint_{(G)} z dx dy dz, \quad \text{де } (G) \text{ – область, обмежена сферою}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ та параболоїдом обертання } x^2 + y^2 = 3z.$$

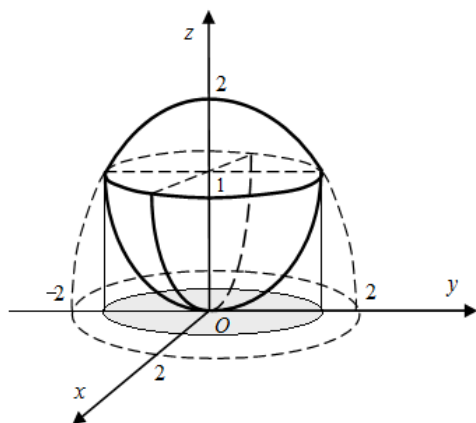
Розв'язання. Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ визначає сферу із центром на початку координат і радіусом $R = 2$, друга поверхня $x^2 + y^2 = 3z$ є параболоїдом обертання навколо осі Oz (рис. 3.13 а). Побудуємо область (G) та її проекцію (D) на площину xOy .

Для визначення області (D) розв'яжемо систему рівнянь:

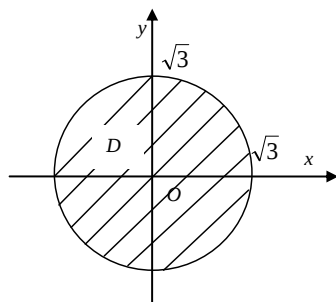
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - z^2, \\ x^2 + y^2 = 3z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - z^2 = 3z, \\ x^2 + y^2 = 3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 3z - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 = 3z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 = 1, z_2 = -4, (\text{не підходить}) \\ x^2 + y^2 = 3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 3z. \end{cases}$$



а)



б)

Рисунок 3.13

Маємо, що область (D) – це круг радіуса $\sqrt{3}$, центр якого збігається з початком координат, тобто (D) : $x^2 + y^2 \leq 3$ (рис. 3.13 б).

Перейдемо у потрібному інтегралі до циліндричних координат. Врахуємо, що у циліндричних координатах рівняння сфери $\rho^2 + z^2 = 4$ або $z^2 = 4 - \rho^2$;

рівняння параболоїда обертання $\rho^2 = 3z$ або $z = \frac{\rho^2}{3}$;

рівняння кола $\rho^2 = 3$. Отже,

$$(G^*): 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\rho^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \iiint_{(G)} z dx dy dz &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \quad dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \\ y = \rho \sin \varphi, \quad (G) \rightarrow (G^*) \\ z = z \end{array} \right| = \iiint_{(G^*)} z \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4\rho - \rho^3 - \frac{\rho^5}{9} \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{4\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{54} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(6 - \frac{9}{4} - \frac{27}{54} \right) = \frac{13}{4} \pi. \end{aligned}$$

Приклад. Обчислити потрібний інтеграл

$\iiint_{(G)} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}$, де (G) – верхня половина кулі радіуса R із центром на початку координат: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$.

Розв'язання. Перейдемо у потрібному інтегралі до сферичних координат. Врахуємо, що у сферичних

координатах рівняння сфери $r = R$. Проекцією півкулі на площину xOy є круг $x^2 + y^2 \leq R^2$. Отже, маємо

$$\iiint_{(G)} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} = \left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \sin \theta, dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, (G) \rightarrow (G^*) \\ z = r \cos \theta, G^*: 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \iiint_{(G^*)} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 + R^2} dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^R \frac{r^2 dr}{r^2 + R^2} = \varphi \Big|_0^{2\pi} \left(-\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\int_0^R \frac{r^2 + R^2 - R^2}{r^2 + R^2} dr \right) =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^R dr - R^2 \int_0^R \frac{dr}{r^2 + R^2} \right) =$$

$$= 2\pi \left(R - \frac{R^2}{R} \operatorname{arctg} \frac{r}{R} \Big|_0^R \right) = 2\pi \left(R - R \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2\pi R \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Питання для самоперевірки

1. Яким чином задача про масу матеріального тіла приводить до поняття потрійного інтеграла?
2. Що називають інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ в області (V) ? Запишіть її формулу, сформулюйте означення.
3. Що називають потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ в області (V) . Як він записується?

4. Сформулюйте умови існування потрійного інтеграла.
5. Надайте основні властивості потрійних інтегралів.
6. Сформулюйте та доведіть теорему про обчислення потрійного інтеграла в прямокутному паралелепіпеді.
7. Запишіть формулу для обчислення потрійного інтеграла для функції $f(x, y, z)$ в області (V) .
8. Чи можна змінювати порядок інтегрування у потрійному інтегралі?
9. Дайте означення понять тіла та поверхні в просторі.
10. Що називається площиною у просторі. Як записується рівняння площини?
11. Які поверхні другого порядку ви знаєте? Наведіть приклади.
12. У чому полягає суть методу перерізів під час побудови об'ємів?
13. Як відбувається заміна змінних у потрійному інтегралі?
14. Як задаються циліндричні координати точки $M(x, y, z)$?
15. Запишіть формулу переходу до циліндричних координат у потрійному інтегралі.
16. Як задаються сферичні координати точки $M(x, y, z)$?
17. Запишіть формулу переходу до сферичних координат у потрійному інтегралі.

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

4.1. Геометричне та фізичне застосування потрійного інтеграла

Розглянемо вираз об'єму довільної кубовної області у вигляді потрійного інтеграла. З очевидної рівності $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta V_k = V$ (як би ми не розбивали область (V) на частинні області, ми матимемо об'єм усієї області (V)) випливає

$$\lim_{d_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta V_k = V, \quad (4.1)$$

тобто *об'єм просторового тіла*, обмеженого областю (V) , обчислюється за формулою

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz. \quad (4.2)$$

Маса тіла V з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.3)$$

Моментом інерції тіла відносно деякої осі L називають інтеграл $I_L = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) \cdot l^2 dx dy dz$, де l – відстань змінної точки тіла (x, y, z) до осі.

Моменти інерції тіла відносно координатних осей задаються формулами:

$$I_x = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.4)$$

$$I_y = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.5)$$

$$I_z = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.6)$$

Для однорідних тіл $\gamma(x, y, z) = 1$.

Моменти інерції тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$I_{yx} = \iiint_{(V)} z^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.7)$$

$$I_{yz} = \iiint_{(V)} x^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.8)$$

$$I_{xz} = \iiint_{(V)} y^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.9)$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$S_{yx} = \iiint_{(V)} z \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.10)$$

$$S_{yz} = \iiint_{(V)} x \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.11)$$

$$S_{xz} = \iiint_{(V)} y \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.12)$$

Координати центра тяжіння тіла (V) знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}. \quad (4.13)$$

Приклад. Знайти момент інерції куба зі стороною a відносно його ребра.

Розв'язання. Вибираємо систему координат, початок якої – точку O – помістимо в одну з вершин. Тоді нерівності, що визначають область інтегрування, запишемо у вигляді

$$(V): 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a.$$

Момент інерції куба відносно ребра в такій системі координат можна обчислити, використавши формулу $I^2 = y^2 + z^2$. В цьому разі ребро куба вибране вздовж осі Ox . Отже,

$$\begin{aligned} I_L &= \iiint_{(V)} I^2 dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2) dz = \\ &= \int_0^a dx \int_0^a \left(y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_0^a dy = \int_0^a dx \int_0^a \left(ay^2 + \frac{1}{3} a^3 \right) dy = \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{3} ay^3 + \frac{1}{3} a^3 y \right) \Big|_0^a dx = \frac{2}{3} a^4 \int_0^a dx = \frac{2}{3} a^5. \end{aligned}$$

Відмітимо також, що в цій задачі не було необхідності виконувати креслення. Достатньо записати нерівності, що визначають область.

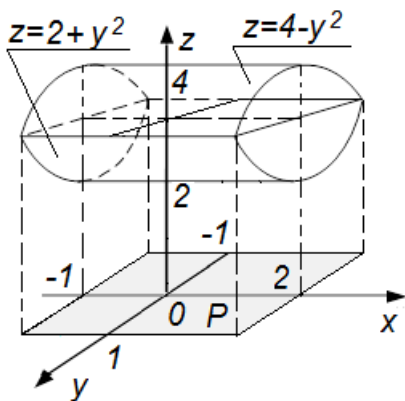


Рисунок 4.1

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1$, $x = 2$

Розв'язання. Поверхні $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ – це параболічні циліндри з твірними, паралельними осі Ox , і напрямними параболою $z = 4 - y^2$ та

$z = y^2 + 2$ у площині yOz відповідно (рис. 4.1). Площини $x = -1$, $x = 2$ паралельні площині yOz і відсікають на осі Ox відрізки довжиною 1 та 2 відповідно.

Проекцією цього тіла, тобто областю інтегрування, є прямокутна область (P) у площині xOy .

Тобто об'єм даного тіла виражається інтегралом

$$V = \int_{-1}^2 dx \int_{-1}^1 dy \int_{2+y^2}^{4-y^2} dz = \int_{-1}^2 dx \int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy = 2 \int_{-1}^2 dx \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 8.$$

Отже, $V = 8$ (куб. од.).

Приклад. Обчислити об'єм фігури, обмеженої поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$.

Розв'язання. Зобразити дану поверхню в прямокутній системі координат дуже важко, так само як і обчислити інтеграл. Тому під час обчислення інтеграла перейдемо до сферичних координат за допомогою формул (3.18). Після перетворення рівняння поверхні $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$ набере вигляду: $\rho = a\sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}$. Звідси маємо межі інтегрування за змінною ρ : $0 \leq \rho \leq a\sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}$.

Визначимо межі за змінними θ і φ . Для цього візьмемо $\rho = 0$, або $a\sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi} = 0$. Звідси $\sin \theta \cos \varphi = 0$. Це можливо у разі, якщо $\sin \theta = 0$ або $\cos \varphi = 0$ ($\theta = \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Отже,

$0 \leq \theta \leq \pi$ і $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тоді шуканий об'єм дорівнює

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}} \rho^2 \sin \theta d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{a\sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}} d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta = \frac{\pi a^3}{3} \text{ (куб. од.)}.$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z$ та $\frac{5}{9}x^2 + 4 = z$.

Розв'язання. Перша поверхня є еліптичним параболоїдом, що проходить через початок координат. Друга поверхня є параболічним циліндром, що піднятий над площиною XOY на 4 одиниці. Дані поверхні та тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображені на рис. 4.2.

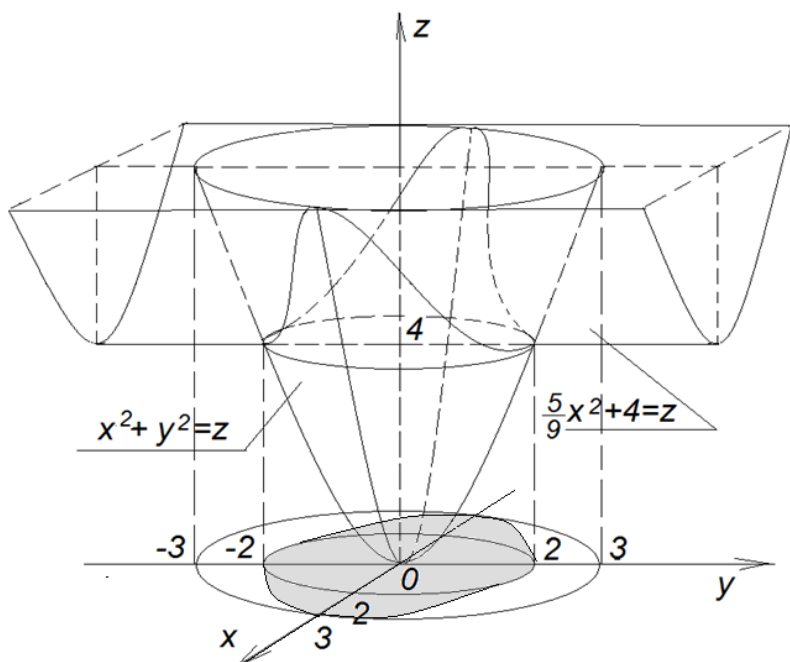


Рисунок 4.2

Тіло є симетричним відносно координатних площин YOZ та XOZ , оскільки змінні x і y входять лише у квадратах в обидва рівняння. Ці зауваження дозволяють обчислити об'єм лише частини тіла, що знаходиться у першому октанті. Проекцією цього тіла на площину XOY є еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Перейдемо до узагальнених полярних координат за формулами $x = 3\rho \cos \Theta$, $y = 2\rho \sin \Theta$. Обчислимо якобіан цього перетворення:

$$I(\rho, \Theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\Theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos \Theta & -3\rho \sin \Theta \\ 2\sin \Theta & 2\rho \cos \Theta \end{vmatrix} = 6\rho \cos^2 \Theta + 6\rho \sin^2 \Theta = 6\rho.$$

Область інтегрування в узагальнених полярних координатах матиме вигляд $E' = \{(\rho, \Theta) : \rho \leq 1, 0 \leq \Theta \leq 2\pi\}$. Проте враховуючи те, що знаходиться лише четверта частина тіла, то $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Рівняння еліптичного параболоїда є $z = \rho^2(9\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta)$, а параболічного циліндра – $z = 4 + 5\rho^2 \cos^2 \theta$.

Тоді об'єм тіла дорівнює

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 6\rho d\rho \int_{\rho^2(9\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta)}^{4+5\rho^2 \cos^2 \theta} dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 6\rho d\rho z \Big|_{\rho^2(9\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta)}^{4+5\rho^2 \cos^2 \theta} = \\ &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (4 - 4\rho^2) \rho d\rho = 96 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 12\pi. \end{aligned}$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює 12π (куб. од.)

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ та $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{(z-2)^2}{4} = 1$.

Розв'язання. Дані поверхні є еліпсоїдами, перетином яких є еліпс $\frac{x^2}{9} + y^2 = \frac{3}{4}$ у площині $z=1$. Тіло, об'єм якого потрібно знайти, зображене на рис. 4.3. Знаходимо об'єм:

$$V = \iint_E dx dy \int_{2-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}} dz = \iint_E (4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2} - 2) dx dy,$$

$$\text{де } E = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{9} + y^2 \leq \frac{3}{4} \right\}.$$

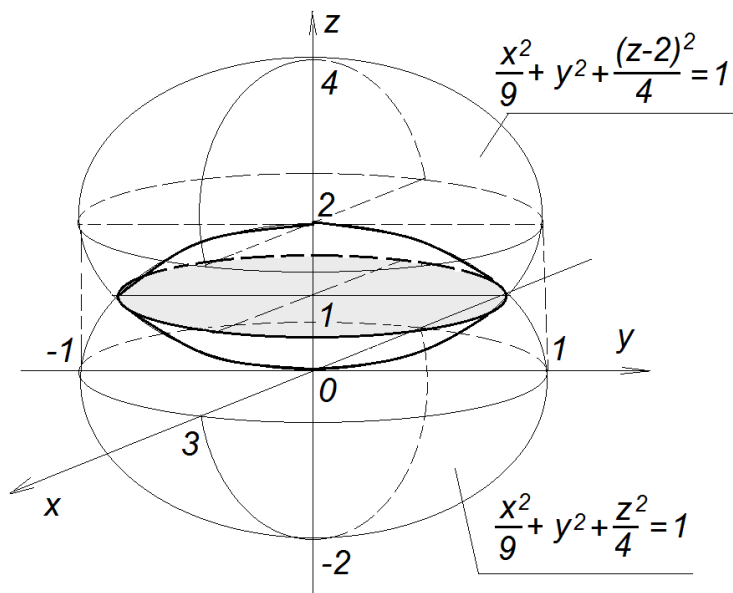


Рисунок 4.3

Під час обчислення цього інтеграла перейдемо до узагальнених полярних координат за формулами $x = 3\rho \cos \Theta$, $y = \rho \sin \Theta$. Обчислимо якобіан цього перетворення:

$$I(\rho, \Theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\Theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos \Theta & -3\rho \sin \Theta \\ \sin \Theta & \rho \cos \Theta \end{vmatrix} = 3\rho \cos^2 \Theta + 3\rho \sin^2 \Theta = 3\rho.$$

Область інтегрування в узагальнених полярних координатах матиме вигляд

$$E' = \left\{ (\rho, \Theta) : \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq \Theta \leq 2\pi \right\}.$$

Отже,

$$V = \iint_{E'} (4\sqrt{1-\rho^2} - 2) 3\rho d\rho d\Theta = 3 \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4\sqrt{1-\rho^2} - 2) \rho d\rho = \frac{5}{2}\pi.$$

Шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{5}{2}\pi$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x}{a}$, де $a \geq 1$.

Розв'язання. У цьому випадку зручно перейти до сферичних координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

де $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Тіло розміщене симетрично відносно площин XOZ і XOY , оскільки змінні y і z входять до рівняння лише у квадратах. Оскільки ліва частина рівняння завжди більша за нуль, то і $x \geq 0$, тобто все тіло знаходиться над площиною YOZ . Тому на кути φ і θ накладаються деякі

обмеження: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Рівняння поверхні

$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x}{a}$ у сферичній системі координат має

вигляд $r = \sqrt[3]{\frac{\sin \theta \cos \varphi}{a}}$, а якобіан даного перетворення

дорівнює $r^2 \sin \theta$. Маємо

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin \theta \cos \varphi}{a}}} r^2 \sin \theta dr = \\ &= \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{3a}. \end{aligned}$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{\pi}{3a}$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею

$$((ax)^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{z^2}{(ax)^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Для знаходження об'єму даного тіла доцільно перейти до узагальнених сферичних координат:

$$x = \frac{1}{a} r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

де $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Поверхня $((ax)^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{z^2}{(ax)^2 + y^2}$ матиме вигляд

$r = \sqrt[3]{\cot \theta}$, а об'єм $r \leq \sqrt[3]{\cot \theta}$. Якобіан даного перетворення дорівнює $\frac{1}{a} r^2 \sin \theta$.

Тіло розміщене симетрично відносно координатних площин, оскільки змінні x, y, z входять до рівняння лише у

квадратах. Ці зауваження дозволяють обмежитись обчисленням восьмої частини об'єму тіла, тієї, що знаходиться у першому октанті. Тоді накладаються деякі обмеження на кути φ і θ : $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Звідси,

$$V = \frac{8}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta dr = \frac{8}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{8}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4\pi}{3a}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{4\pi}{3a}$ (куб. од.).

Розв'язування типових задач

Розглянемо на прикладах розв'язування основних типів задач на застосування потрійного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz \, dz$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x dx \int_0^x y dy \int_0^y z dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y \frac{z^2}{2} \Big|_0^y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^x y^3 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x \frac{y^4}{4} \Big|_0^x dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{48} x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $I = \iiint_D 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz$,

якщо D : $x=1$; $y=1$; $z=1$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

Розв'язання. Областю інтегрування D є одиничний куб, три ребра якого знаходяться на координатних осях.

$$I = \iiint_D 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz = 2 \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 dz \int_0^1 e^{xyz} dx = 2 \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 dz \frac{1}{yz} e^{xyz} \Big|_0^1 =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 y dy \int_0^1 dz (e^{yz} - 1) = 2 \int_0^1 y dy \left(\frac{1}{y} e^{yz} - z \right) \Big|_0^1 = \\
&= 2 \int_0^1 y \left(\frac{1}{y} e^{y \cdot 1} - 1 \right) dy = 2 \int_0^1 y \left(\frac{1}{y} e^y - 1 - \frac{1}{y} + 0 \right) dy = \\
&= 2 \int_0^1 (e^y - y - 1) dy = 2 \left(e^y - \frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_0^1 = 2 \left(e - \frac{1}{2} - 1 - 1 \right) = 2e - 5.
\end{aligned}$$

Пропонуємо подумати, чому потрійний інтеграл зручніше подати у вигляді повторного саме в цьому порядку.

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого кулею $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і параболоїдом $3z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Нехай Ω – дане в задачі тіло. На рис. 4.4 а зображене тіло Ω_1 – частина тіла Ω , що міститься у першому октанті. Очевидно, що $V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$.

Знайдемо проекцію лінії перетину кулі й параболоїда на площину xOy .

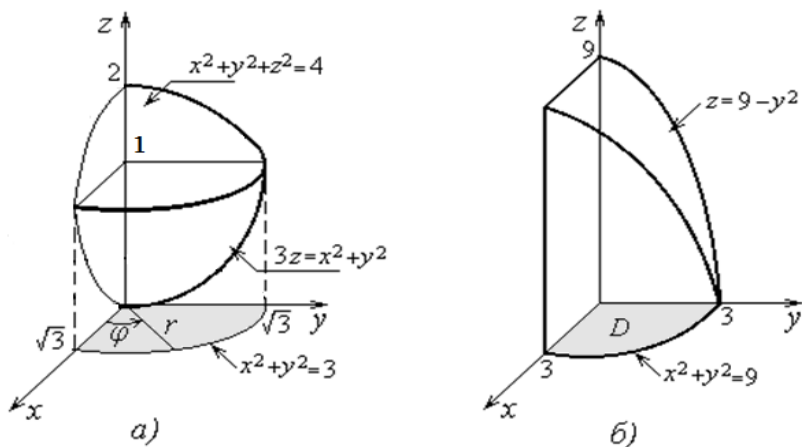


Рисунок 4.4

Для цього достатньо із системи рівнянь $x^2+y^2=4-z^2$, $x^2+y^2=3z$ одержати $z^2+3z-4=0$. Звідси $x^2+y^2=-4$ і $x^2+y^2=1$.

Відповідно до рівнянь проєкції буде коло $x^2+y^2=3$. Згідно з формулою (4.2) маємо

$$V(\Omega)=V(\Omega_1)=4\iiint_{\Omega_1} dx dy dz.$$

Оскільки проєкцією даного тіла Ω на площину xOy є круг $x^2+y^2 \leq 3$, то доцільно перейти до циліндричних координат. Після перетворень за формулами (3.16) рівняння кола $x^2+y^2=3$, параболоїда $3z=x^2+y^2$ і кулі $x^2+y^2+z^2=4$ відповідно набирають вигляду $r=\sqrt{3}$, $z=\frac{1}{3}r^2$, $z=\sqrt{4-r^2}$. Із рис. 4.4 а бачимо, що в області

інтегрування Ω_1 кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, r – від 0 до

$\sqrt{3}$, а z – від $\frac{r^2}{3}$ до $\sqrt{4-r^2}$. Тому

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= 4\iiint_{\Omega_1} dx dy dz = 4\iiint_{\Omega_1} r dr d\varphi dz = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} dz = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r \left(\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^2 \right) dr = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}r^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{19}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{19}{6} \pi. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0$, $z=9-y^2$; $x^2+y^2=9$.

Розв'язання. Нехай Ω – дане в задачі тіло. На рис. 4.4 б зображене тіло Ω_1 – частина тіла Ω , що

знаходиться у першому октанті. Очевидно, дане в задачі тіло симетричне відносно площин xOz , yOz і тому $V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$. Згідно з формулою (4.2) маємо

$$V(\Omega) = 4 \iiint_{\Omega_1} dx dy dz.$$

Проекцією даної частини тіла Ω_1 на площину xOy є частина круга $x^2 + y^2 \leq 9$, що знаходиться у першій чверті (на рис. 4.4 б – це чверть круга D). Отже,

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= 4 \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{9-y^2} dz = 4 \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} z \Big|_0^{9-y^2} dy = \\ &= 4 \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (9-y^2) dy = 4 \int_0^3 (9\sqrt{9-x^2} - \frac{(\sqrt{9-x^2})^3}{3}) dx. \end{aligned}$$

Зробимо заміну $x = 3 \sin t$, $dx = 3 \cos t dt$. Якщо $x = 0$, тоді $t = 0$, а якщо $x = 3$, тоді $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9\sqrt{9-9\sin^2 t} - \frac{(\sqrt{9-9\sin^2 t})^3}{3} \right) 3 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (27 \cos t - 9 \cos^3 t) 3 \cos t dt = \\ &= 108 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t - \cos^3 t) \cos t dt = 324 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 108 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 162 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt - \\ &- 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = 162 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 162 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - \\ &- 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 54 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t dt = \\ &= 162t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{162}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - 27t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{54}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt = \end{aligned}$$

$$= 81\pi - \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{27}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt = 81\pi - \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{2}t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{243}{4}\pi.$$

Пропонуємо студентів обчислити потрібний інтеграл у циліндричних координатах і зіставити з вищенаведеним обчисленням за складністю.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями, побудувати об'єм:

а) $z \geq 0, x = 3, y = 2x, z = y^2$;

б) $y \geq 0, z \geq 0, 2x - y = 0, x + y = 9, z = x^2$;

в) $y \geq 0, z \geq 0, x - y = 0, 2x + y = 2, 4z = y^2$;

г) $z \geq 0, x^2 + y^2 = 9, z = 5 - x - y$.

2. Обчислити потрібний інтеграл від функції $F(x, y, z)$ за областю V :

	$F(x, y, z)$	V		
а)	$2x^2 + 3y + z$,	$2 \leq x \leq 3$	$-1 \leq y \leq 2$,	$0 \leq z \leq 4$
б)	$x^2 yz$	$-1 \leq x \leq 2$	$0 \leq y \leq 3$,	$2 \leq z \leq 3$
в)	$x + y + 4z^2$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq 2$,	$-1 \leq z \leq 1$
г)	$x^2 + y^2 + z^2$	$0 \leq x \leq 3$,	$-1 \leq y \leq 2$,	$0 \leq z \leq 2$

3. Обчислити потрібний інтеграл від функції $F(x, y, z)$ за областю V за допомогою циліндричної або сферичної системи координат:

	$F(x, y, z)$	V
а)	y	$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$; $y \leq \sqrt{3}x$; $y \geq 0$; $z \geq 0$
б)	y	$z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y \geq 0$
в)	$\frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$	$x \geq 0$; $y \geq \sqrt{3}x$; $z \geq 0$; $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$
г)	$\frac{y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$	$y \geq 0$; $y \leq \sqrt{3}x$; $z = 3(x^2 + y^2)$; $z = 3$

4. Обчислити інтеграли, перетворивши їх до циліндричних або сферичних координат:

а) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz$, б)

$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D \frac{dx dy dz}{1-x-y}$, якщо

область D обмежена площинами: $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 5$, $z = 2$, $z = 4$.

6. Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, де область W обмежена

поверхнею $3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2$.

7. Обчислити координати центра мас однорідного тіла V , обмеженого зазначеними поверхнями:

а) $V: y^2 + z^2 = 8x$; $x = 2$	в) $V: z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 36$
б) $V: x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$ $y^2 + z^2 = 4$; $x = 0$	г) $V: z = 3(x^2 + y^2)$; $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$

8. Обчислити момент інерції однорідного тіла V відносно зазначеної осі координат, обмеженого поданими поверхнями. Густина тіла $\gamma(x, y, z) = 1$.

	V	Вісь
а)	$y^2 = x^2 + z^2; y = 4;$	Oy
б)	$y^2 = x^2 + z^2; y = 2;$	Oy
в)	$x^2 = y^2 + z^2; x = 2;$	Ox
г)	$x^2 = y^2 + z^2; x = 3;$	Ox

Задачі для самоперевірки

- Обчислити $\int_0^a \left\{ \int_0^x \left[\int_0^y xyz dz \right] dy \right\} dx$. Відповідь: $\frac{a^6}{48}$.
- Обчислити $\iiint_V xyz dx dy dz$, де $V: y = x, y = 0, z = xy, z = 0, x = 2$.
Відповідь: 4.
- Обчислити $\iiint_V x^2 \sin(xyz) dx dy dz$, де $V: y = 2x, y = 0, z = 4\pi, z = 0, x = 1$.
Відповідь: 2.
- Обчислити $\iiint_V xy dx dy dz$, де $V: z = 0, x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2$.
Відповідь: 0.
- Обчислити $\iiint_V x^2 dx dy dz$, де V – куля радіуса R , із центром в початку координат.
Відповідь: $\frac{4\pi R^5}{15}$.
- Обчислити $\iiint_V z dx dy dz$, де $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.
Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

7. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 3z.$$

Відповідь: $\frac{19}{6}\pi$.

8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 8$,

$$z = \frac{30}{11}y, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad x = 0.$$

Відповідь: $\frac{180}{11}$.

Питання для самоперевірки

1. Як знайти об'єм просторового тіла за допомогою потрійного інтеграла?

2. За якою формулою знаходиться маса тіла V із заданою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$?

3. Зазначте формули, за допомогою яких можна обчислити моменти інерції тіла відносно координатних осей.

4. Як знайти координати центра тяжіння просторового тіла з відомою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$?

5. Чи можна обчислити статичні моменти тіла відносно координатних площин за допомогою потрійного інтеграла? За якими формулами можна їх знайти?