

для зменшення об'єму обчислювальної роботи треба обирати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не доводиться розбивати область інтегрування на частини. Продемонструємо це на прикладі.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D y dx dy$, якщо область

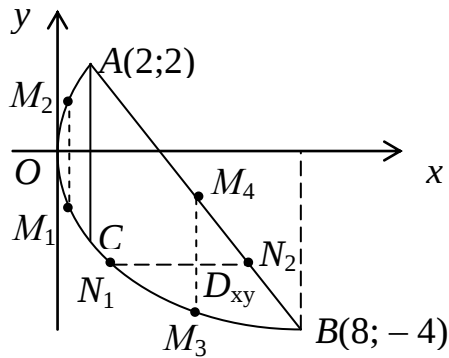


Рис. 10.2

інтегрування D обмежена прямою $y = 4 - x$ та параболою $y^2 = 2x$ (рис. 10.2).

Розв'язання. Знаходимо точки перетину даних ліній $A(2; 2)$ і $B(8; -4)$. Використаємо спочатку формулу (10.2). Спроектуємо область D на вісь Oy , вона проектується у відрізок $[-4; 2]$. Якщо через будь-яку точку цього відрізка провести пряму, паралельну осі Ox , то вона перетине область лише у двох

точках N_1 кривої $y^2 = 2x$ та N_2 прямої $y = 4 - x$. Розв'яжемо рівняння цих ліній відносно x : $x_1 = \frac{y^2}{2}$, $x_2 = 4 - y$.

Подвійний інтеграл зводиться до двократного:

$$I = \iint_D y dx dy = \int_{-4}^2 y dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx.$$

Обчислення повторного інтеграла почнемо з обчислення внутрішнього інтеграла, для якого x є змінною, y – сталою величиною. Після знаходження первісної, межі внутрішнього інтеграла підставляють замість змінної x . У результаті приходимо до визначеного інтеграла за змінною y . Таким чином,

$$I = \int_{-4}^2 x \left|_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} y dy = \int_{-4}^2 (4 - y - \frac{y^2}{2}) y dy = \int_{-4}^2 (4y - y^2 - \frac{y^3}{2}) dy = \left. 2y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right|_{-4}^2 = -18.$$

Обчислимо інтеграл, проектуючи область D на вісь Ox . У цьому випадку необхідно розбити область інтегрування прямою AC на дві частини D_1 та D_2 внаслідок того, що верхня межа області складається з

двох ділянок, які мають неоднакові рівняння: $y = \sqrt{2x}$ (OA) та $y = 4 - x$ (AB). Інтеграл по області D слід подати як суму інтегралів по областях D_1 та D_2 :

$$\iint_D y dx dy = \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy.$$

Проекцією D_1 на вісь Ox є відрізок $[0,2]$, і будь-яка пряма $x = \text{const}$, $x \in [0,2]$ перетинає область у точках M_1 кривою $y = -\sqrt{2x}$ та M_2 кривою $y = \sqrt{2x}$. Тому

$$\iint_{D_1} y dx dy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy = 0.$$

Аналогічно, проекцією області D_2 на вісь Ox є відрізок $[2,8]$, і будь-яка пряма $x = \text{const}$, $x \in [2,8]$ перетинає область у точках M_3 кривої $y = -\sqrt{2x}$ та M_4 кривої $y = 4 - x$. Тому

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} y dx dy &= \int_2^8 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{4-x} y dy = \int_2^8 \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{2x}}^{4-x} dx = \frac{1}{2} \int_2^8 (16 - 8x + x^2 - 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} (16x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}) \Big|_2^8 = -18 \end{aligned}$$

$$I = -18.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iint_D \sqrt{x} y dx dy$, якщо область

інтегрування D задається нерівностями: $x \geq 0$, $y \geq x^2$, $y \leq 2 - x^2$.

Розв'язання. Область D зображена на рис.10.3. Точка перетину парабол має координати $A(1,1)$. Проекцією області D на вісь абсцис є відрізок $[0,1]$. Вертикальна пряма при будь-якому сталому x перетинає D тільки в двох точках: точці M_1 кривої $y_1 = x^2$ та M_2 кривої $y_2 = 2 - x^2$, при цьому аналітичний вираз функцій y_1, y_2 для всіх $x \in [0,1]$ залишається незмінним. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} \sqrt{x} y dy = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{1}{2} \left((2-x^2)^2 - x^4 \right) dx = \\ &= \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^{5/2}) dx = \left(\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{4}{7} x^{7/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{21}. \end{aligned}$$

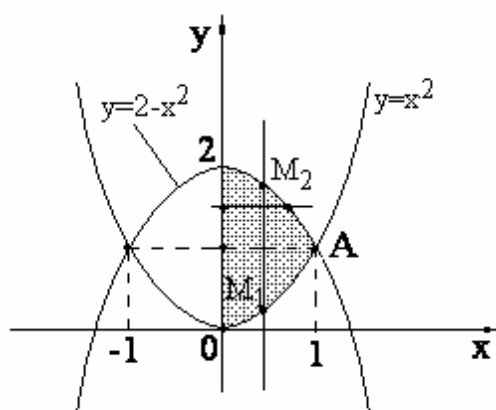


Рис. 10.3

Обчислимо інтеграл, проектуючи область D на вісь Oy , тобто внутрішній інтеграл візьмемо по x , а зовнішній – по y . Проекцією є відрізок $[0, 2]$. При змінюванні $y \in [0, 2]$ верхня межа визначається різними рівняннями $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$, тому інтеграл по області D слід подавати як суму інтегралів по областях D_1 та D_2 . Оскільки тепер внутрішні інтеграли будуть обчислюватися за змінною x , то

рівняння ліній, що обмежують кожену з областей D_1 та D_2 , слід розв'язувати відносно цієї змінної. Оскільки

$x \geq 0$, то $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = \sqrt{2 - y}$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x} y dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} \sqrt{x} y dx = \int_0^1 y \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy + \int_1^2 y \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2-y}} dy = \\ &= \frac{2}{3} \left(\int_0^1 y^{7/4} dy - \int_1^2 ((2-y) - 2)(2-y)^{3/4} dy \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{4}{11} + \frac{4}{11} (2-y)^{11/4} \Big|_1^2 - \frac{8}{7} (2-y)^{7/4} \Big|_1^2 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{11} - \frac{4}{11} + \frac{8}{7} \right) = \frac{16}{21}. \end{aligned}$$

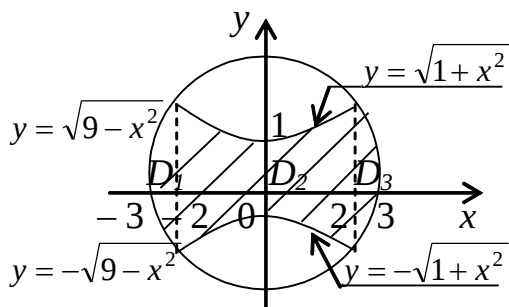


Рис. 10.4

Приклад 3. Знайти межі двократного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$,

якщо область D обмежена гіперболою $y^2 - x^2 = 1$ та колом $x^2 + y^2 = 9$ (область D містить початок координат) (рис. 10.4).

Розв'язання. Проекцією області на вісь Ox є відрізок $[-3, 3]$. Функції, за допомогою яких описується рівняння границі області на цьому проміжку, змінюють вигляд свого аналітичного виразу, тому область необхідно розбити на три частини: D_1, D_2, D_3 . Для знаходження меж інтегрування по кожній з областей знайдемо абсциси точок перетину кола та гіперболи

$$1 + x^2 = 9 - x^2; 2x^2 = 8; x = \pm 2.$$

За властивістю адитивності маємо

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \iint_{D_3} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Приклад 4. Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

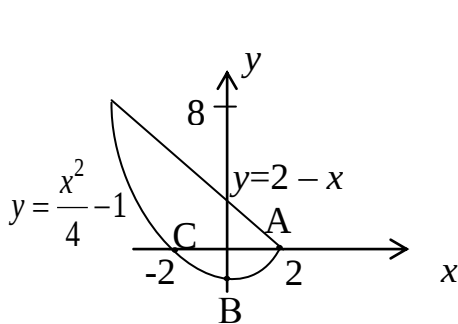


Рис. 10.5

$$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

Розв'язання. Відновимо область

інтегрування: $-6 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{4} - 1 \leq y \leq 2 - x.$

Рівняння ліній, що обмежують область D ,

$y = \frac{x^2}{4} - 1$ та $y = 2 - x$. Область інтегрування зображена на рис. 10.5. Для

зміни порядку інтегрування необхідно область D спроектувати на вісь Oy . Проекцією є відрізок $[-1, 8]$; при цьому частина границі ABC складається з двох ліній – AB та BC , які визначаються різними рівняннями: (AB) $x_1 = 2\sqrt{y+1}$ та (BC) $x_2 = -2\sqrt{y+1}$. Тому при зміні порядку інтегрування область необхідно розбити на дві області – D_1 та D_2 , тоді

$$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx$$

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

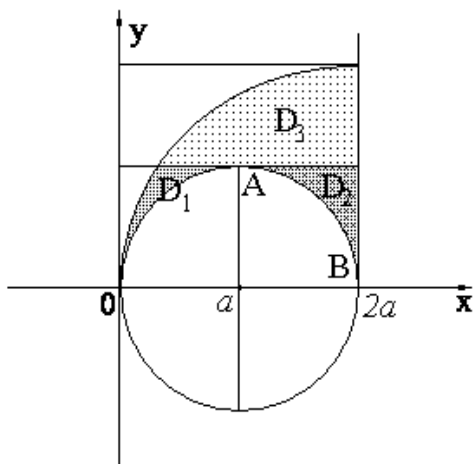


Рис. 10.6

Розв'язання. Відновимо область інтегрування, що описується нерівностями

$$0 \leq x \leq 2a, \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}.$$

Припускаємо, що

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \Rightarrow x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2};$$

$$y = \sqrt{2ax} \quad x = \frac{y^2}{2a}.$$

Область інтегрування зображена на рис. 10.6. Дуга кола OA має рівняння

$$x = a - \sqrt{a^2 - y^2}, \text{ а дуга кола AB: } x = a + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Проектуючи область інтегрування на вісь Oy, отримуємо три області: D_1 , D_2 , D_3

$$I = \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y) dx.$$

10.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

Нехай необхідно обчислити подвійний інтеграл неперервної функції $z = f(x, y)$ по області D . Припустимо, що формули

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v)$$

встановлюють взаємно рівнозначне співвідношення між точками $M(x, y)$ області D в площині xOy та точками $M'(u, v)$ деякої області D' у площині uOv . Тоді можна довести вірогідність формули

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv,$$

де $|J|$ – абсолютна величина визначника

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \psi'_u(u, v) \\ \varphi'_v(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix}, \quad (10.3)$$

який називається *якобіаном*.

Часто обчислення подвійного інтеграла спрощується заміною прямокутних координат x та y полярними координатами ρ та φ за формулами: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. В цьому випадку якобіан дорівнює

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \quad (10.4)$$

Враховуючи, що $|J| = \rho$, маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (10.5)$$

Якщо область інтегрування обмежена промінями, що утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$) і двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$) (рис.10.7), а функції $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ є неперервними, однозначними та зберігають аналітичний вираз, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (10.6)$$

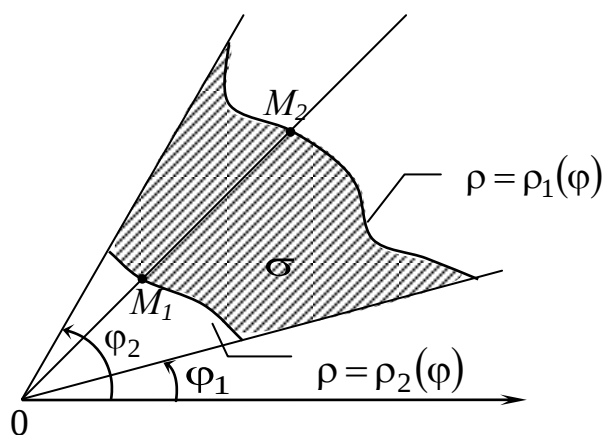


Рис. 10.7

Інтеграл у правій частині цієї формули – повторний (двократний). У внутрішньому інтегралі φ слід розглядати як величину сталу, а ρ – змінну. Для визначення меж внутрішнього інтеграла за змінною ρ (полярного радіуса) проведемо з полюса O будь-який промінь $\varphi = \text{const}$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. В точці входу M_1

цього променя в область $\rho = \rho_1(\varphi)$, а в точці M_2 виходу його із області $\rho = \rho_2(\varphi)$.

Якщо початок координат знаходиться всередині або на границі області інтегрування, то при інтегруванні спочатку по ρ , а потім по φ (формула (10.6)), нижня межа для першого інтеграла (по ρ) буде дорівнювати нулю.

Якщо область інтегрування є кругом з центром на початку координат та радіуса R , то межі інтегрування в полярній системі координат (для внутрішнього та зовнішнього інтегралів) будуть постійними, тобто

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Приклад 1. Обчислити $\iint_D x dx dy$, якщо область D обмежена колом

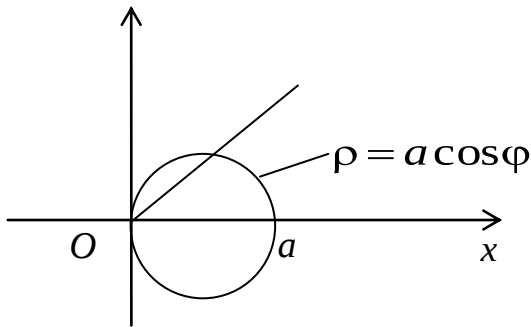


Рис. 10.8

$$x^2 + y^2 = ax.$$

Розв'язання. Рівняння кола в полярній системі має вигляд $\rho^2 = a\rho \cos \varphi$, або $\rho = a \cos \varphi$. Кут φ змінюється від $-\pi/2$ до $\pi/2$. При кожному фіксованому значенні φ змінна ρ змінюється від 0 до $a \cos \varphi$ (рис.10.8). Тоді

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho \cos \varphi \rho d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \left[\rho^3 / 3 \right]_0^{a \cos \varphi} = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{2a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{6} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{a^3}{6} \int_0^{\pi/2} (3/2 + 2 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi / 2) d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{6} \left(\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{8}; \end{aligned}$$

Якщо $f(x, y) \equiv 1$, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі області інтегрування.

Приклад 2. Обчислити площу фігури, що обмежена лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

Розв'язання. Рівняння кривої $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ в полярних координатах має вигляд $\rho^4 = 2a^2 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi$,

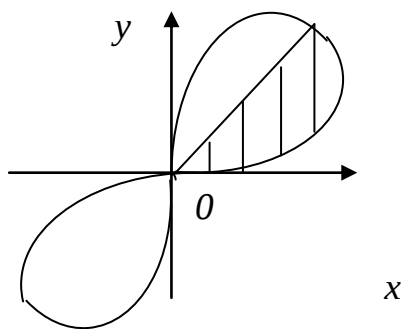


Рис. 10.9

$$\text{або } \rho^2 = 2a^2 \sin \varphi \cos \varphi = a^2 \sin 2\varphi,$$

$$\text{або } \rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Будуємо криву, беручи до уваги, що $\rho \geq 0$ або $\sin 2\varphi \geq 0$, тобто

$$0 + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \pi + 2k\pi \Rightarrow k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

($k=0,1$). Таким чином, область знаходиться в 1-й та 3-й чвертях і симетрична відносно

полюса. При змінюванні φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$

поточна точка (φ, ρ) опише лише четверту частину кривої (рис.10.9). Площа виражається інтегралом

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

Приклад 3. Обчислити $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, де область обмежена

еліпсом.

Розв'язання. Введемо так звані узагальнені полярні координати: $x = a\rho \cos \varphi, y = b\rho \sin \varphi$. Якобіан перетворення за формулою (10.3) дорівнює

$$I = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Кут φ змінюється від 0 до 2π . Рівняння еліпса в узагальнених полярних координатах $\rho=1$, полюс знаходиться всередині області, тому ρ змінюється від 0 до 1.

$$\text{Оскільки } 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi = 1 - \rho^2,$$

то

$$I = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = ab \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} \pi ab.$$

10.3. Застосування подвійних інтегралів

а) Обчислення об'ємів тіл

Об'єм циліндричного тіла, обмеженого знизу областю D площини xOy , зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, збоку – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz та з напрямною – границею області D , дорівнює $V = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Приклад 1. Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ та площинами $z=0$, $x+z=6$ (рис. 10.10).

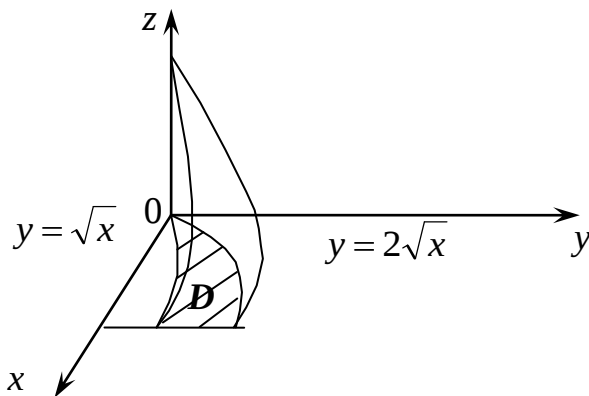


Рис. 10.10

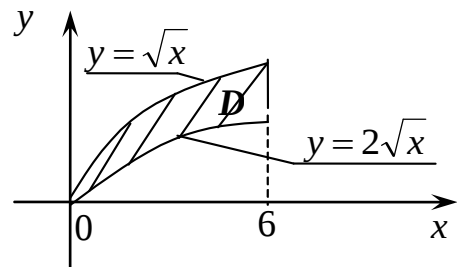


Рис. 10.11

Розв'язання. Тіло обмежене зверху площиною $x+z=6$, знизу площиною $z=0$ та двома циліндрами $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$, які проектує його на площину xOy в область D , обмежену прямою $x=6$ та параболлами $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 10.11). При цьому змінна x змінюється від 0 до 6; при будь-якому значенні x із вказаного проміжку $\sqrt{x} < y < 2\sqrt{x}$. Об'єм тіла знаходимо за формулою $V = \iint_D f(x, y) dx dy$.

$$\begin{aligned}
 & \text{У даному випадку } z = f(x, y) = 6 - x. \text{ Тоді маємо} \\
 V &= \iint_D (6 - x) dx dy = \\
 &= \int_0^6 (6 - x) dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^6 (6 - x) y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^6 (6 - x) (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx = \\
 &= \int_0^6 (6\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \left(6 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^6 = 24\sqrt{6} - \frac{72}{5}\sqrt{6} = \frac{48\sqrt{6}}{5}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y = \ln x$,

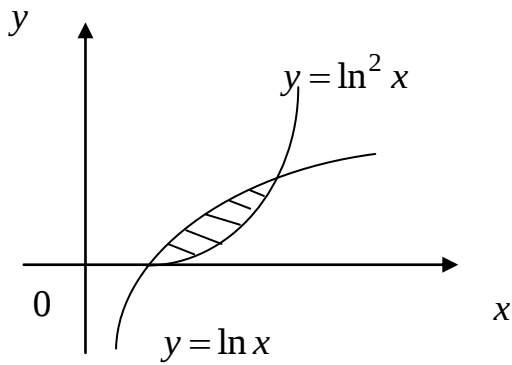


Рис. 10.12

$y = \ln^2 x$ та площинами $z = 0$ та $y + z = 1$.

Розв'язання. Оскільки зверху тіло обмежене площиною $z = 1 - y$, а циліндри $y = \ln x$ та $y = \ln^2 x$ є проєктуючими циліндрами на площину xOy , побудова просторової області не є обов'язковою.

Проекція тіла D на площину xOy зображена на рис. 10.12. Для зведення подвійного інтеграла до повторного знайдемо абсциси точок перетину кривих $y = \ln x$ і $y = \ln^2 x$

$$\ln x = \ln^2 x, \text{ або } \ln x(1 - \ln x) = 0; \Rightarrow x = 1, \quad x = e.$$

Проекцією області D на вісь Oy є відрізок $[0, 1]$. Об'єм тіла дорівнює

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (1 - y) dx dy = \int_0^1 (1 - y) dy \int_{e^y}^{e^{\sqrt{y}}} dx = \int_0^1 (1 - y) (e^{\sqrt{y}} - e^y) dy = \\ &= - \int_0^1 e^y dy + \int_0^1 y e^y dy + \int_0^1 e^{\sqrt{y}} dy - \int_0^1 y e^{\sqrt{y}} dy. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \int_0^1 e^y dy = e^y \Big|_0^1 = e - 1; \quad \int_0^1 y e^y dy = y e^y \Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy = e - e + 1 = 1;$$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{y}} dy = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{y} = t, \quad y = t^2 \\ dy = 2t dt \end{array} \right\| = 2 \int_0^1 t e^t dt = 2;$$

$$\int_0^1 y e^{\sqrt{y}} dy = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{y} = t, \quad y = t^2 \\ dy = 2t dt \end{array} \right\| = 2 \int_0^1 t^3 e^t dt = 12 - 4e \quad (\text{застосовуємо формулу}$$

інтегрування частинами тричі).

$$\text{Знаходимо } V = 1 - e + 1 + 2 - 12 + 4e = 3e - 8.$$

Приклад 3. Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $x^2 + y^2 = x$ та $x^2 + y^2 = 2x$, параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $x + y = 0$, $x - y = 0, z = 0$.

Розв'язання. Циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z = x^2 + y^2$. Його об'єм

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D z dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

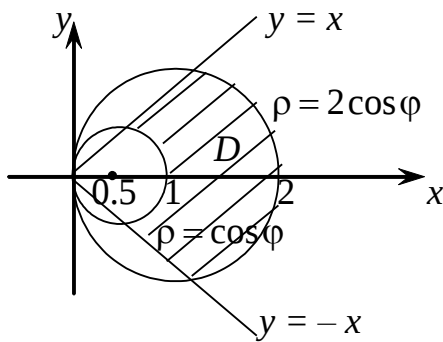


Рис. 10.13

Побудуємо область D , яка є проекцією тіла на площину xOy (рис. 10.13).

Область D обмежена колами

$$x^2 + y^2 = x, \text{ або } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$x^2 + y^2 = 2x, \text{ або } (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

та прямими $y = -x$, $y = x$.

У полярних координатах рівняння кіл мають вигляд $\rho = \cos \varphi$ та $\rho = 2 \cos \varphi$; рівняння прямих $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ та $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Знаходимо

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \rho^3 d\rho = \left\| \begin{array}{l} \text{завдяки симетрії} \\ \text{області інтегрування} \end{array} \right\| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (16 \cos^4 \varphi - \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{15}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{15}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{15}{8} \left(\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{15}{8} \left(\frac{3\pi}{8} + 1 \right).$$

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, яке вирізане з кулі радіуса R прямим круговим циліндром радіуса $R/2$, твірною якого проходить через центр кулі.

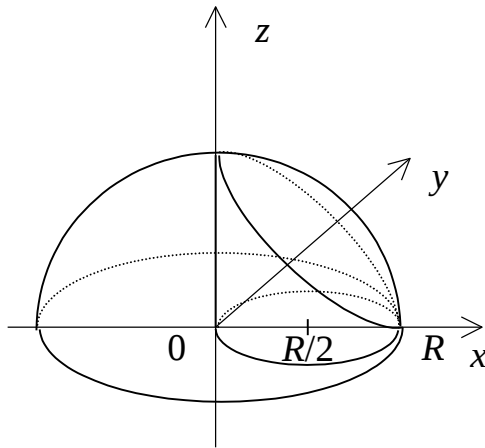


Рис. 10.14

Розв'язання. Розташуємо початок координат у центрі кулі, вісь Oz направимо вздовж твірної циліндра, а вісь Ox – вздовж діаметра основи циліндра (рис.10.14)

Рівняння сфери має вигляд:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, тоді у першому октанті $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Через симетрію об'єм тіла, вирізаного циліндром із кулі, буде дорівнювати

$$V = 4 \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Проекція тіла на площину xOy збігається з колом $x^2 + y^2 = Rx$. Для обчислення отриманого інтеграла зручно перейти до полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = Rx$ в полярних координатах має вигляд $\rho = R \cos \varphi$. Кут φ змінюється від 0 до $\pi/2$, ρ змінюється в межах $0 \leq \rho \leq R \cos \varphi$. Переходячи до полярних координат, отримуємо

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho.$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} (R^2 - \rho^2)^{3/2} \Big|_0^{R \cos \varphi} d\varphi = -\frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \varphi - 1) d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) + \frac{\pi R^3}{6} = \\ &= \frac{R^3}{3} \left(\cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi R^3}{6} = \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \quad V = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

б) Обчислення маси неоднорідної пластини

Маса пластини, що займає область D в площині xOy та має густину $\rho(x, y) = \delta(x, y)$, дорівнює $m = \iint_D \delta(x, y) dx dy$.

в) *Обчислення моментів інерції пластини.*

Момент інерції пластини відносно початку координат визначається формулою

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy.$$

Моменти інерції пластини відносно осей Ox та Oy дорівнюють відповідно

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy.$$

Приклад 5. Знайти момент інерції квадрата зі стороною a , поверхнева густина якого пропорційна відстані до однієї зі сторін квадрата відносно вершини, що належить даній стороні.

Розв'язання. Нехай квадрат розташований у площині xOy ; одна з його вершин лежить на початку координат, а дві інші збігаються з осями координат. Відзначимо, що момент інерції не залежить від вибору системи координат. Шуканий момент інерції буде дорівнювати моменту інерції квадрата відносно початку координат з поверхневою густиною kx , k – коефіцієнт пропорційності (беремо поверхневу густину пропорційною відстані до осі Oy). Тоді

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) kx dx dy = k \int_0^a x dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = k \int_0^a x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a dx = \\ &= k \int_0^a x \left(x^2 a + \frac{a^3}{3} \right) dx = k \int_0^a \left(x^3 a + x \frac{a^3}{3} \right) dx = k \left(a \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 a^3}{6} \right) \Big|_0^a = \\ &= k \left(\frac{a^5}{4} + \frac{a^6}{6} \right) = \frac{5ka^5}{12}. \end{aligned}$$

г) *Знаходження центра ваги пластини*

Координати центра ваги x_c та y_c неоднорідної пластини дорівнюють відповідно відношенням статичних моментів відносно осей Oy та Ox до маси пластини

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy}; \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy}.$$

Якщо ж пластина однорідна

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{S}; \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{S}.$$

Приклад 6. Знайти центр ваги однорідної пластини, що обмежена лініями $y = x^2$ і $y = 1$ (рис. 10.15).

Розв'язання. Очевидно, що через симетрію фігури $x_c = 0$.

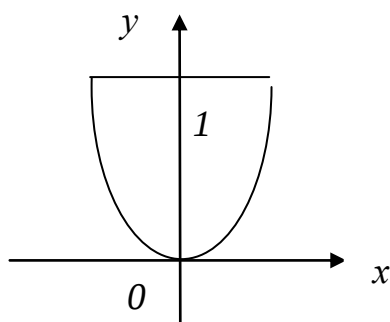


Рис. 10.15

$$\iint_D y dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y dx = 2 \int_0^1 y \sqrt{y} dy = \frac{4}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{5};$$

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

Остаточно: $y_c = \frac{3}{5}$.

10.4 Потрійні інтеграли та їх обчислення в декартовій системі координат

Нехай в замкненій обмеженій області V задана обмежена функція $f(x, y, z)$. Розіб'ємо область V на n елементарних підобластей $V_1, V_2, \dots, V_n$, які не мають спільних внутрішніх точок, об'єми яких позначимо ΔV_i . В кожній елементарній області V_i виберемо довільним чином точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ та утворимо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

яку будемо називати *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по області V . Найбільший з діаметрів елементарних областей V_i позначимо λ , тобто $\lambda = \max d_i, i = \overline{1, n}$.

Визначення. Якщо існує границя інтегральної суми $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ за умови, що $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить від способу

розбиття області V на елементарні частини та вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$, то вона називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V та позначається

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Функція $f(x, y, z)$ в цьому випадку називається інтегрованою в області V . Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до обчислення подвійного інтеграла за проекцією D об'єму V на яку-небудь координатну площину (в даному випадку xOy) та внутрішнього інтеграла за третьою змінною (змінною z). Внутрішній інтеграл береться від нижньої межі $z = z_1(x, y)$ області V до її верхньої межі $z = z_2(x, y)$. Припускається, що область є правильною в напрямку осі Oz (рис. 10.16).

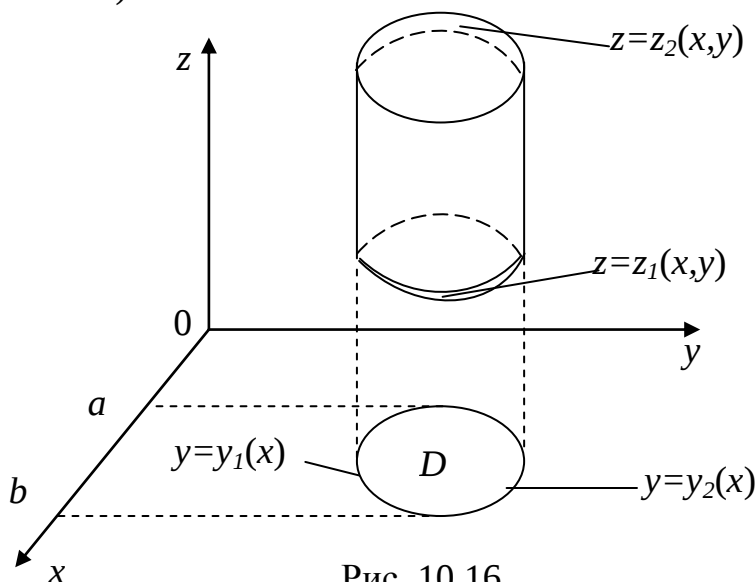


Рис. 10.16

Визначення. Якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області V паралельно осі Oz , перетинає границю області V у двох точках, а проекція V на площину xOy є правильною областю D , то область V називається *правильною*.

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла, останню формулу можна переписати таким чином:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Якщо область V є неправильною, то її розбивають на скінченне число правильних областей та обчислюють інтеграл, використовуючи властивість адитивності потрійного інтеграла.

Якщо областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами $x=a$, $x=b$ ($a < b$), $y=c$, $y=d$ ($c < d$), $z=m$, $z=n$ ($m < n$), то межі інтегрування будуть постійними, тобто

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x, y, z) dz.$$

У випадку, якщо $f(x, y, z) \equiv 1$, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму області інтегрування.

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=x$,

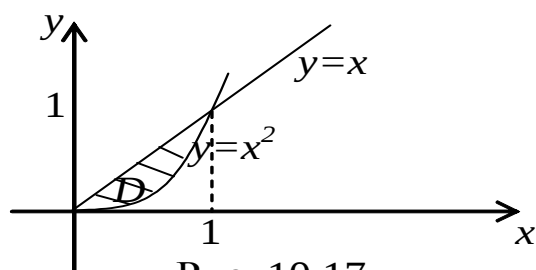


Рис. 10.17

$$y=x^2, \quad z=x^2+y^2, \quad z=2(x^2+y^2).$$

Розв'язання. Тіло обмежене площиною $y=x$, циліндром $y=x^2$ та параболоїдами обертання $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$. Нехай D –

проекція тіла на площину xOy . В

даному випадку проєктуючими поверхнями тіла є площина $y=x$ та циліндр $y=x^2$ (рис. 10.17). Тоді об'єм тіла

$$V = \iiint_V dv = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x z \Big|_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2) dy =$$

$$\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}$$

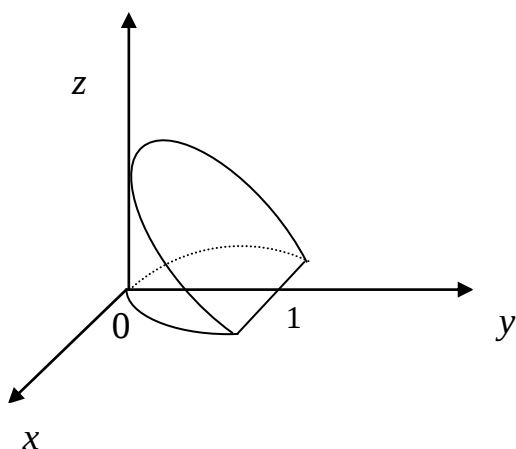


Рис. 10.18

Приклад 2. Обчислити масу тіла, обмеженого циліндром $x^2=2y$ і площинами $z=0$, $2y+z=2$, якщо в кожній його точці об'ємна густина чисельно дорівнює аплікаті цієї точки.

Розв'язання. Циліндричне

тіло (рис.10.18) обмежено зверху площиною $z = 2 - 2y$, яка перетинається з площиною $z = 0$ по прямій $y = 1$. Масу тіла, що займає область V , обчислюють за формулою $m = \iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz$, де $\delta(x, y, z)$ – об’ємна густина. У даній задачі $\delta(x, y, z) = z$ і

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V z dx dy dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \int_0^{2-2y} z dz = 2 \int_0^1 (1-y)^2 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx = 4 \int_0^1 (1-y)^2 \sqrt{2y} dy \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^1 (y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}}) dy = 4\sqrt{2} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{64\sqrt{2}}{105}. \end{aligned}$$

10.5. Потрійний інтеграл у циліндричній та сферичній системах координат

У багатьох задачах обчислення потрійних інтегралів зручніше проводити в циліндричній, сферичній або інших системах координат.

Питання про заміну змінних у потрійному інтегралі вирішується таким самим чином, як і у випадку подвійного інтеграла, тобто якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V та формули

$$x = \varphi(u, v, w); \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x, y, z)$ області V та точками $M'(u, v, w)$ області V' , то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J| du dv dw,$$

де $|J|$ – абсолютна величина якобіана:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}. \quad (10.7)$$

У *циліндричній* системі координат положення точки визначається полярними координатами φ, ρ та аплікатою z , (рис. 10.19, а) (формули, що зв'язують прямокутні та циліндричні координати мають вигляд $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $z = z$), модуль якобіана (10.7) дорівнює $|J| = \rho$.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

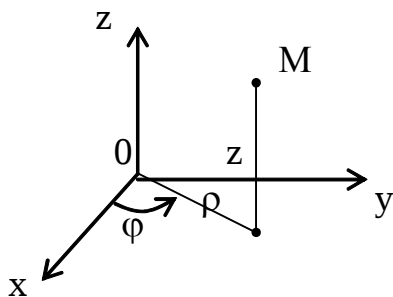


Рис. 10.19, а

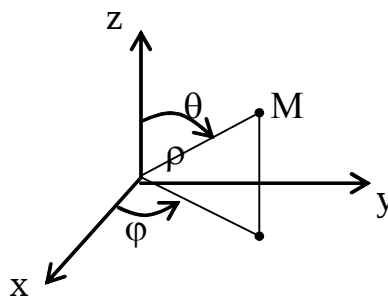


Рис. 10.19, б

У системі циліндричних координат координатні поверхні $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$ являють відповідно кругові циліндри з віссю Oz , напівплощини, що виходять із осі Oz та площини, паралельні площині xOy .

Тому якщо область інтегрування є круговим циліндром з віссю Oz , то потрібний інтеграл по цій області в циліндричній системі координат буде мати сталі межі за всіма змінними, тобто

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz$$

Сферичні координати точки M області V позначаються як ρ, φ, θ , де ρ – відстань від початку координат до точки M , $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, φ – кут між віссю Ox та проекцією радіус-вектора OM на площину xOy , а θ – кут між додатним напрямком осі Oz та радіус-вектором OM (рис. 10.19, б). Вочевидь, що ($\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Тут координатні поверхні є такими: $\rho = \text{const}$ – сфери з центром на початку координат, $\varphi = \text{const}$ – напівплощини, що виходить із осі Oz , $\theta = \text{const}$ – кругові конуси з віссю Oz . Сферичні координати ρ, φ, θ пов'язані з прямокутними координатами співвідношеннями

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta,$$

а модуль Якобіана (10.7) дорівнює $|J| = \rho^2 \sin \theta$.

Перехід у потрійному інтегралі до сферичних координат здійснюється за формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

Вочевидь, що якщо область інтегрування є кулею з центром на початку координат та радіуса R , то потрійний інтеграл по цій області в сферичній системі координат буде мати сталі межі інтегрування за всіма змінними, тобто

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) d\rho.$$

Нижче на конкретних прикладах проілюстровано правила розставлення меж інтегрування в циліндричній та сферичній системах координат і показано їх геометричні та фізичні застосування.

Приклад 1. Обчислити $\iiint_V xyz dx dy dz$, де V є частиною області,

обмеженої сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та параболоїдом $x^2 + y^2 = 3z$, розташованими у першому октанті (рис.10.20).

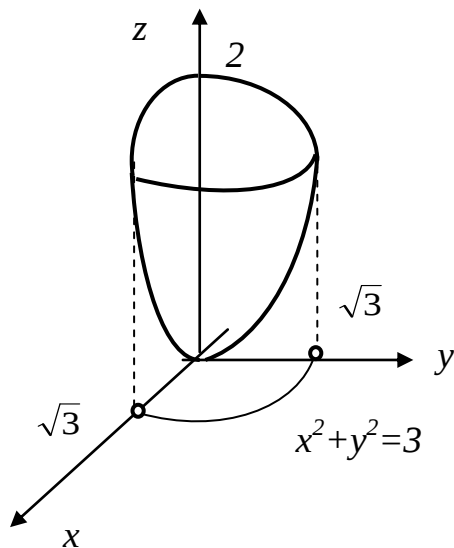


Рис. 10.20

Розв'язання. *Перший спосіб.*

Обчислення інтеграла в декартовій системі координат.

Перш ніж проектувати область V на площину xOy , знайдемо лінію перетину сфери та параболоїда. Для цього розв'яжемо сумісно ці два рівняння

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3.$$

Тобто поверхні перетинаються по колу радіуса $R = \sqrt{3}$, що лежить у площині $z = 1$. Об'єм V проектується на площину xOy як чверть кола даного радіуса, що знаходиться у першій чверті.

Таким чином, будемо мати

$$\begin{aligned} \iint_D xyz dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{3}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y z^2 \bigg|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} x dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} y (4-x^2-y^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{9}) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} x (2y^2 - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{x^4 y^2}{18} - \frac{x^2 y^4}{18} - \frac{y^6}{54}) \bigg|_0^{\sqrt{3-x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (\frac{13}{4} x - 2x^3 + \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{54}) dx = \frac{27}{32} \end{aligned}$$

Другий спосіб. Обчислення інтеграла в циліндричній системі координат

$$I = \iiint_V xyz dx dy dz = \iiint_{V'} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi dz, \text{ де } V' - \text{область змінення}$$

циліндричних координат точок області V .

Після визначення меж інтегрування одержимо

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 (4-\rho^2 - \frac{\rho^4}{9}) d\rho = \frac{27}{32}.$$

Приклад 2. Обчислити об'єм частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розташованої всередині циліндра

$$(x^2 + y^2) = R^2 (x^2 - y^2) (z \geq 0) \text{ (рис.10.21).}$$

Розв'язання. Напряму циліндра, що обмежена лемніскатою, побудуємо, переходячи до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Полярне рівняння цієї кривої $\rho = R\sqrt{\cos 2\varphi}$. Крива є симетричною відносно осей Ox та Oy та при змінненні φ від 0 до $\pi/4$ поточна точка (ρ, φ) опише четверту частину кривої. Шуканий об'єм в циліндричній системі координат обчислюють так:

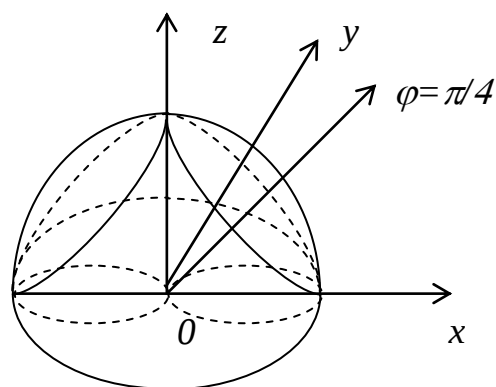


Рис. 10.21

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{V_1} \rho d\rho d\varphi dz = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} dz = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = \\
&= 4 \int_0^{\pi/4} -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (R^2 - \rho^2)^{3/2} \Big|_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} R^3 (1 - (1 - \cos 2\varphi)^{3/2}) d\varphi = \\
&= \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5 - 4\sqrt{2}}{3} \right).
\end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями: параболоїдом $(x-1)^2 + y^2 = z$ та площиною $2x + z = 2$ (рис. 10.22).

Розв'язання. Знайдемо рівняння проекції лінії перетину поверхні

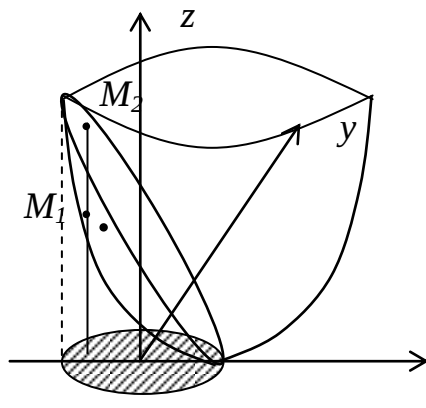


Рис. 10.22

$(x-1)^2 + y^2 = z$ з площиною $2x + z = 2$ на площину xOy . На лінії перетину аплікати збігаються, тоді будемо мати

$$(x-1)^2 + y^2 = 2 - 2x, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Оскільки область V проектується на коло $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$, доцільно перейти до циліндричних координат. Рівняння границі D_{xy} в циліндричних координатах

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \rho = 1;$$

рівняння площини $z = 2(1 - \rho \cos \varphi)$;

рівняння параболоїда $z = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow z = \rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1$.

При кожному значенні $(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ змінна z змінюється від $z_1 = \rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1$ (в точці M_1 – точці входу в просторову область V) до $z_2 = 2(1 - \rho \cos \varphi)$ (в точці M_2 – точці виходу з області V). Об'єм тіла в циліндричній системі координат

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1}^{2(1 - \rho \cos \varphi)} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \cdot z \Big|_{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1}^{2(1 - \rho \cos \varphi)} d\rho = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho (2 - 2\rho \cos \varphi - \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - 1) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho =
\end{aligned}$$

$$= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнею

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x, \quad a > 0.$$

Розв'язання. В цьому випадку доцільно перейти до сферичних координат, оскільки в сферичних координатах рівняння даної поверхні суттєво спрощується. Дійсно, оскільки

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2,$$

то рівняння поверхні, що обмежує тіло, буде мати вигляд

$$\rho^4 = a^3 \rho \cos \varphi \sin \theta \quad \text{або} \quad \rho^3 = a^3 \cos \varphi \sin \theta \Rightarrow \rho = a \sqrt[3]{\cos \varphi \sin \theta}.$$

Оскільки з рівняння поверхні випливає, що $x \geq 0$ (ліва частина рівняння невід'ємна) отримаємо, що $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; при цьому $0 \leq \theta \leq \pi$. Тоді

$$\begin{aligned} v &= \iiint_V \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi \sin \theta}} \rho^2 d\rho = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi \sin \theta}} d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \sin \theta d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{a^3}{6} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi \cdot 2 = \frac{a^3}{3} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) = \frac{\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

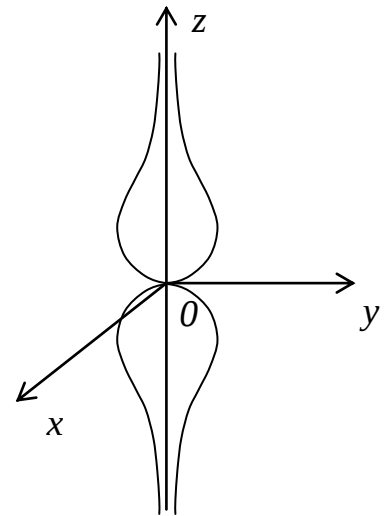


Рис. 10.23

Приклад 5. Обчислити об'єм тіла, що обмежене

поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}$, $a > 0$. (рис. 10.23)

Розв'язання. В сферичних координатах рівняння поверхні має вигляд

$$\rho^6 = \frac{a^6 \rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta} = a^6 \operatorname{ctg}^2 \theta \Rightarrow \rho = a \sqrt[6]{\operatorname{ctg}^2 \theta} = \rho(\theta).$$

Таким чином, маємо $\lim_{\theta \rightarrow +0} a\sqrt[6]{\operatorname{ctg}^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} a\sqrt[6]{\operatorname{ctg}^2 \theta} = \infty$; $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Через

симетрію поверхня має вигляд, зображений на рис. 10.23

Об'єм тіла дорівнює

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \theta}} \rho^2 d\rho = 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{a\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \theta}} = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \operatorname{ctg} \theta d\theta =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \cdot 2 = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

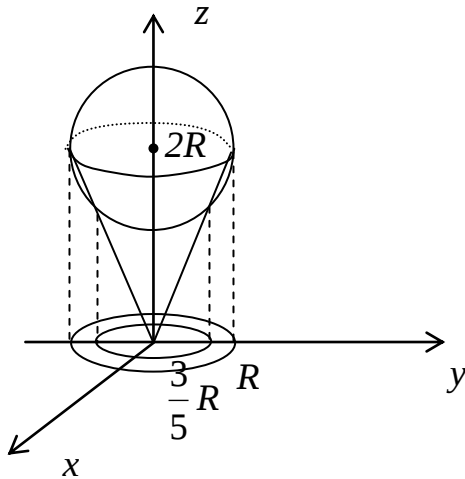


Рис. 10.24

Приклад 6. Обчислити об'єм тіла, що обмежене сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ та конусом $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (мається на увазі частина кулі, що лежить всередині конуса) (рис. 10.24).

Розв'язання. Перетворимо рівняння сфери: $x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2$.

Центр сфери $(0,0,2R)$, радіус дорівнює

R . Знайдемо проєкції ліній перетину конуса

та сфери на площину xOy . Для цього запишемо рівняння поверхонь у циліндричних координатах та прирівняємо аплікати.

$$z^2 = 4(x^2 + y^2) \Rightarrow z^2 = 4\rho^2, \quad z = 2\rho$$

$$x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2 \Rightarrow z = 2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2} \quad \Rightarrow$$

$$2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2} = 2\rho$$

$$\Rightarrow R^2 - \rho^2 = 4\rho^2 - 8R\rho + 4R^2 \Rightarrow 5\rho^2 - 8R\rho + 3R^2 = 0; \quad \rho_1 = \frac{3}{5}R; \quad \rho_2 = R.$$

Спочатку обчислимо об'єм частини кулі, що знаходиться зовні конуса:

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{3}{5}R}^R \rho d\rho \int_{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2\rho} dz = 2\pi \int_{\frac{3}{5}R}^R \rho \left(2\rho - 2R + \sqrt{R^2 - \rho^2} \right) d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{\frac{3}{5}R}^R \left(2\rho^2 - 2R\rho + \rho\sqrt{R^2 - \rho^2} \right) d\rho = 2\pi \left(2\frac{\rho^3}{3} - 2R\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\frac{3}{5}R}^R - \\
&- 2\pi \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{5}R}^R \left(R^2 - \rho^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - \rho^2 \right) = 2\pi \left(\frac{2}{3} \left(R^3 - \frac{27}{125} R^3 \right) - R^3 + \frac{9}{25} R^3 \right) - \\
&- 2\pi \frac{1}{2} \frac{\left(R^2 - \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{3}{5}R}^R = \frac{8}{75} \pi R^3.
\end{aligned}$$

Тоді об'єм кулі, що лежить всередині конуса, буде дорівнювати

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 - V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{8}{75} \pi R^3 = \frac{92}{75} \pi R^3.$$

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 (x^2 + y^2)^2$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат, тоді рівняння поверхні буде мати вигляд $\rho^2 = a^2 \sin^4 \theta$, або $\rho = a \sin^2 \theta$. Об'єм тіла у сферичних координатах обчислюють так:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{a \sin^2 \theta} \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{a \sin^2 \theta} = 2 \cdot \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta d\theta = \\
&= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{6!!}{7!!} = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{64\pi a^3}{105}.
\end{aligned}$$

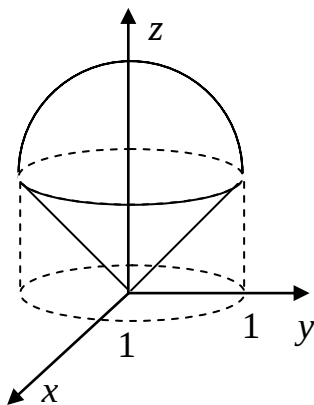


Рис. 10.25

Приклад 8. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла ($\delta(x, y, z) \equiv 1$), що обмежене сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ та конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 10.25).

Розв'язання. Побудуємо дане тіло. Для цього знайдемо лінію перетину поверхонь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2 = 2z \Rightarrow z = 1,$$

тобто ця лінія є колом з радіусом $R=1$, що лежить у площині $z=1$.

Проекцією тіла на площину xOy є коло $x^2 + y^2 \leq 1$.

Момент інерції обчислюється за формулою

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Перейдемо до сферичних координат, тоді межі інтегрування за φ та θ можна визначити за допомогою рівняння $x^2 + y^2 = z^2$. Припускаючи, що

$x = 0$ (або $y = 0$), будемо мати $y = z \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, тобто $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

$$I_z = \iiint_{V'} r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^4 dr = \frac{11\pi}{30}.$$

Приклад 9. Обчислити центр ваги спільної частини куль $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, якщо густина у будь-якій точці даного тіла дорівнює відстані цієї точки від площини xOy .

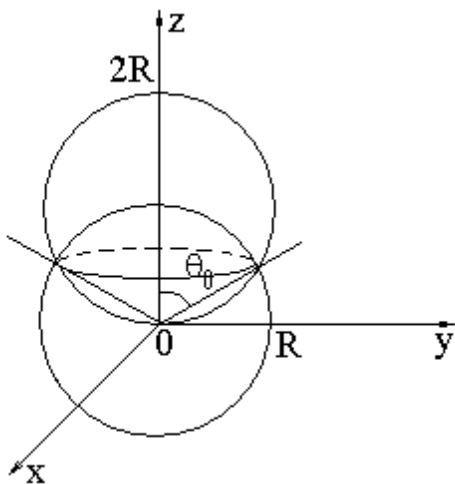


Рис. 10.26

Розв'язання. Координати центра ваги тіла обчислюють за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \delta(x, y, z) dx dy dz};$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \delta(x, y, z) dx dy dz};$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \delta(x, y, z) dx dy dz},$$

де M – маса тіла, M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти.

У данному прикладі $\delta(x, y, z) = z$. Через симетрію тіла (рис. 10.26) відносно осі Oz маємо $x_c = y_c = 0$. Визначимо кут θ_0 , розв'язуючи сумісно рівняння сфер (у сферичних координатах):

$$\begin{cases} \rho = R; \\ \rho = 2R \cos \theta; \end{cases} \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{1}{2}; \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Тоді
$$M_x = \iiint_V z^2 dV = \iiint_V \rho^4 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2R \cos \theta} \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{7\pi R^5}{60} + \frac{\pi R^5}{160} = \frac{59\pi R^5}{480}.$$

$$M = \iiint_V z dV = \iiint_V \rho^3 \cos \theta \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2R \cos \theta} \rho^3 d\rho = \frac{19\pi R^4}{80}.$$

Таким чином,
$$z_c = \frac{59\pi R^5}{480} / \frac{19\pi R^4}{80} = \frac{59R}{114}.$$

Контрольні приклади до гл. 10

Перш ніж приступити до виконання індивідуального розрахункового завдання, читачу рекомендується разом з нами розв'язати декілька типових задач, замінюючи знак $\boxed{*}$ необхідними числами та виразами.

Приклад 10.1. Обчислити $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$, якщо область

D обмежена такими лініями $x=1$; $y=x^2$; $y=-\sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо область, що обмежена заданою прямою та параболою. Для визначення меж інтегрування виберемо внутрішню та зовнішню змінні, наприклад, нехай x – зовнішня, а y – внутрішня. Тоді $x \in [\boxed{*}; 1]$ та $-\sqrt{x} \leq y \leq \boxed{*}$. Обчислимо наданий інтеграл

$$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy = 4 \int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} x^{\boxed{*}} dx \int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} (3y^2 + 4 \cdot \boxed{*}) dy =$$