

ПРАКТИЧНА РОБОТА 3

Моделювання зміни чисельності популяції.

Модель природного росту (модель Мальтуса)

Мета роботи: навчитися складати та вирішувати (аналітично та за допомогою ПК) кінетичні рівняння при моделюванні процесів зміни чисельності популяцій, проводити аналіз отриманих рішень, графічно представляти результати.

3.2 Теоретичні відомості

Реальна система: є деяка популяція одного виду (мікроорганізми, зайці і т.п.), у якій відбуваються життєві процеси у всьому їх різноманітті.

Постановка задачі. Визначити закони зміни чисельності популяції у часі.

Основні припущення:

1. Існують лише процеси розмноження та природної загибелі, швидкості яких пропорційні чисельності особин на даний момент часу.

2. Не враховуємо біохімічних, фізіологічних процесів.

3. Немає боротьби між особами за місце проживання, за їжу (нескінченно великий простір та кількість їжі).

4. Розглядаємо лише одну популяцію, немає хижаків.

Модель.

Введемо величини:

x — чисельність популяції в момент t ;

R — швидкість розмноження, γ — коефіцієнт розмноження;

S — швидкість природної загибелі, σ — коефіцієнт природної загибелі;

$\frac{dx}{dt}$ — швидкість зміни чисельності популяції;

ε — коефіцієнт росту.

Тоді $R=\gamma x$, $S=-\sigma x$.

Складемо диференціальне рівняння балансу: зміна чисельності особин за одиницю часу визначається кількістю народжених цей час і померлих:

$$\frac{dx}{dt} = (\gamma - \sigma)x,$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x.$$

Початкова умова: при $t=0$ чисельність особин $x=x_0$.

Вирішуємо рівняння:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \varepsilon dt \quad \ln \frac{x}{x_0} = \varepsilon t,$$

звідси

$$x = x_0 \cdot e^{\varepsilon t}.$$

Графіки для різних параметрів системи наведено на рисунках 3.1-3.4.

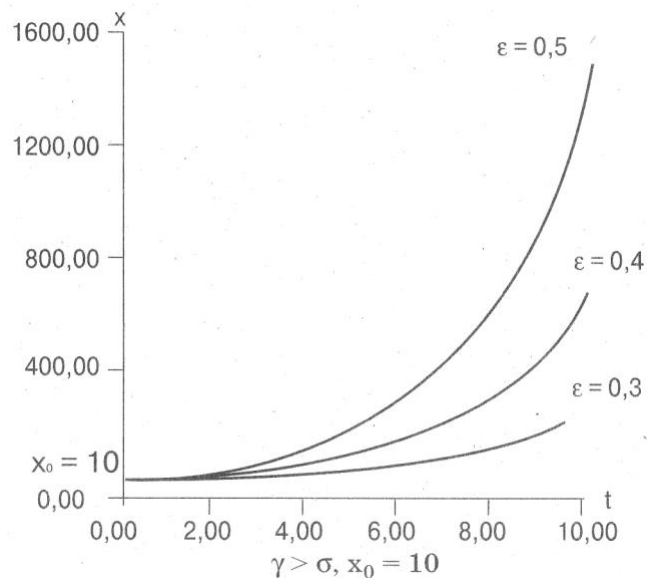


Рисунок 3.1 - Зміна чисельності особин при $\varepsilon > 0$

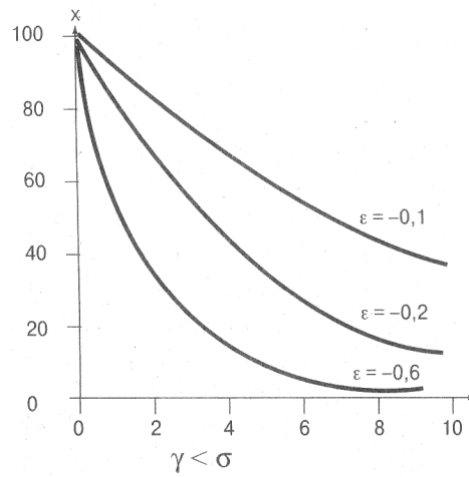


Рисунок 3.2 - Зміна чисельності особин при $\varepsilon < 0$

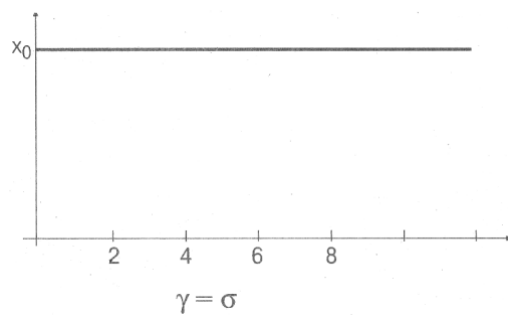


Рисунок 3.3 - Постійне значення чисельності особин при $\varepsilon = 0$

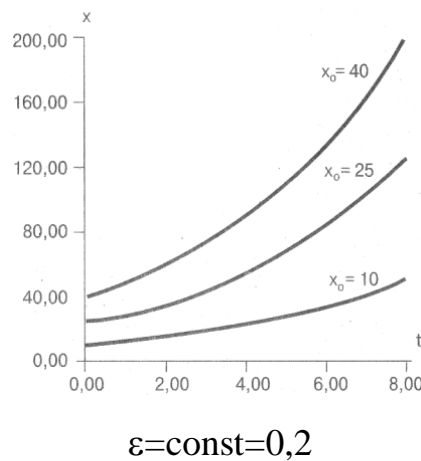


Рисунок 3.4 - Зміна чисельності особин варіації x_0

3.3 Порядок виконання роботи

Проаналізуйте поведінку системи за різних параметрів γ , σ , x_0 .

Для цього:

1. Запишіть закон зміни $x(t)$ для заданих параметрів.

2. Розрахуйте за допомогою комп'ютера $x(t)$.

3. Побудуйте графіки $x(t)$. Криві $x(t)$ для різних γ повинні бути представлені все на одному малюнку, відповідно для різних σ — на другому, для різних x_0 — на третьому (див. приклади у теоретичних відомостях).

4. Оцініть з графіків характерні величини процесу:

а) Час $T_{0,5}$, коли чисельність особин зміниться вдвічі порівняно з первісною. Зіставте з розрахунковими величинами:

$$T_{0,5} = \frac{\ln 2}{|\varepsilon|}.$$

Побудуйте графік залежності $T_{0,5}$ ($|\varepsilon|$).

Зробіть висновок про вплив коефіцієнта зростання на характерний час $T_{0,5}$.

б) Швидкість зміна чисельності популяції при $t=0$. Зіставте з розрахунковими величинами:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_0 \varepsilon.$$

Зробіть висновок про вплив ε на швидкість зміни чисельності популяції у початковий час.

Завдання 1. Проаналізуйте поведінку системи за зміни коефіцієнта зростання $\varepsilon > 0$ ($\gamma > \sigma$). Заповніть таблицю:

Параметри	γ , 1/год.	σ , 1/год.	ε , 1/год.	x_0	Закон зміни $x(t)$
1 система	0,9	0,6	0,3	50	
2 система	1,0	0,6	0,4	50	
3 система	1,1	0,6	0,5	50	

Завдання 2. Проаналізуйте поведінку системи за зміни коефіцієнта зростання $\varepsilon < 0$ ($\gamma < 0$). Заповніть таблицю:

Параметри	γ	σ	ε	x_0	Закон зміни $x(t)$
1 система	0,5	0,6	-0,1	50	
2 система	0,4	0,6	-0,2	50	
3 система	0	0,6	-0,6	50	

Завдання 3. Проаналізуйте поведінку системи за коефіцієнта зростання $\varepsilon=0$ ($\gamma=0$). Заповніть таблицю:

Параметри	γ	σ	ε	x_0	Закон зміни $x(t)$
Система	0,6	0,6	0	50	

Завдання 4. Проаналізуйте поведінку системи за змін початкової чисельності особин x_0 . Заповніть таблицю:

Параметри	γ	σ	ε	x_0	Закон зміни $x(t)$
1 система	0,8	0,6	0,2	10	
2 система	0,8	0,6	0,2	50	
3 система	0,8	0,6	0,2	100	

3.4 Контрольні питання

1. Математичне моделювання. Основні етапи моделювання. Основні припущення. Концепція адекватності моделі.
2. Кінетичні рівняння (загальний принцип їх побудови). Сенс змінних величин, що входять до них (аргумент, параметри функції).
3. Упорядкування рівнянь для заданої системи.