Лабораторний практикум з Модуля 3

Прийняття рішень в умовах невизначеності - теорія ігор

Завдання теорії ігор

Якщо є кілька конфліктуючих сторін (осіб), кожна з яких приймає деяке рішення, яке визначається заданим набором правил і кожному з осіб відомо можливе кінцевий стан конфліктної ситуації зі заздалегідь визначеними для кожної з сторін платежами, то говорять, що має місце гра.

Завдання теорії ігор полягають у виборі такої стратегії поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш.

Ситуація називається *конфліктною* якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні.

Гра - це дійсний чи формальний конфлікт, в якому є принаймні 2 учасники (гравця), кожен з яких прагне до досягнення власних цілей. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення певної мети називаються правилами гри [8].

Кількісна оцінка результатів гри - ***платежі***. Гра називається парною, якщо в ній беруть участь тільки 2 особи. Парна гра називається грою з нульовою сумою, якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто програш одного гравця дорівнює виграшу другого. *Парна гра* з нульовою сумою називається антагоністичною, або грою з суперництвом. Далі будемо розглядати антагоністичні ігри.

Однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, при яких він повинен зробити особистий хід називається стратегією гравця. Під особистим ходом мається на увазі свідомий вибір і здійснення гравцем того чи іншого варіанта дій.

Стратегія гравця називається оптимальною, якщо при багаторазовому повторенні гри, вона забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш або, що теж саме, мінімально можливий середній програш.

Нехай є два гравці, один з яких може вибрати i-у стратегію з m своїх можливих стратегій, а другий, не знаючи вибору першого, вибирає j-у стратегію з n своїх можливих стратегій. У результаті перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий - програє цю величину. З чисел a_{ij} складемо матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Рядки відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці - стратегіям другого. Ці стратегії називаються *чистими*.

Матриця гри A називається платіжною. Гру, яка визначається матрицею A_{m*n} називають кінцевою грою розмірності m*n.

Число $\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$ називають *нижній ціною гри* (максимінімум), а відповідна йому стратегія - максиміна (рядок).

Число $\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$ називають *верхній ціною гри* (мінімакс), а відповідна йому стратегія гравця - мінімаксна (стовпець).

Теорема 1. Нижня ціна гри завжди не перевершує верхню ціну гри.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то число v називають ціною гри. Гра, для якої $\alpha = \beta$ називається грою з сідлової точки. Для такої гри знаходження рішення полягає у виборі максиміний або мінімаксний стратегії, які є оптимальними.

Якщо гра, задана матрицею A не має сідлової точки, то для знаходження її рішення використовуються змішані стратегії.

Вектор, кожна з компонент якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається змішаною стратегією даного гравця. З даного визначення випливає, що сума компонент зазначеного вектора дорівнює 1, а самі компоненти більше або дорівнюють нулю.

Зазвичай змішану стратегію першого гравця позначають як $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$, а другого гравця як $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, причому:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} z_j = 1$$

Якщо U^* – оптимальна стратегія першого гравця, а Z^* – оптимальна стратегія другого гравця, то: $v = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* Z_j^*$

Визначення оптимальних стратегій та ціни гри складає процес знаходження рішення гри.

Теорема 2. Будь-яка матрична гра з нульовою сумою має рішення змішаних стратегій.

Теорема 3. Щоб число v було ціною гри, а U^* і Z^* – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо виконання нерівностей:

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* \geq v$ для всіх $j = 1,2,...,n$; $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Z_j^* \leq v$ для всіх $i = 1,2,...,m$

Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування

Розглянемо гру розмірності m*n, яка визначається матрицею А. Згідно теоремі 3, для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = (u_1, u_2, ..., u_m)$ і ціни гри виконується нерівність для всіх.

Припустимо, що $v > 0$. Цього завжди можна досягти додатком до всіх елементів матриці А одного й того ж постійного числа С, що не приведе до зміни оптимальних стратегій, а тільки лише збільшить ціну гри на С.

Розділивши обидві частини останнього нерівності на v, одержимо: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{U_i^*}{v} \geq 1$. Виконавши заміну змінних $\frac{U_i^*}{v} = y_i^*$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1, \; y_i^* \geq 0.$$

Використовуючи введене позначення, перепишемо умову $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$ у вигляді $\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \frac{1}{v}$.

Оскільки перший гравець прагне отримати максимальний виграш, то він повинен забезпечити мінімум величині $\frac{1}{v}$. З урахуванням цього, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \to \min$ за умов, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$, $y_i^* \geq 0$.

Аналогічні міркування показують, що визначення оптимальної стратегії другого гравця зводяться до знаходження максимального значення функції $F = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \to \max$ при аналогічних умовах.

Таким чином, одержуємо пару двоїстих задач лінійного програмування.

Пряма задача:

$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \to \min$ - цільова функція;

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$ для всіх - обмеження;

$y_i^* \geq 0$ - умови не заперечності.

Двоїста задача:

$F^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \to \max$ - цільова функція;

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq 1$ для всіх $i = 1,2,...,m$ - обмеження;

$x_i^* \geq 0$ - умови не заперечності.

Щоб знайти рішення цієї гри, яка визначається матрицею А, необхідно скласти пару двоїстих задач та знайти їх роз‘язок, які використовуються для визначення стратегій та ціни гри за формулами:

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \quad u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*; \quad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*$$

Таким чином, процес знаходження рішення гри з використанням методів лінійного програмування включає в себе етапи:

- складання пари двоїстих задач лінійного програмування, еквівалентних даній грі;

- визначення їх оптимальних рішень;

- використовуючи співвідношення між рішеннями двоїстих задач, оптимальними стратегіями та ціною гри, знаходять рішення гри.

Приклад. Матриця гри А має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Визначити ціну гри та оптимальну стратегію першого та другого гравця.

Знайдемо нижню та верхню ціну гри, нижня:

$$\begin{array}{cc} & \min \\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -5 \\ -5 \end{array} \end{array}$$

$$\alpha = \max(-3; -5; -5) = -1$$

Верхня ціна гри:

$$\begin{array}{cccc} & & A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} & \\ \max & & 4.0 \quad 4.0 \quad 6.0 & \beta = \min(4;4;6) = 4 \end{array}$$

Нижня ціна гри не збігається з верхньої, значить для кожного гравця має місце гра зі змішаною стратегією.

Ціна гри може прийняти негативне значення, оскільки деякі з оцінок $a_{ij} < 0$ (значення в діапазоні [-1; 4]). Додамо до всіх елементів матриці А таке число С, щоб кожен з них став більше нуля (С = 6):

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Складемо пряму й двоїсту задачу лінійного програмування та знайдемо їх рішення.

Пряма задача:

$$F^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* \to \min$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 3y_2^* + 10y_3^* \geq 1 \\ 5y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \geq 1 \\ 11y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1^* \geq 0; \quad y_2^* \geq 0; \quad y_3^* \geq 0$$

Розв‘язуєчи цю задачу лінійного програмування, отримуємо відповіді:

$$F^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* \to \min$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 3y_2^* + 10y_3^* \geq 1 \\ 5y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \geq 1 \\ 11y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1^* \geq 0; \quad y_2^* \geq 0; \quad y_3^* \geq 0$$

Двоїста задача:

$$F^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* \to \max$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 5y_2^* + 11y_3^* \leq 1 \\ 3y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \leq 1 \\ 10y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1^* \geq 0; \quad x_2^* \geq 0; \quad x_3^* \geq 0$$

Розв‘язуючи двоїсту задачу, отримуємо відповіді:

$$F^* = 0.1538; \quad x_1^* = 0.0769; \quad x_2^* = 0.0769; \quad x_3^* = 0.$$

Визначаємо ціну гри: $v = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = \dfrac{1}{0.1538} = 6.5$.

Оптимальна змішана стратегія першого гравця визначається за формулою $u_i^* = v y_i^*$, тобто:

$$U^* = \begin{bmatrix} 6.5 \times 0.1077 \\ 6.5 \times 0.0462 \\ 6.5 * 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Це означає, що перший гравець повинен застосовувати першу стратегію з імовірністю 0,7 і другу – з імовірністю 0,3. Третю стратегію застосовувати не слід.

Оптимальна змішана стратегія другого гравця визначається за формулою $z_j^* = vx_j^*$, тобто:

$$Z^* = (6.5\times 0.0769;\quad 6.5\times 0.0769;\quad 6.5\times 0) = (0.5;\quad 0.5;\quad 0)$$

Це означає, що другий гравець повинен застосовувати першу стратегію з імовірністю 0,5 і другу – з імовірністю 0,5. Третю стратегію застосовувати не слід.

Дана ціна гри $v = 6.5$ розрахована з урахуванням того, що до всіх елементів матриці А додавалося число С = 6. Первісна ціна гри складе: 6,5 – 6 = 0,5. Це і буде середній максимально можливий виграш для першого гравця та середній мінімально можливий програш для другого за умови застосування ними оптимальних змішаних стратегій.

Приклад. Матриця гри А має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Визначити ціну гри та оптимальну стратегію першого і другого гравця.

Знайдемо нижню та верхню ціну гри, нижня:

$$\begin{array}{cc} & \min \\ A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 13* \\ 4 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\alpha = \max(5;13;4;3) = 13$$

Верхня ціна гри:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\max \quad 15 \quad 13^* \quad 20 \quad 13^* \quad 17 \qquad \beta = \min(15;13;20;13;17) = 13$$

Нижня ціна гри збігається з верхньої, значить для кожного гравця має місце гра з чистою стратегією:

- гравець 1 має у своєму розпорядженні 4 стратегії (рядки матриці А). Оптимальною є стратегія № 2;

- другий гравець має в своєму розпорядженні 5 стратегій (стовпці матриці А). Оптимальною є або стратегія № 2 або стратегія № 4;

- середній максимальний виграш першого гравця та середній мінімальний програш другого складають 13 у.о. (елемент матриці А, що стоїть на перетині чистих стратегій) – ціна гри.