МОДУЛЬ 4
ПРИНЦИПИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ ГРУПОВОГО ВИБОРУ

Тема 7 Групові системи підтримки прийняття рішень

7.1 Суть підтримки прийняття рішень

7.2 Формування узагальненого ранжирування об‘єктів

7.3 Оцінка міри узгодженості думок експертів на основі дисперсійного коефіцієнта конкордації

7.1 Суть підтримки прийняття рішень

На практиці груповий вибір поширений так само часто, як і індивідуальний вибір. Основною проблемою при прийнятті рішень груповою ОПР на сьогодні є формування єдиної думки експертів на основі індивідуальних переваг за допомогою відповідного принципу узгодження - оцінка якості виробленої функції групових переваг.

Нехай є безліч рішень $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, групова ОПР складається з d експертів. Функція групових переваг має вигляд: $F = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$, де f_i – оцінка і-ого рішення групою в якісній або кількісній шкалі.

До принципів групового вибору відносять:

1. *Принцип більшості голосів*. У груповій ОПР можуть створюватися коаліції - об'єднання учасників групи зі співпадаючими цілями.

Нехай у груповій ОПР є безліч коаліцій $V = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$, де s - кількість коаліцій, s є [1…d]:

- якщо s = d - всі коаліції одноосібні, всі члени групи мають різні цілі;
- якщо s = 1 - має місце одна коаліція, яка включає всіх членів групи.

Кожна коаліція має свою функцію переваги f_k. Суть принципу більшості голосів - групова перевага повинна відповідати коаліційній перевазі, яка нараховує кількість експертів, що перевищують певний поріг.

Принцип більшості голосів використовується при демократичному способі прийняття рішень, не враховує інтересів усіх членів групи.

2. *Принцип диктатора* - групою приймаються переваги одного експерта.

Функція переваги має вигляд: $F = (f_1, f_2, \ldots, f_d) = f_k$,, де f_k - функція переваг диктатора. За своєю суттю, в даному випадку групова перевага відповідає індивідуальній. При відсутності стимулюючих факторів така група розпадається.

7.2 Формування узагальненого ранжирування об'єктів

Метод групової оцінки об'єктів полягає в раціональній організації та проведенні експертами аналізу проблеми, кількісної оцінки суджень та обробці результатів експертизи. Узагальнене судження групи експертів приймається як рішення проблеми.

Відповідно до гіпотези про те, що експерти є достатньо точними «вимірниками», групова оцінка будується на основі застосування методів усереднення тобто вважається, що індивідуальні оцінки експертів утворюють компактну групу, яка дає можливість використовувати математичне очікування чи медіану як найбільш ймовірну оцінку.

Нехай d експертів оцінили m об'єктів за l показниками. Результати представлені у вигляді елементів матриці x_{is}^{h},

де s – номер експерта $(s = \overline{1,d})$;

i - номер об'єкта $(i = \overline{1,m})$;

h - номер показника (ознаки) порівняння $(h = \overline{1,l})$.

Середнє значення оцінки кожного об'єкта в <u>кількісній шкалі</u> розраховується за формулою:

$$x_i = \sum_{h=1}^{l} \sum_{s=1}^{d} q_h k_s x_{is}^h \tag{4.1}$$

де q_h - вагові коефіцієнти показників, визначають їхню ступінь важливості та визначаються експертним шляхом;

k_s - коефіцієнти компетентності експертів.

Дані коефіцієнти є нормованими величинами, тобто:

$$\sum_{h=1}^{l} q_h = 1, \quad \sum_{s=1}^{d} k_s = 1.$$

Якщо q_{hs} - ваговий коефіцієнт h-го показника за оцінкою s-го експерта, то у усереднений ваговий коефіцієнт h-го показника для всіх експертів розраховується як:

$$q_h = \sum_{s=1}^{d} q_{hs} k_s \text{ ; (h = 1, 2, …, l)} \tag{4.2}$$

Групова оцінка об'єктів, яка отримана шляхом підсумку ваг індивідуальних оцінок експертів, широко застосовується на практиці.

У випадку оцінки об'єктів у порядковій шкалі, елементи матриці є рангами. Завдання обробки даних полягає в побудові узагальненої ранжировки на основі індивідуальних ранжировок експертів.

Кожну ранжировку експертів подають у вигляді матриці парних порівнянь з елементами:

$$y_{ik}^s = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x_{is} \le x_{ks}, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_{is} > x_{ks} \end{cases} \tag{4.3}$$

Складається *d* матриць парних порівнянь, за кількістю експертів. Узагальнена ранжировка повинна відповідати такій матриці парних порівнянь, яка найкращим чином узгоджується з індивідуальними матрицями парних порівнянь експертів (будується за принципом методу медіан).

Медіана – це така матриця парних порівнянь, у якої сума відстаней до всіх індивідуальних матриць парних порівнянь мінімальна.

На підставі матриць парних порівнянь всіх експертів будується сумарна матриця парних порівнянь:

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{d} y_{ik}^{s} \tag{4.4}$$

Елементи узагальненої матриці парних порівнянь заповнюються за правилом:

$$y_{ik}^{*} = \begin{cases} 1, & якщо \quad a_{ik} \geq d/2, \\ 0, & якщо \quad a_{ik} < d/2 \end{cases} \tag{4.5}$$

Тобто, якщо більше половини експертів надали перевагу і-му рішенням, то за принципом більшості голосів, елементу узагальненої матриці присвоюється одиниця, якщо ні – нуль (*d* – кількість експертів).

У випадку, коли необхідно враховувати коефіцієнти компетентності експертів, елементи сумарної матриці розраховуються за формулою:

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{d} k_s y_{ik}^{s} \tag{4.6}$$

де k_s - нормований коефіцієнт компетентності s-го експерта,

$\sum_{s=1}^{d} k_s = 1;$

y_{ik}^{s} - матриця парних порівнянь s-го експерта.

Елементи узагальненої матриці парних порівнянь заповнюються за правилом:

$$y_{ik}^{*}=\begin{cases}1, & якщо \quad a_{ik}\geq 1/2,\\ 0, & якщо \quad a_{ik}<1/2\end{cases} \tag{4.7}$$

Поріг ½ є ймовірністю того, що і-й об'єкт переважає k-й.

При наявності декількох ситуацій (найбільш узагальнений випадок, який включає всі попередні), елементи сумарної матриці розраховуються за формулою:

$$a_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{d}p_j k_s y_{ik}^{sj} \tag{4.8}$$

Узагальнена матриця заповнюється за правилом:

$$y_{ik}^{*}=\begin{cases}1, & якщо \quad a_{ik}\geq 1/2,\\ 0, & якщо \quad a_{ik}<1/2\end{cases} \tag{4.9}$$

Для отримання узагальненої групової ранжировки з використанням узагальненої матриці парних порівнянь, застосовують метод послідовного виділення не домінуючих об'єктів - *операцію транзитивного замикання*, яка полягає в послідовному збільшенні узагальненої матриці парних порівнянь саму на себе до тих пір, поки наступна матриця не буде відрізнятися від попередньої.

Правило множення матриць при транзитивному замиканню: 1*1=1; 1*0=0*1=0; 1+1=1; 1+0=0+1=1.

7.3 Оцінка міри узгодженості думок експертів на основі дисперсійного коефіцієнта конкордації

При підборі експертів враховуються такі їх якості:

- компетентність;
- креативність - здатність до вирішення творчих завдань;
- ставлення до експертизи (активне чи пасивне);
- конформізм - схильний до впливу авторитетів чи ні;
- конструктивність мислення - прагматичний аспект;
- колективізм - позитивний психологічний клімат;
- самокритичність - самооцінка ступеня своєї компетентності.

Для оцінки компетентності експертів використовується *коефіцієнт компетентності.*

Існує ряд методик визначення компетентності експерта. Найбільш поширена методика - це оцінка відносних коефіцієнтів компетентності за результатами висловлювання фахівців, включених в експертну групу, про її склад. Фахівцям пропонується висловити свою думку про включення інших осіб в експертну групу для вирішення певної проблеми. Якщо в цей список додаються особи, яких не було в початковому списку, то їм також пропонується назвати фахівців для участі в експертизі. Провівши кілька турів такого опитування, складається повний список кандидатів в експерти.

За результатами остаточного опитування складається матриця, яка заповнюється за правилом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad j-\text{й} \quad \text{експерт} \qquad \text{назвав} \quad i-\text{го}, \\ 0, & \text{якщо} \quad j-\text{й} \quad \text{експерт} \quad \text{не} \quad \text{назвав} \quad i-\text{го} \end{cases} \tag{4.10}$$

Причому, кожен експерт має право включати чи не включати себе в експертну групу (тобто діагональ матриці може містити нулі).

За даними матриці розраховуються коефіцієнти компетентності як відносні ваги експертів:

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}} \; ; \; (i = \overline{1,m}) \qquad (4.11)$$

де k_i - коефіцієнт компетентності i-го експерта;

m - кількість експертів в групі (розмір матриці).

Коефіцієнти компетентності нормовані, тобто $\sum_{i=1}^{m} k_i = 1$.

Отримані коефіцієнти компетентності експертів можна трактувати як відношення «числа голосів» (сума одиниць у рядках матриці), поданих за i-го експерта усіма експертами до загальної кількості голосів (сума всіх одиниць матриці).

Якщо існує інформація про минулу діяльність експерта, то можна визначити достовірність оцінок експерта за формулою:

$$D_i = \frac{N_i}{N} \; ; \; (i = \overline{1,m}) \qquad (4.12)$$

де N_i - кількість випадків, коли i-й експерт дав прийнятне рішення;

N - загальна кількість експертиз, в яких брав участь i-й експерт.

Тоді, внесок кожного експерта у достовірність оцінок всієї групи:

$$D_i^* = \frac{D_i}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} D_i} \; ; \; (i = \overline{1,m}) \qquad (4.13)$$

де m - кількість експертів;

знаменник - середня достовірність прийнятих рішень групою експертів.

Мірою узгодженості висловлювань експертів є *дисперсійний коефіцієнт конкордації* (коефіцієнт узгодженості) W.

Нехай відома матриця результатів ранжирування m об'єктів групою з d експертів:

$$\left[r_{is} \right]_{md}, \ \left(s=\overline{1,d}\ ;\ i=\overline{1,m} \right) \tag{4.14}$$

де r_{is} - ранг, який s-й експерт присвоїв і-му об'єкту.

На його підставі розраховується сума рангів у кожному рядку. В результаті отримуємо вектор з компонентами: $r_i=\sum_{s=1}^{d} r_{is}\ ,\ \left(i=\overline{1,m} \right)$.

Вважаючи, що r_i є випадковою величиною, знаходять оцінку дисперсії:

$$D=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(r_i-\bar{r} \right)^2 \tag{4.15}$$

де $\bar{r}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{d} r_{is}$ - оцінка математичного очікування (середнє значення рангів).

Дисперсійний коефіцієнт конкордації W визначається як відношення оцінки дисперсії D до максимального значення цієї оцінки $D_{\max}$:

$$W=\frac{D}{D_{\max}} \tag{4.16}$$

де $D_{\max}=\frac{d^2\left(m^3-m \right)}{12\left(m-1 \right)}$.

Дисперсійний коефіцієнт конкордації може змінюватися в межах $0\le W\le 1$, так як $0\le D\le D_{\max}$.

Якщо W = 1, то всі ранжирування експертів однакові, якщо W = 0 - всі ранжирування експертів різняться. Таким чином, чим більше значення приймає коефіцієнт W, тим міра узгодженості висловлювань експертів вище.

Позначимо:

$$S = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{d} r_{is} - \bar{r} \right)^2 \qquad (4.17)$$

Підставимо формулу (4.17) в (4.16), отримаємо дисперсійний коефіцієнт конкордації W для незв'язаних рангів:

$$W = \frac{12}{d^2 (m^3 - m)} \times S \qquad (4.18)$$

У разі наявності в ранжировці експертів пов'язаних рангів, дисперсійний коефіцієнт конкордації W збільшується, а формула (4.18) приймає вигляд:

$$W = \frac{12S}{d^2 (m^3 - m) - d\sum_{s=1}^{d} T_s},$$

$$T_s = \sum_{k=1}^{H_s} (h_k^3 - h_k) \qquad (4.19)$$

де T_s - показник пов'язаних рангів в s ранжировці (в ранжировці s-ого експерта);

H_s - число груп однакових рангів у s ранжировці;

h_k - число рівних рангів в k-ій групі пов'язаних рангів в ранжировці s-ого експерта.

Якщо співпадаючих рангів немає, то $H_s = 0$; $h_k = 0$; $T_s = 0$ і формула (4.19) трансформується в (4.18).