МОДУЛЬ V
ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ОЦІНЮВАННЯ СППР

Тема 9 Оцінювання та вибір методів підтримки прийняття рішень

9.1 Суб'єктивні вимірювання при формуванні рішень

9.2 Вимірювання важливості цілей

9.3 Вимірювання переваг рішень. Вибір рішення

9.4 Класичні критерії вибору оптимального рішення

9.1 Суб'єктивні вимірювання при формуванні рішень

Об'єктивна оцінка або вимірювання досліджуваного явища, процесу може бути виконана за допомогою вимірювальних приладів. На сьогодні теорія об'єктивних вимірювань з урахуванням інструментальної похибки розроблена належним чином.

У суб'єктивних вимірах інструментом оцінки є людина, тому результати таких вимірювань спотворюються під впливом психології його мислення.

В останні роки зроблена спроба розробити загальну формальну схему як об'єктивних, так і суб'єктивних вимірів на основі використання логіки та теорії відносин.

Суб'єктивні вимірювання включають:

- об'єкти;
- показники;
- процедури порівняння.

Об'єктами можуть бути події, явища, ситуації, цілі, рішення та ін.

Показниками порівняння є властивості та характеристики об'єктів (фізичні, тимчасові, просторові, фізіологічні, соціологічні, психологічні та інші).

Процедура порівняння включає визначення відносин між об'єктами та способами їх порівняння:

- рівний - (=);
- більший - (>);
- менший - (<);
- подібний (еквівалентний) - (~). Відношення еквівалентності дозволяє розділити об'єкти на класи, до кожного з яких відносяться однакові за певним показником або групою показників об'єкти;
- кращий - ($\succ$) - строге впорядкування об'єктів (відношення строгого порядку);
- найгірший - ($\prec$) - строге впорядкування об'єктів (відношення строгого порядку);
- не найгірший або еквівалентний - ($\succsim$) - відношення нестрогого порядку; об'єднання об'єктів, які визначаються відносинами строгого порядку і еквівалентності.

Існують різні способи порівняння об'єктів між собою:

- послідовне порівняння всіх об'єктів з одним, який приймають за еталон;
- порівняння об'єктів між собою в довільній або впорядкованої послідовності.

Для *формального опису* множини об'єктів та відношень між ними використовують наступну систему позначень:

$M = < X, R >$

де $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ - множина об'єктів;

$R = (R_1, R_2, \dots, R_s)$ - множина відношень між ними.

Об'єкти X_i та X_j перебувають між собою у відношенні R_k якщо $X_i\ R_k\ X_j$ або $(X_i;X_j)$ є R_k.

Якщо всі об'єкти множини X можна порівняти між собою деяким відношенням R, то таке відношення називається повним. У протилежному випадку - неповне (часткове).

Для *універсального опису* множини об'єктів та відношень між ними використовують числову систему позначень:

N = < C, S >

де C - множина дійсних чисел;

$S = (S_1, S_2, \ldots, S_s)$ - множина відносин між числами.

Відносинам строго та нестрогого порядку при формальному описі відповідають відносини строгої та нестрогої нерівності при універсальному описі.

Таким чином, процедура вимірювання є відображенням об'єктів формальної системи (емпіричної) на множину чисел універсальної системи, тобто:

$$M = < X, R > \overset{f}{\Rightarrow} N = < C, S >$$

За допомогою функції відображення f кожному об'єкту формальної системи приписується кількісна оцінка (число) $C_i = f(X_i)$. При такому відображенні відносини між числами повинні зберігати відносини між об'єктами, наприклад, якщо $X_i \succ X_j$ то й $C_i = f(X_i) \succ C_j = f(X_j)$.

Шкалою називається сукупність емпіричної системи M, числової системи N та функції відображення f: $< M, N, f >$

Нехай є дві шкали, які відрізняються між собою функціями відображення $< M, N, f_1 >$ і$< M, N, f_2 >$. При цьому $C_i = f_1(X_i)$; $C_i' = f_2(X_i)$.

Тоді взаємозв'язок між числами C_i і C_i' можна записати як, $C_i = \varphi(C_i')$ де φ - функція допустимого перетворення.

Шкали вимірювань. Розрізняють такі типи шкал вимірів: найменувань, порядкові, інтервальні, відносин, різниць та абсолютні.

Розглянемо кожну шкалу більш детально.

Шкала найменувань (класифікацій) - використовується для опису приналежності об'єктів певним класам. Усім об'єктам одного класу присвоюється одне й теж число. У цій шкалі немає масштабу та початку відліку. Зберігається відношення еквівалентності та відмінності між об'єктами.

Використовують для індексації номенклатури виробів (специфікація виробів); документів; нумерації підрозділів в організаціях та ін.

Порядкова шкала - використовується для впорядкування об'єктів за однією ознакою (умовою) або сукупністю ознак (критеріями).

Широко використовується при експертній оцінці. Відсутні поняття масштабу та початку відліку.

Числа в цій шкалі визначають порядок проходження об'єктів та не дають можливість визначити на скільки або в скільки разів один об'єкт має перевагу над іншим.

Шкала інтервалів - використовується для відображення величини відмінності між властивостями об'єктів, а також для оцінки корисності об'єктів. Основні властивості - рівність інтервалів, довільні точки відліку та масштаб. Допустимим є лінійне перетворення $\varphi(x) = ax + в,$ (єдина шкала з точністю до лінійного перетворення).

Наприклад: вимірювання температури в градусах за шкалою Цельсія та Фаренгейта.

Шкала відносин - числа на шкалі відображають ставлення властивостей об'єктів (у скільки разів властивість одного об'єкта перевищує таку ж властивість іншого). Допустимим перетворенням шкали є перетворення подібності $\varphi(x) = ax$ тобто ця шкала є окремим випадком шкали інтервалів, коли $в = 0$.

Шкала різниць - показує на скільки один об'єкт переважає над іншим за одним або декількома показниками. Є окремим випадком шкали інтервалів при використанні одиничного масштабу *(а=1).* Допустиме перетворення: $\varphi(x) = x + в.$

Абсолютна шкала - є окремим випадком шкали інтервалів, коли прийнятий одиничний масштаб та нульова точка відліку (a = 1, b = 0).

Допустиме перетворення має вигляд: $\varphi(x) = x.$ Це означає, що існує тільки одне відображення об'єктів на числову систему.

*Шкали найменувань та порядкова є **якісними** шкалами.* У шкалі найменувань описується відмінність або еквівалентність об'єктів; у порядковій шкалі - якісна перевага відмінності об'єктів. Тому в цих шкалах немає поняття початку відліку та масштабу виміру.

*Шкали інтервалів, відносин, різниць та абсолютна є **кількісними** шкалами.*

У цих шкалах існує поняття початку відліку та масштабу, які задаються довільно. Дозволяють вимірювати **на** скільки (шкали інтервалів та різниць) або **у** скільки разів (шкали відносин та абсолютна) один об'єкт відрізняється від іншого за обраним критерієм (показником, ознакою).

Використання кількісних шкал вимагає більш повної інформації про об'єкти, ніж застосування якісних шкал.

Необхідно правильно узгоджувати тип обраної шкали з цілями рішення.

Методи суб'єктивних вимірів. До методів суб'єктивних вимірів відносять: ранжирування, парне порівняння, безпосередню оцінку, послідовне порівняння.

Нехай є безліч об'єктів $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, які необхідно порівняти за одним або кількома показниками.

1 Ранжирування

ОПР впорядковує (сортує) об'єкти за перевагами, при цьому можливі такі випадки:

1) відносини строгого порядку - серед об'єктів немає еквівалентних, тобто $X_1 \succ X_2 \succ X_3 \succ \ldots \succ X_n$, де X_1 - найкращий об'єкт.

Даній безлічі упорядкованих (ранжированих) об'єктів відповідає безліч впорядкованих чисел $C_1 < C_2 < C_3 < ... < C_n$, де найкращий об'єкт X_1 має найменше число C_1 при цьому використовується порядкова шкала (якісна).

Числа $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, … , $C_n = n$ є послідовністю натуральних чисел та називаються *рангами*, позначаються як $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

2) відносини нестрогого порядку - серед об'єктів є еквівалентні, тобто $X_1 \succ X_2 \succ X_3 \sim X_4 \sim X_5 \succ X_6 \succ \ldots \succ X_{n-1} \sim X_n$.

У даному прикладі об'єкти X_3, X_4, X_5 и X_{n-1}, X_n еквівалентні між собою.

Ранги таких об'єктів даються наступним чином: найкращому об'єкту присвоюється ранг 1, другому - ранг 2 і т.д. Для еквівалентних об'єктів призначають однакові (пов'язані) ранги, які дорівнюють середньому арифметичному, тобто:

$r_1 = 1$;

$r_2 = 2$;

$r_3 = r_4 = r_5 = (3 + 4 + 5) / 3 = 4$;

$r_6 = 6$;

…

$r_{n-1} = r_n = (n-1 + n) / 2$.

У разі групового ранжирування кожен експерт S присвоює i-ому об'єкту ранг r_{is}, отримуємо матрицю:

Об‘єкти	Експерти			
	E_1	E_2	…	E_d
X_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1d}
X_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2d}
…	…	…	…	…
X_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{md}

де d - число експертів;

m - кількість об'єктів.

Аналогічний вигляд має матриця, якщо проводиться ранжирування об'єктів одною ОПР за кількома показниками порівняння.

Переваги ранжирування - простота процедури при невеликій кількості об'єктів;

Недоліки ранжирування - складність упорядкування об'єктів при їх значній кількості (більше 20).

2 Парне порівняння - припускає упорядкування об'єктів за перевагами шляхом порівняння між собою всіх можливих їх пар. Це завдання більш просте, ніж ранжирування.

При порівнянні пар об'єктів можливі відносини строгого порядку або відносини еквівалентності. При цьому використовують 2 типи числового представлення:

$c_{ij} = 1$, якщо $X_i \succsim X_j$;

$c_{ij} = 0$, якщо $X_i \prec X_j$.

або

$c_{ij} = 2$, якщо $X_i \succ X_j$;

$c_{ij} = 1$, якщо $X_i \sim X_j$;

$c_{ij} = 0$, якщо $X_i \prec X_j$.

Приклад: нехай $X_5 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3 \sim X_4$. Тоді маємо матрицю парних порівнянь:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	1	1	1	0
X_2	0	1	1	1	0
X_3	0	0	1	1	0
X_4	0	0	1	1	0
X_5	1	1	1	1	1
Сума (rj)	2 (2)	3 (3)	5 (4,5)	5 (4,5)	1 (1)

або

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	2	2	2	0
X_2	0	1	2	2	0
X_3	0	0	1	1	0
X_4	0	0	1	1	0
X_5	2	2	2	2	1
Сума (rj)	3 (2)	5 (3)	8 (4,5)	8 (4,5)	1 (1)

Якщо об'єкти порівнюються за різними показниками або працює група експертів, складається пакет відповідних матриць.

Результати ранжирування легко перетворити в матрицю парного порівняння та навпаки.

3 Безпосередня оцінка - процес присвоєння об'єктам числових значень, які обрані за шкалою інтервалів.

Якщо береться інтервал [0; 1], тоді початок відліку йде від 0, тобто маємо шкалу відносин, наприклад:

$C_1 = f(X_1) = 0{,}45$;

$C_2 = f(X_2) = 0{,}74$;

$C_3 = f(X_3) = 0{,}35$;

$C_4 = f(X_4) = 0{,}56$;

$C_5 = f(X_5) = 0{,}74$.

Така оцінка можлива при наявності повної та об'єктивної інформації про об'єкти, що на практиці зустрічається рідко. Тому застосовують бальну систему оцінки - замість безперервного відрізка розглядають ділянки, кожному з яких приписується свій бал. Використовують п'яти-, десяти-, стобальну оцінки.

4 Послідовне порівняння - комплексна процедура порівняння, яка складається з ранжирування та безпосередньої оцінки.

ОПР послідовно виконує наступні операції:

а) ранжирує об'єкти;

б) проводить безпосередню оцінку об'єктів на відрізку [0; 1]. Перший об'єкт в ранжировці (найкращий) отримує на відрізку числову оцінку 1.

в) якщо цей об'єкт перевершує по перевагах всі інші об'єкти, взяті разом, ОПР збільшує значення оцінки першого об'єкта, в іншому випадку - зменшує.

г) повертаємося до пункту (б) і послідовно виконуємо пункти (б), (в), (г) для 2, 3, n-го об'єкту.

Усі розглянуті методи суб'єктивних вимірів можуть призводити до близьких, але різних результатів. Рекомендується комплексне використання всіх методів при розв‘язанні конкретної задачі.

9.2 Вимірювання важливості цілей

У ЗПР після визначення проблемної ситуації (ПС) формується безліч конкретних цілей, які бажано досягти при прийнятті рішення.

Тільки в простих та індивідуальних випадках вдається обмежитися однією метою. Не всі цілі є однаково важливими при вирішенні ПС, тому виникає необхідність вимірювання їхньої важливості.

Числова характеристика важливості цілей називається *пріоритетом*. Пріоритети зазвичай вимірюються за порядковою шкалою (ранжирування, парне порівняння) або в шкалі відносин на інтервалі [0; 1] за умови нормування.

Умова нормування припускає, що сума коефіцієнтів відносної важливості всіх цілей (пріоритетів) дорівнює 1.

Нехай є n цілей (A), для яких проведена процедура парного порівняння за ступенем важливості. Результати представлені у вигляді матриці з елементами:

$Z_{ij} = 1$, якщо $A_i \succsim A_j$;

$Z_{ij} = 0$, якщо $A_i \prec A_j$.

Якщо мета A_i більш приваблива в сенсі важливості, ніж мета A_j, тобто, якщо $A_i \succ A_j$ то елемент $Z_{ij} = 1$; в протилежному випадку - $Z_{ij} = 0$.

Знаходимо кількість одиниць в кожному рядку:

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}, \quad (i = \overline{1,n})$$

Тоді коефіцієнт важливості цілей за умови їх нормування визначається за формулою:

$$K_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}} = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}, \quad (i = \overline{1, n})$$

При цьому, буде виконуватися рівність:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} K_i = 1 \right)$$

<u>*Приклад*</u>*:* нехай$A_1 \succ A_2 \succ A_3$. Матриця парних порівнянь Z_{ij} матиме вигляд:

	A_1	A_2	A_3	Z_i
A_1	1	1	1	3
A_2	0	1	1	2
A_3	0	0	1	1
Усього:				6

Тоді К1 = 3/6; К2 = 2/6; К3 = 1/6.

9.3 Вимірювання переваг рішень. Вибір рішення

Вимірювання переваг альтернативних рішень передбачає їх відображення на числову вісь за допомогою функції переваги $f(Y_i, S_j, A_k)$. Ця функція визначає перевагу рішення Y_i в ситуації S_j при досягненні мети A_k.

Функція переваги описує комплексну оцінку позитивних та негативних наслідків рішень, а тому характеризує їхню ефективність та якість.

Функція переваги залежить від особливостей мислення конкретної ОПР. Розглянемо графіки типових функцій переваг. На горизонтальній осі будемо відкладати об'єктивно вимірюваний параметр *Y* (виграш, програш); на вертикальній - значення функції переваги *f (Y*).

1. Об'єктивна ОПР - вважає, що значення функції переваги пропорційно очікуваному виграшу або програшу (рис. 5.1):

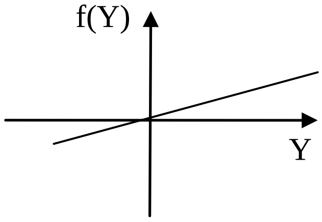

Рис. 5.1 Об'єктивна ОПР

2. Азартна ОПР - зі збільшенням величини виграшу, ОПР приписує йому значно більшу цінність, тобто перебільшує значення виграшу (рис. 5.2):

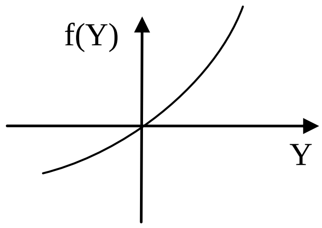

Рис. 5.2 Азартна ОПР

3. Обережна ОПР - особливу увагу ОПР приділяє попередженню великих програшів та недооцінює корисність від отримання виграшу (рис. 5.3):

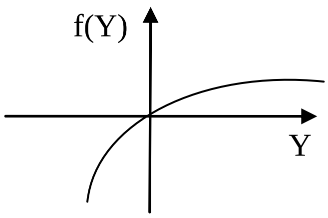

Рис. 5.3 Обережна ОПР

4. Максималіст - ОПР перебільшує цінність виграшу та втрати від програшу, (рис. 5.4):

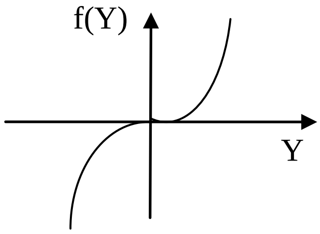

Рис. 5.4 Перебільшення цінності виграшу та втрат від програшу

5. Нормальна ОПР - при невеликих виграшах та програшах веде себе об'єктивно, при великих значеннях - недовіра до великого виграшу та обережність до великого програшу (рис. 5.5):

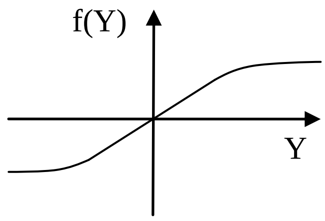

Рис. 5.5 Нормальна ОПР

Дані особистості необхідно враховувати при розстановці кадрів. Наприклад, якщо людина має обережну функцію переваги, то його недоцільно використовувати в діяльності, яка вимагає ризику, для цього підійде людина з азартною функцією переваги.

Підготовка до вибору рішення зводиться до впорядкування отриманої інформації в залежності від типу завдання [7].

<u>Типи ЗПР для індивідуальної ОПР:</u>

1. ЗПР (I) - індивідуальна ОПР сформувала одну ціль з одним показником в одній ситуації

Вихідна інформація представлена у вигляді таблиці 5.1:

Таблиця 5.1

Вихідна інформація для ЗПР (I)

Y_1	$f_1(Y_1)$
Y_2	$f_2(Y_2)$
…	…
Y_m	$f_m(Y_m)$

де Y_i - варіанти рішень;

$f_i(Y_i)$ - функція переваги i-го варіанта рішення щодо досягнення однієї мети.

Вимірювання переваг здійснюється за порядковою (ранги) або кількісною шкалою.

2. ЗПР (IS) - індивідуальна ОПР сформулювала одну мету з одним показником та кількома гіпотетичними ситуаціями.

Інформація подається у вигляді таблиці 5.2:

Таблиця 5.2

Вихідна інформація для ЗПР (IS)

Y_i	S_1	S_2	…	S_n
Y_1	$f_{11}(Y_1)$	$f_{12}(Y_1)$	…	$f_{1n}(Y_1)$
Y_2	$f_{21}(Y_2)$	$f_{22}(Y_2)$	…	$f_{2n}(Y_2)$
…	…	…	…	…
Y_m	$f_{m1}(Y_m)$	$f_{m2}(Y_m)$	…	$f_{mn}(Y_m)$
P_j	p_1	p_2	…	p_n

де Y_i - варіанти рішень;

S_j - можливі ситуації, що утворюють повну групу подій;

P_j - ймовірності настання ситуацій, $\Sigma p_j = 1$;

F_{ij} (Y_i) - значення функції переваги за порядковою чи кількісною шкалою.

3. ЗПР (IA) - індивідуальна ОПР сформулювала кілька цілей в одній ситуації (або одну мету з кількома показниками).

Інформація подається у вигляді таблиці 5.3:

Таблиця 5.3

Вихідна інформація для ЗПР (IA)

Y_i	A_1	A_2	…	A_k
Y_1	$f_{11}(Y_1)$	$f_{12}(Y_1)$	…	$f_{1k}(Y_1)$
Y_2	$f_{21}(Y_2)$	$f_{22}(Y_2)$	…	$f_{2k}(Y_2)$
…	…	…	…	…
Y_m	$f_{m1}(Y_m)$	$f_{m2}(Y_m)$	…	$f_{mk}(Y_m)$
β_j	β_1	β_2	…	β_k

де Y_i - варіанти рішень;

A_j - цілі;

β_j - нормовані пріоритети цілей, $\Sigma\beta j = 1$;

f_{ij} (Y_i) - значення функції переваги за порядковою чи кількісною шкалою.

Типи ЗПР для групової ОПР:

1. ЗПР (G) - групова ОПР сформулювала одну мету з одним показником в одній ситуації;

2. ЗПР (GS) - групова ОПР сформулювала одну мету з одним показником та кількома гіпотетичними ситуаціями, що утворюють повну групу подій;

3. ЗПР (GA) - групова ОПР сформулювала кілька цілей в одній ситуації (або одну мету з кількома показниками);

4. ЗПР (GSA) - групова ОПР сформулювала кілька цілей в декількох ситуаціях.

Вихідна інформація подається у вигляді набору відповідних матриць (за кількістю експертів).

9.4 Класичні критерії вибору оптимального рішення

Будь-яке рішення в умовах неповної інформації приймається відповідно до будь-якої оціночної функцією, вибір якої повинен здійснюватися з урахуванням кількісних характеристик ситуації, в якій приймаються рішення.

В даний час відомі та знайшли широке застосування наступні класичні критерії прийняття рішень

- максимінний критерій Вальда (критерій крайнього песимізму) - обережна стратегія;
- мінімаксний критерій Севіджа (критерій відносного песимізму);
- критерій оптимізму - відповідає оптимістичній стратегії вибору;
- критерій максимуму середнього виграшу Байеса-Лапласа - раціональна стратегія вибору.

Похідними критеріями прийняття рішень від перерахованих вище є:

- критерій Гурвіца - врівноважена стратегія вибору;
- критерій Ходжа-Лемана;
- критерій Гермейра;
- складовий критерій;
- критерій похідних.

Зазвичай, за-можливостю, всі перераховані критерії застосовують по черзі, після чого з кількох варіантів оптимальних рішень доводиться виділяти деяке остаточне рішення. Це дозволяє, знизити вплив суб'єктивних факторів.

Нехай оптимальне рішення y^* визначається за допомогою коефіцієнта важливості рішень β. Загальне правило вибору записується у вигляді:

$$y^* = \underset{\beta_i}{extremum}\ (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \tag{5.1}$$

Якщо коефіцієнт важливості рішень β визначено так, що його більшому значенню відповідає краще рішення, то правило (5.1) записується у вигляді:

$$y^* = \underset{\beta_i}{max}\ (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \tag{5.2}$$

І навпаки, якщо більшому значенню коефіцієнта важливості рішень β відповідає найгірше рішення, то:

$$y^* = \underset{\beta_i}{min}\ (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \tag{5.3}$$

Правила (5.2) та (5.3) є основою класичних критеріїв прийняття рішень.

Максимінний критерій Вальда застосовується коли:

- про можливу появу ситуації нічого не відомо - не вимагає знання ймовірності настання тієї чи іншої події (перевага даного методу);
- необхідно враховувати можливість настання різних ситуацій;
- рішення приймається та реалізується тільки 1 раз;
- необхідно виключити будь-який ризик, тобто, ні за яких умов оптимальне рішення y^* не може бути гірше рішення y_i з множини Парето.

Так як критерій крайнього песимізму Вальда виходить з передумови про те, що якщо найгірший варіант може відбутися, він обов'язково відбудеться, то коефіцієнт важливості і-го рішення β_i є найгіршим значенням функції переваги за всіма можливими ситуаціями.

Якщо функція переваги f_{ij} задається так, що її кращому значенню відповідає більше число, то коефіцієнт важливості рішень розраховується за правилом (5.4):

$$\beta_i = \underset{j}{min}\ f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots m \tag{5.4}$$

Тобто, для i-го рішення за всіма можливими j ситуаціями вибирається найменше значення функції переваги. Оптимальне рішення буде визначатися за правилом (5.5):

$$y^* = \max_i \left(\min_j f_{ij}\right) \tag{5.5}$$

Правило вибору оптимального рішення - матриця ситуацій доповнюється двома колонками: перша заповнюється найменшими значеннями функції переваги f_{ij} для кожного рядка, у другій колонці вибирають той варіант рішення, який має найбільше значення в першій колонці.

Якщо функція переваги f_{ij} задається так, що її кращому значенню відповідає менше число, то коефіцієнт важливості рішень розраховується як:

$$\beta_i = \max_j f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots m \tag{5.6}$$

Оптимальне рішення буде визначатися за формулою:

$$y^* = \min_i \left(\max_j f_{ij}\right) \tag{5.7}$$

Мінімаксний критерій Севіджа. До даного методу прийняття рішень пред'являються ті ж вимоги, що й до критерію Вальда. Найгіршим рішенням вважається рішення з максимальним ризиком, а не мінімальним виграшем.

Функція переваг f_{ij} виражається в рангах (кращому значенню відповідає менший ранг).

Введемо такі умовні позначення:

$$A_{ij} = \max_i f_{ij} - f_{ij} \tag{5.8}$$

де A_{ij} - матриця різниць.

Матриця різниць показує величину недоотриманого виграшу, коли в ситуації s_j замість найкращого можливого рішення вибирається рішення y_i.

Коефіцієнт важливості рішень буде розраховуватися як:

$$\beta_i = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i f_{ij} - f_{ij}\right) \tag{5.9}$$

Тоді, оптимальне рішення знаходиться з виразу:

$$y^* = \min_i \left(\max_j \left(\max_i f_{ij} - f_{ij}\right)\right) \tag{5.10}$$

Тобто, до матриці різниць був застосований критерій Вальда.

Правило вибору оптимального рішення - кожен елемент матриці функції переваги f_{ij} віднімається від найбільшого результату відповідного стовпця; отримуємо матрицю різниць A_{ij}. Ця матриця доповнюється стовпцем, в якому фіксуються найбільші значення у рядках. Оптимальному рішенню відповідає найменше значення даного стовпця.

Критерій оптимізму. Якщо вимірювання проводять в кількісних шкалах, то коефіцієнт важливості рішень розраховується як:

$$\beta_i = \max_j f_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots m \tag{5.11}$$

Правило вибору оптимального рішення буде мати вигляд:

$$y^* = \max_i \left(\max_j f_{ij}\right) \tag{5.12}$$

Якщо ж вимірювання переваг проводять у порядковій шкалі (чим рішення краще, тим ранг менше), то правило вибору буде наступним:

$$y^* = \min_i \left(\min_j f_{ij}\right) \tag{5.13}$$

Для даного методу також не обов'язково знати ймовірності настання ситуацій.

Критерій максимуму середнього виграшу Байеса-Лапласа (BL-критерій). Відповідає раціональній стратегії вибору. Для даного критерію характерні наступні відмітні особливості:

- вимагає знання ймовірності настання тієї чи іншої події;

- рішення приймається та реалізується багато разів;

- для малої кількості реалізації рішення допускається певний ризик.

При досить великій кількості реалізацій рішення відповідно до критерію максимуму середнього виграшу, середнє значення поступово стабілізується, а при нескінченній реалізації будь-який ризик виключається.

Критерій Байєса-Лапласа більш оптимістичний, ніж критерій Вальда, але вимагає більшої інформованості.

Функція переваги вимірюється в кількісній шкалі. Коефіцієнти важливості рішень є середній виграш, який можна отримати при реалізації кожного рішення з усіх ситуацій та визначається як математичне очікування виграшу:

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} p_k f_{ik}\ ,\ (i = \overline{1,m}) \tag{5.14}$$

де p_k - ймовірність настання k-ої ситуації, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1,\ (k = \overline{1,n})$;

n - можливу кількість ситуацій з заданими ймовірностями;

f_{ik} - значення функції переваги, яке є оцінкою i-го рішення в k-ій ситуації;

m - кількість можливих рішень, з яких слід вибрати оптимальне.

Оптимальне рішення в кількісній шкалі буде визначатися з виразу:

$$Y^* = \max_i \beta_i = \max_i \sum_{k=1}^{n} p_k f_{ik} \tag{5.15}$$

Правило вибору: матриця значень функції переваги $[f_{ij}]$ доповнюється ще одним стовпцем, який містить математичні очікування у кожному рядку (коефіцієнти важливості рішень). Вибирається те рішення, якому відповідає найбільше значення математичного очікування.

Застосування критерію Байєса-Лапласа для порядкової шкали

Ранжирування рішень по кожній з k-ої ситуації переводять в k матриць парних порівнянь з елементами, записаними за правилом:

$$x_{ij}^{k}=\begin{cases}1, & якщо \quad f(Y_i)\le f(Y_j);\\ 0, & якщо \quad f(Y_i)>f(Y_j)\end{cases} \quad (i,j=\overline{1,m}) \tag{5.19}$$

де $f(Y_i)$ - ранг i-го рішення.

Сукупність матриць парних порівнянь можна розглядати як точки в просторі ранжируваних рішень. У цьому просторі вводять поняття відстані між точками - матрицями парних порівнянь, як кількість розбіжностей значень елементів матриць.

Відстань між двома матрицями парних порівнянь розраховується за формулою:

$$d_{ks}=\sum_{i,j=1}^{m}\left|x_{ij}^{k}-x_{ij}^{s}\right| \tag{5.20}$$

де d_{ks} - відстань між матрицями парних порівнянь рішень k-ої та s-ої ситуацій;

x_{ij}^{k} x_{ij}^{s} - елементи матриці парних порівнянь відповідно для k-ої и s-ої ситуацій.

Для побудови середньої матриці парних порівнянь $[y_{ij}]$ використовують умову мінімуму сумарної відстані цієї матриці від матриць парних порівнянь для всіх ситуацій:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}p_k\left|x_{ij}^{k}-y_{ij}\right|\to\min \tag{5.21}$$

де p_k - імовірність ситуацій.

Враховуючи, що x_{ij}^{k}, y_{ij} можуть приймати значення тільки 0 або 1, уявімо модуль різниці як квадрат різниці:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}p_k\left|x_{ij}^{k}-y_{ij}\right|=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}p_k(x_{ij}^{k}-y_{ij})^2=\left\{\begin{matrix}\textit{враховуючи,} & \textit{що}\\ (x_{ij}^{k})^2=x_{ij}^{k}; & (y_{ij})^2=y_{ij}\end{matrix}\right\}= \tag{5.22}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k ((x_{ij}^k)^2 - 2x_{ij}^k y_{ij} + (y_{ij})^2) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k x_{ij}^k - 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k y_{ij} \left(x_{ij}^k - \frac{1}{2} \right)$$

Враховуючи, що $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k x_{ij}^k$ у виразі (5.22) є величиною постійною, а тому його мінімальне значення відповідає максимальному значенню від'ємника, тобто:

$$\sum_{i,j=1}^{m} y_{ij} \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_{ij}^k - \frac{1}{2} \right) = \sum_{i,j=1}^{m} y_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_{ij}^k - \frac{1}{2} \right) \to \max_{y_{ij}} \qquad (5.23)$$

Таким чином, правило вибору оптимального рішення у порядковій шкалі складається з наступних етапів:

1. Вихідна матриця ранжируваних рішень з усіх ситуацій переводиться до безлічі матриць парних порівнянь рішень по кожній ситуації (кількість матриць дорівнює кількості можливих ситуацій).

2. Кожна матриця парних порівнянь множиться на відповідну ймовірність появи даної ситуації.

3. Отримані матриці складаються та отримують сумарну матрицю.

4. Кожен елемент сумарної матриці порівнюється з порогом 1/2 та якщо значення елемента більше або дорівнює порогу - замінюється на одиницю; в протилежному випадку - на нуль. Таким чином, матриця $[y_{ij}]$ будується за правилом:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k x_{ij}^k \geq 1/2; \\ 0, & \text{якщо} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k x_{ij}^k < 1/2 \end{cases} \qquad (5.24)$$

Коефіцієнти середнього виграшу β_i рішень розраховуються за формулою:

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} y_{ij}} \tag{5.25}$$

Тобто суму елементів (одиниць) в кожному і-му рядку матриці [y_{ij}] ділять на загальну суму одиниць матриці.

6. Оптимальним вважається те рішення, у якого коефіцієнт середнього виграшу β_i максимальний:

$$Y_{BL}^{*} = \max_{i} \beta_i \tag{5.26}$$