ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Тема: Прогнозування розвитку економічних процесів адаптивними моделями короткострокового прогнозування

Ціль: Набуття навичок прогнозування розвитку економічних процесів різної природи на основі КС-моделей короткострокового прогнозування.

Завдання: Зробити короткостроковий прогноз розвитку досліджуваного економічного процесу.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Адаптивні моделі короткострокового прогнозування

Адаптивні методи прогнозування, як будь які методи екстраполяції, дозволяють отримати прогноз економічних показників враховуючи тільки тенденції, що склалися в змінах показників. З метою зростання достовірності оцінок необхідно застосовувати якісні методи прогнозування, які дозволяють враховувати якісно нову інформацію.

Відмінність адаптивних моделей від інших прогностичних моделей полягає в тому, що вони відображають поточні властивості ряду і здатні безперервно враховувати еволюцію динамічних характеристик досліджуваних процесів.

Адаптивні моделі прогнозування мають такі *переваги*:

- застосовуються для широкого круга завдань;

- базуються на інтенсивному аналізі інформації;

- ясність і простота математичного формулювання;

- неоднорідність часових рядів і їх зв'язків знаходить віддзеркалення в адаптивній еволюції параметрів або структури моделей.

Основним недоліком є їх ефективність лише при обробці рядів з помірними змінами в часі. Тому вони виявляються не ефективними при довгостроковому прогнозуванні.

Основою адаптивних моделей є проста модель експоненціального згладжування:

$$S_t = \alpha x_t + \beta S_{t-1}, \qquad \beta = 1-\alpha, \qquad (1)$$

де S_t – значення експоненціальної середньої в момент часу t;

x_t – вхідний часовий ряд; α – параметр згладжування, const, $0 < \alpha < 1$.

Величина S_t є зваженою сумою усіх членів ряду. Причому ваги падають експоненційно залежно від давності ("віку") спостереження. Це пояснює, чому величина названа експоненціальною середньою. Тому експоненціальне згладжування можна представити як фільтр, на вхід якого послідовно поступають члени вхідного ряду, а на виході формуються поточні значення експоненціальної середньої.

Експоненціальне згладжування є простим варіантом самонавчальної моделі. Обчислення прості і виконуються ітеративно (вимагають навіть менше арифметичних операцій, чим, наприклад, ковзана середня), а масив минулої інформації зменшений до одного значення S_{t-1}. Таку модель називатимемо адаптивною експоненціального типу, а величину α - *параметром адаптації*. Цей параметр згладжування характеризує швидкість реакції моделі на зміни рівня процесу, але одночасно визначає і здатність системи згладжувати випадкові відхилення. Тому величину α наслідує певне проміжне значення між 0 і 1 залежно від конкретних властивостей часового ряду.

Адаптивні моделі короткострокового прогнозування базуються на двох схемах: ***ковзногосереднього (КС-моделі) і авторегресії (АР-моделі).***

Відповідно до схеми ковзногосереднього, оцінкою поточного рівня є зважене середнє всіх попередніх рівнів, причому ваги при спостереженнях зменшуються відповідно до віддалення від останнього рівня, тобто інформаційна цінність спостережень вважається тим більшою, чим ближче до кінця інтервалу спостережень вони знаходяться. Такі моделі більш точно відображають зміни, що відбуваються в тенденції, але не дозволяють у чистому виді відображати коливання ряду.

У практиці соціально-економічного прогнозування найбільш часто використовуються ***дві базові КС-моделі: Брауна та Хольта***, перша з яких є частковим випадком другої.

Ці моделі представляють процес розвитку як лінійну тенденцію з параметрами, що постійно змінюються.

У випадку *моделі Р.Брауна* передбачається, що ряд генерується так:

$$y_t = a_{1,t} + \varepsilon_t , \qquad (2)$$

де $a_{1,t}$ - середній рівень ряду, що варіюється в часі;

ε_t - випадкові неавтокорельовано відхилення з нульовим математичним очікуванням і дисперсією.

Прогнозна модель має вигляд:

$$\hat{y}\ (t+\tau) = \hat{a}_{1,t} , \qquad \hat{a}_{1,t} = S_t , \qquad (3)$$

де $\hat{y}(t+\tau)$ - прогноз, зроблений у момент *t* на τ одиниць часу (кроків) вперед;

$\hat{a}_{1,t}$ - оцінка $a_{1,t}$ (знак над величиною тут і далі означатиме оцінку).

Засобом оцінки єдиного параметра моделі служить експоненціальна середня $\hat{a}_{1,t} = S_t$. Таким чином, усі властивості експоненціальною середньою поширюються на прогнозну модель. Новий прогноз S_t є результатом коригування попереднього прогнозу з урахуванням його помилки. У цьому і полягає сутність адаптації.

Прогнозна оцінка рівня ряду $\hat{y}(t+\tau)$, обчислюються в момент часу *t* на τ кроків уперед:

$$\hat{y}(t+\tau) = a_0(t) + a_1(t)\tau, \qquad (4)$$

$$a_0(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1) + (1-\beta^2)e(t),$$

$$a_1(t) = a_1(t-1) + (1-\beta^2)e(t),$$

де $a_0(t)$ - оцінка поточного рівня;

$a_1(t)$ - оцінка поточного приросту, обчислюється як експоненціально зважене середнє різниць між поточними експоненціально зваженими середніми значеннями процесу S_t та їх попередніми значеннями S_{t-1}.

β - коефіцієнт дисконтування даних, що змінюється в межах від 0 до 1. Р.Браун рекомендує приймати його значення приблизно 0,7-0,8;

e(t) - помилка прогнозування рівня y_t, обчислена в момент часу *(t-1)* на один крок уперед.

Модифікації і узагальнення цієї моделі призвели до появи цілого сімейства адаптивних моделей з різними властивостями.

<u>Метод Ч.С.Хольта</u> є вдосконаленим методом експоненціального згладжування, при якому параметри згладжування тренда і значення рівня ряду різні. Прогноз у момент часу *t* на τ кроків вперед робиться по формулі:

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_{0,t} + \hat{a}_{1,t} \cdot \tau, \qquad (5)$$

де $\hat{a}_{1,t}$ - коефіцієнт, який оцінюється як експоненціальна середня для приросту параметра $\hat{a}_{0,t}$, тобто:

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 \cdot \Delta\hat{a}_{0,t} - [1-\alpha_1] \cdot \hat{a}_{1,t-1}, \qquad (6)$$

$$\Delta\hat{a}_{0,t} = \hat{a}_{0,t} - \hat{a}_{0,t-1}, 0 \le \alpha_1 \le 1, \qquad (7)$$

де α_1 - перший параметр згладжування.

$\hat{a}_{0,t}$ - коефіцієнт, який оцінюється як експонентна середня рівнів ряду, розрахована з урахуванням попереднього приросту $a_1(t-1)$:

$$\hat{a}_{0,t} = \alpha_0 \cdot \hat{y}_t + [1-\alpha_0] \cdot \left\langle \hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1} \right\rangle, 0 \le \alpha_0 \le 1. \qquad (8)$$

Рівняння (1) визначає прогноз на τ кроків вперед, рівняння (6) служить для оцінки тренду, а (3) - згладжений ряд загального рівня.

Якщо позначити помилку прогнозу зробленого в момент *(t-1)* на момент t через e_t, тобто $e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \hat{a}_{0,t-1} - \hat{a}_{1,t-1}$, тоді співвідношення (6) і (8) можна представити так:

$$\hat{a}_{0,t} = \hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1} + \alpha_0 \cdot e_t, \qquad (9)$$

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \alpha_1 \cdot \alpha_0 \cdot e_t. \qquad (10)$$

Постійні згладжування також підбираються експериментальним шляхом. Головною умовою є знаходження такої пари постійних згладжування, при яких значення прогнозу на тестовому наборі значень показало б максимально достовірний результат. Рекомендації по вибору оптимальних значень α_0 та α_1 наступні: $0{,}1 \le \alpha_0 \le 0{,}3; \quad 0{,}01 \le \alpha_1 \le 0{,}250$.

Значення $a_{0,t}$ слід задавати як середнє декількох перших значень рівня ряду, а значення $a_{1,t}$ - як середнє декількох перших значень різниць рівнів ряду.

Недолік методу Хольта полягає в неможливості врахувати при прогнозуванні сезонні коливання.

Метод П.Р.Уінтерса є розширенням методу Хольта, в якому зроблена спроба врахувати сезонні коливання шляхом введення третього параметра - множника, який враховує сезонний ефект.

Перш ніж переходити до повної моделі Уінтерса, що відображає і сезонність, і лінійну тенденцію зростання, розглянемо простіший варіант, який *містить тільки сезонний ефект*. Модель має вигляд:

$$\hat{y}(t+1) = \hat{a}_{1,t} \cdot \hat{f}_{t-l+1}, \qquad \hat{f}_t = \frac{y_t}{q_t}, \qquad (11)$$

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 \frac{y_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1-\alpha_1)\hat{a}_{1,t-1}, \qquad (12)$$

$$\hat{f}_t = \alpha_2 \frac{y_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1-\alpha_2)\hat{f}_{t-1}, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, \qquad (13)$$

де $a_{1,t}$ характеризує тенденцію розвитку процесу;

$\hat{f}_t$ - коефіцієнт сезонності;

q_t - середньостаціонарне значення ряду у момент часу *t;*

l - кількість фаз в повному сезонному циклі (якщо ряд представляє місячні спостереження, то в економіці зазвичай *l=12*, при квартальних даних *l*=4).

Очевидно $\hat{a}_{1,t}$ є зваженою сумою поточної оцінки y_t / f_{t-1} отриманої шляхом очищення від сезонних коливань фактичних даних y_t і попередньої оцінки $\hat{a}_{1,t-1}$. В якості коефіцієнта сезонності f_t береться його найбільш пізня оцінка, зроблена для аналогічної фази циклу. Потім величина $\hat{a}_{1,t}$, отримана за рівнянням (12), використовується для визначення нової оцінки коефіцієнта сезонності за рівнянням (13). Узагальнене рівняння для прогнозу на τ кроків вперед має вигляд:

$$\hat{y}(t+\tau) = \hat{a}_{1,t} \cdot \hat{f}_{t-l+\tau}. \tag{14}$$

Величини $\hat{a}_{1,t}$ і $\hat{f}_t$ можуть бути записані через минулі дані і початкові умови:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \alpha_1 \sum_{n=0}^{t} (1-\alpha_1)^n \frac{x_{t-n}}{\hat{f}_{t-l-n}} + (1-\alpha_1)^{t+1} \hat{a}_{1,0}, \\ \hat{f}_t &= \alpha_2 \sum_{n=0}^{J} (1-\alpha_2)^n \frac{x_{t-n}}{\hat{a}_{1,t-nl}} + (1-\alpha_2)^{J+1} \hat{f}_{t,0}, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1. \end{aligned} \tag{15}$$

де $\hat{a}_{1,0}$ - початкові значення a_1;

$\hat{f}_{t,0}$ - початкове значення f у відповідній фазі (місяці) циклу (роки);

J - найбільша ціла частина t/l.

Отже, прогноз є функцією усіх минулих значень фактичного ряду, параметрів α_1, α_2 і початкових умов $\hat{a}_{1,0}$, $\hat{f}_{1,0}$, $\hat{f}_{2,0}, \ldots, \hat{f}_{l,0}$.

Вплив початкових умов на прогноз залежить від величини вагів і довжини ряду, що передує теперішньому моменту *t*. Вплив $\hat{a}_{1,0}$ зазвичай зменшуватиметься швидше, ніж вплив початкових значень $\hat{f}_{1,0}$ оскільки $\hat{a}_{1,0}$ переглядається на кожному кроці, а f_t тільки один раз за цикл. Якщо ряд має тенденцію, то в модель необхідно ввести специфічний член, що її враховує.

Повна сезонна модель Уінтерса з лінійним зростанням аналогічна тільки що розглянутій:

$$\hat{x}(t+\tau) = (\hat{a}_{1,t} + \tau \cdot \hat{a}_{2,t}) \hat{f}_{t-l+\tau},$$

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 \frac{x_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}), \qquad \hat{f}_t = \alpha_2 \frac{x_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1-\alpha_2)\hat{f}_{t-1},$$
$$\hat{a}_{2,t-1} = \alpha_3(\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_3)\cdot \hat{a}_{2,t-1}, \qquad 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1. \qquad (16)$$

Єдиною зміною у виразі для $\hat{a}_{1,t}$ є додавання $\hat{a}_{2,t}$ - найбільш пізньої оцінки адитивного чинника зростання, що характеризує зміну середнього за повний сезонний цикл рівня процесу за одиницю часу (місяць). Рівняння для оновлення коефіцієнта сезонності залишається тим же, що і раніше. Оцінки $\hat{a}_{2,t}$ модифікуються за аналогічною процедурою експоненціального згладжування. Прогноз є тут функцією минулих і поточних даних, параметри α і первинних значень $\hat{a}_{1,0}$, $\hat{a}_{2,0}$, $\hat{f}_{1,0}$.

Якість і точність прогнозів залежить від цих чинників. Оптимальні параметри α Уінтерс пропонує знаходити експериментальним шляхом. Критерієм порівняння він бере стандартне відхилення помилки. При цьому передбачається, що прогноз не зміщений. Пошук, здійснювався за допомогою сітки значень α.

Прогноз по <u>*моделі Хольта-Уінтерса*</u> здійснюється на основі рівняння:

$$\hat{y}_{t+j} = \left[\hat{a}_{0,t} + \hat{a}_{1,t}\cdot j\right]\cdot \hat{F}_{t+j-l}, \qquad (17)$$

де $\hat{F}_{t+j-l}$ - сезонний компонент, який розраховується по формулі експоненціальній середній:

$$\hat{F}_t = \alpha_2 \cdot \hat{f}_t + (1-\alpha_2)\cdot \hat{f}_{t-l}, 0 \le \alpha_2 \le 1, \qquad (18)$$

$$\hat{f}_t = \frac{y_t}{q_t} \quad \text{, або} \quad \hat{f}_t = \frac{y_t}{\hat{a}_{0,t}} \qquad (19)$$

$$\hat{a}_{0,t} = \alpha_0 \frac{y_t}{\hat{F}_{t-l}} + [1-\alpha_0]\cdot\left\langle \hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1}\right\rangle, 0 \le \alpha_0 \le 1. \qquad (20)$$

де $\hat{f}_t$ - коефіцієнт сезонності;

l - число часових тактів, що містяться в повному сезонному циклі;

α_2 - параметр загладжування.

Далі відповідно до процедури Хольта визначаємо $a_{1,t}$ через експоненціальне згладжування приростів $a_{0,t}$ (рівняння (6) -(8)).

Таким чином, прогноз за адитивно-мультиплікативною моделлю Хольта-Уінтерса здійснюється за допомогою рівняння (17), в якому сезонність враховується, коли "чистий" прогноз (розрахований по методу Хольта - рівняння (5)) множиться на сезонний коефіцієнт (рівняння (19)). При цьому сезонний компонент $\hat{F}_{t-l+j}$, коефіцієнти

$a_{0,t}$ і $a_{1,t}$ розраховуються як експоненціальні середні, а параметри згладжування α_0, α_1, α_2 обираються незалежно і набувають значень в інтервалі *[0;1]*.

Незважаючи на те, що для економічних часових рядів мультиплікативна модель зазвичай виявляється найбільш відповідною, іноді потрібна адитивна модель. Побудова такої моделі має на меті спрощення процедури прогнозування, оскільки комбінація мультиплікативної сезонної моделі з лінійним зростанням математично громіздка. Крім того, на практиці частіше зустрічаються експоненціальні тенденції, чим лінійні. Тому заміна значень первинного часового ряду їх логарифмами перетворить експоненціальну тенденцію в лінійну і одночасно мультиплікативну сезонну модель в адитивну. Тоді часовий ряд (початковий або перетворений) можна представити таким чином:

$$y_t = \xi_t + \varepsilon_t = (a_{1,t} + g_t) + \varepsilon_t, \quad a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t} , \qquad (21)$$

де $\hat{a}_{1,t}$ - величина рівня процесу після елімінування сезонних коливань;

$\hat{a}_{2,t}$ - адитивний коефіцієнт зростання;

$g_t ,..., g_{t-l+1}$ - адитивний коефіцієнт сезонності;

l - кількість фаз в повному сезонному циклі;

ε_t - білий шум.

Адаптивне прогнозування на основі рівняння (21) запропонували *Г.Тейл, С. Вейджем.* Припустимо, що t - теперішній момент часу, для розрахунку прогнозу $y_{t+\tau}$ (прогноз на τ кроків вперед) необхідно екстраполювати тенденцію лінійного зростання, використовуючи останнє значення коефіцієнта $\hat{a}_{2,t}$, додати найсвіжішу оцінку сезонного члена для цієї фази циклу та знехтувати шумом. В результаті отримуємо:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \cdot \hat{a}_{2,t} + \hat{g}_{t-1+\tau} , \qquad (22)$$

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 (y_t - \hat{g}_{t-1}) + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t}) , \qquad (23)$$

$$\hat{a}_{2,t} = \alpha_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2) \cdot \hat{a}_{2,t-1} , \qquad (24)$$

$$\hat{g}_t = \alpha_3 (y_t - \hat{a}_{1,t}) + (1-\alpha_3) \cdot \hat{g}_{t-1} , \qquad (25)$$

за умови, що $0 < \tau \le l$. Якщо $0 < \tau \le 2l$, то необхідно $\hat{g}_{t-1+\tau}$ замінити на $\hat{g}_{t-21+\tau}$.

Всі параметри згладжування задовольнятимуть умові $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$.

Завдання.

Зробити короткостроковий прогноз продажу нафтопродуктів на основі КС-моделей.

Для цього:

1) відповідно до варіанту індивідуального завдання (табл. 1) дослідити часовий ряд на наявність сезонних коливань в обсязі продажу нафтопродуктів та визначити тенденцію розвитку процесу (лінійна, експоненціальна тощо). Для цього побудувати графік динаміки продажу нафтопродуктів за весь період дослідження та по роках (на одному графіку). Провести візуальний аналіз існування зростаючих та спадаючих тенденцій продажу по сезонних періодах.

Якщо сезонна тенденція виявлена, то розрахувати індекси сезонності за такою послідовністю моделей:

- середнє значення динамічного ряду q_t;

- індивідуальні сезонні індекси $\hat{f}_t = \dfrac{y_t}{q_t}$;

- місячні сезонні індекси $\hat{f}_l = \dfrac{\sum f_{t+l}}{n}$, l - довжина сезонного циклу,

- n – кількість фаз сезонного циклу.

2) на основі отриманих результатів пояснити яку саме модель короткострокового прогнозування необхідно використати: Хольта; Уінтерса або Хольта-Уінтерса.

Для моделі Хольта:

$$\hat{a}_{0,0} = \frac{\sum_t y_t}{4}, t = 1..4, \qquad \hat{a}_{1,0} = \frac{\sum_t y_t - y_{t-1}}{5}, \; t = 1..5$$

Для моделі Уінтерса:

$$\hat{a}_{1,0} = \frac{\sum_t y_t}{4}, t = 1..4, \qquad \hat{a}_{2,0} = \frac{\sum_{t=1}^{12} y_t}{12} - \frac{\sum_{t=13}^{24} y_t}{12}, \qquad \hat{f}_{t,0} = f_{t-1}$$

3) зробити прогноз на 1 крок вперед на основі обґрунтованої у попередньому пункті моделі;

4) визначити систему коефіцієнтів адаптації, яка забезпечує найбільшу відповідність фактичним даним. Для цього заповнити таблицю:

Аналіз точності прогнозу

Значення ваг			Стандартне відхилення помилки
α_1			

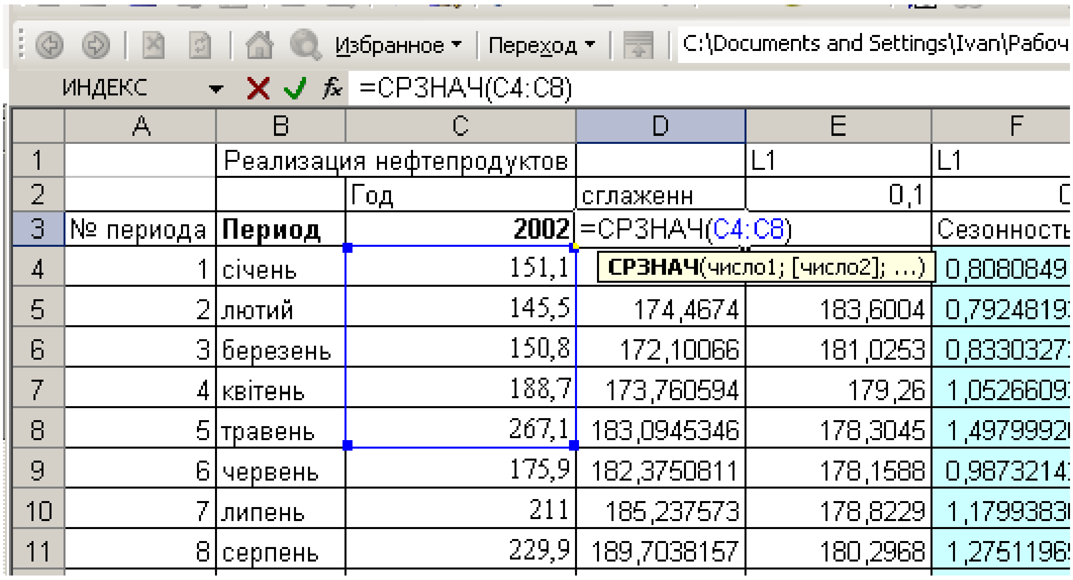
Побудувати графіки фактичних даних та прогнозів *при різних системах ваг.*

5) побудувати графік фактичних та прогнозних даних. Інтерпретувати отриманий кількісний результат.

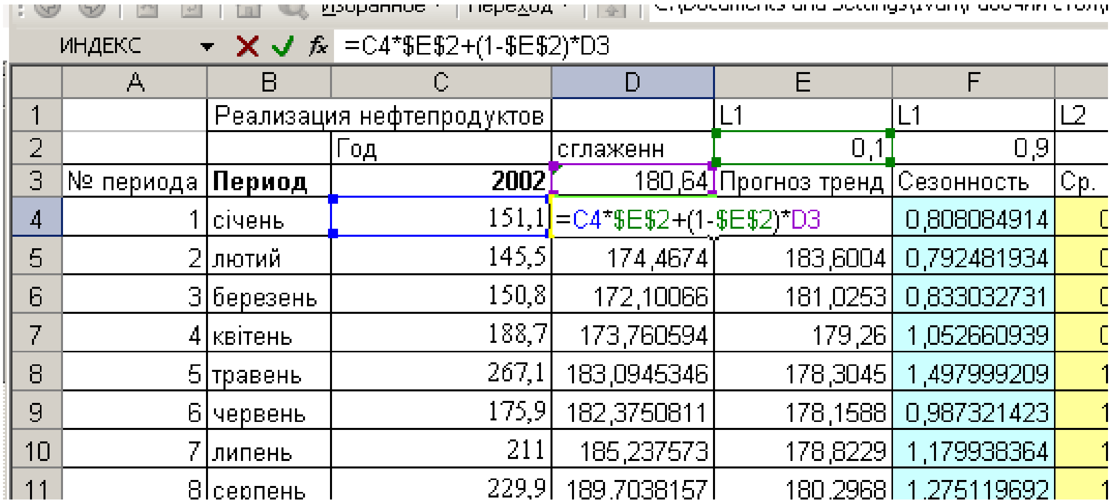
Хід роботи

Експоненціально згладжуємо елементи часового ряду за формулою $S_t = \lambda \cdot X_t + (1-\lambda) \cdot S_{t-1}$, де $1-\lambda = \beta$ і отримуємо модель Брауна . Де S_t - значення експоненційної середньої в момент часу t ; λ - параметр згладжування , приймає значення $0 < \lambda < 1$.

Перше значення моделі Брауна знаходимо як середнє значення декількох рівнів ряду .



	A	B	C	D	E	F
1		Реализация нефтепродуктов			L1	L1
2			Год	сглаженн	0,1	C
3	№ периода	**Период**	**2002**	=СРЗНАЧ(C4:C8)		Сезонность
4	1	січень	151,1	СРЗНАЧ(число1; [число2]; ...)		0,8080849
5	2	лютий	145,5	174,4674	183,6004	0,7924819
6	3	березень	150,8	172,10066	181,0253	0,8330327
7	4	квітень	188,7	173,760594	179,26	1,0526609
8	5	травень	267,1	183,0945346	178,3045	1,4979992
9	6	червень	175,9	182,3750811	178,1588	0,9873214
10	7	липень	211	185,237573	178,8229	1,1799383
11	8	серпень	229,9	189,7038157	180,2968	1,2751196

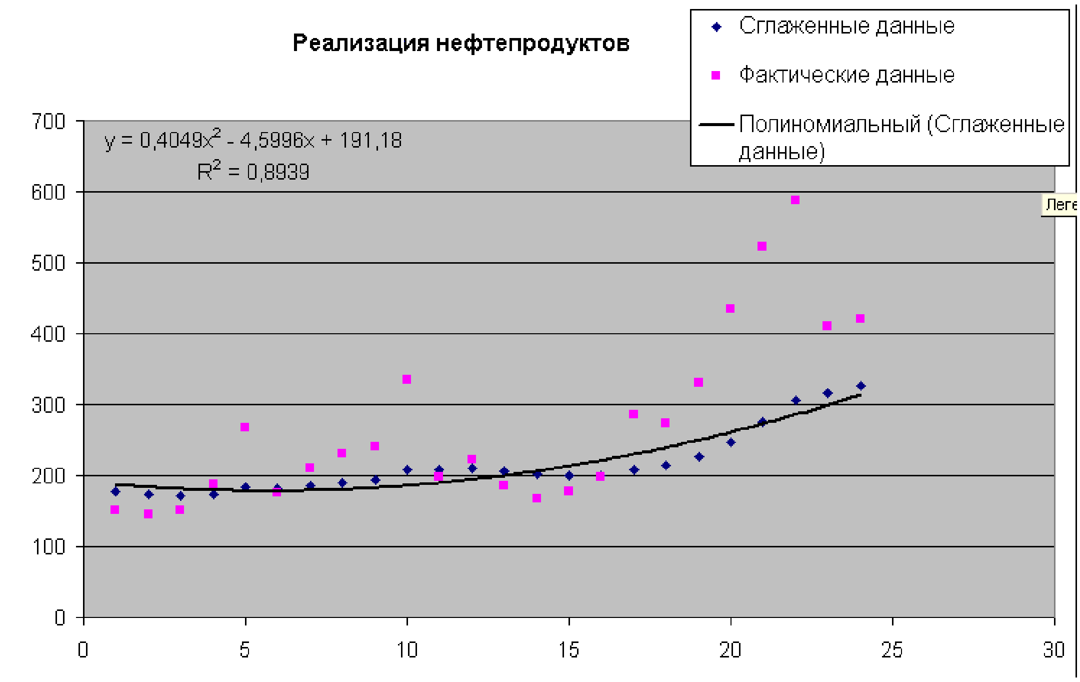


	A	B	C	D	E	F	G
1		Реализация нефтепродуктов			L1	L1	L2
2			Год	сглаженн	0,1	0,9	
3	№ периода	**Период**	**2002**	180,64	Прогноз тренд	Сезонность	Ср.
4	1	січень	151,1	=C4*E2+(1-E2)*D3		0,808084914	0
5	2	лютий	145,5	174,4674	183,6004	0,792481934	0
6	3	березень	150,8	172,10066	181,0253	0,833032731	0
7	4	квітень	188,7	173,760594	179,26	1,052660939	0
8	5	травень	267,1	183,0945346	178,3045	1,497999209	1
9	6	червень	175,9	182,3750811	178,1588	0,987321423	1
10	7	липень	211	185,237573	178,8229	1,179938364	1
11	8	серпень	229,9	189,7038157	180,2968	1,275119692	1

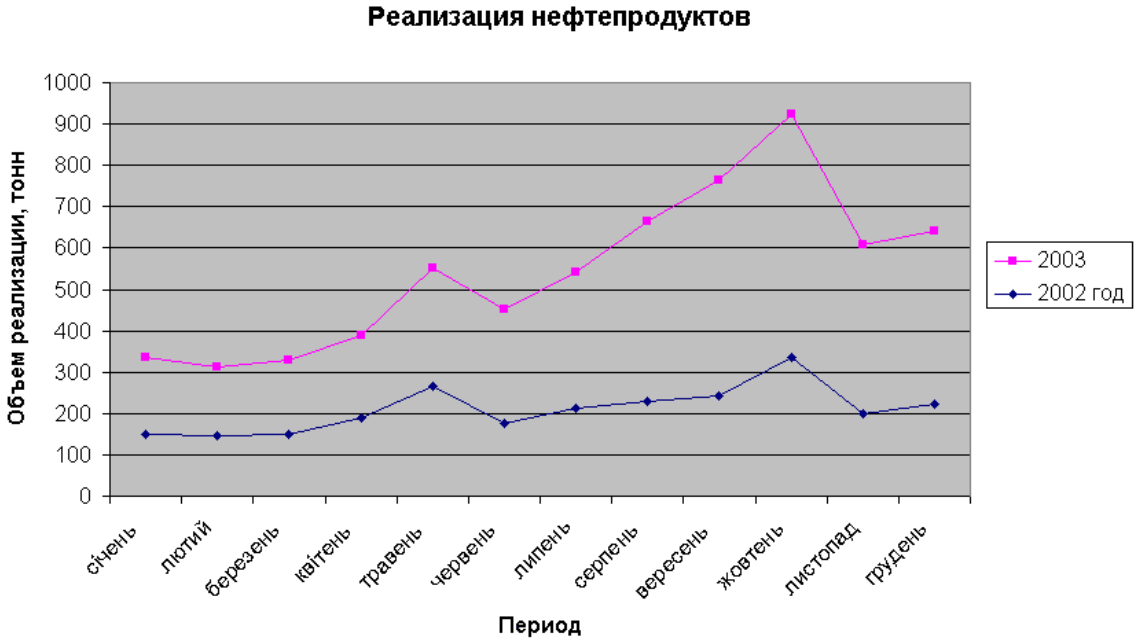
За згладженим даними будуємо тренд. Підбираємо такі параметри згладжування λ і β і тип лінії тренду, таким чином, щоб коефіцієнт апроксимації R^2 був найбільшим. Чим він більший, тим краще дані моделі описують фактичні дані.

Найбільший коефіцієнт апроксимації дорівнює 0,89 при $\lambda_1 = 0,1$ і $\beta_1 = 0,9$ і типі лінії тренда - поліном другого ступеня.

Використовуючи рівняння лінії тренду здійснюємо прогноз на кілька періодів вперед , копіюємо отримані значення в ряд фактичних даних.



Будуємо два графіка реалізації нафтопродуктів за 2002 і 2003 роки відповідно. Експертним шляхом визначаємо чи існує сезонність.



За графіком видно що сезонність існує , отже визначаємо коефіцієнт сезонності за формулою $f_c = \dfrac{X_t}{\hat{X}_t}$.

Визначаємо середні коефіцієнти сезонності для кожного періоду.

Визначаємо оцінку зваженої тимчасової суми тимчасового ряду очищене від сезонних коливань. Для цього визначаємо $a_{1,t-1}$ як середнє арифметичне рівня ряду очищених від сезонності.

Визначаємо сезонні компоненти для кожного періоду за формулою

$$\hat{f}_t = \lambda_2 \cdot (X_t / \hat{\alpha}_{1,t}) + \beta_2 \cdot \hat{f}_{t-1}$$

де $\hat{f}_{t-1}$ - найбільш пізня сезонної компоненти зроблена для аналогічної фази циклу як середнє значення декількох коефіцієнтів сезонності.

Підбираємо оптимальні вагові коефіцієнт:

$\lambda_1 = 0.9 \to \beta_1 = 0.1$

$\lambda_2 = 0.1 \to \beta_2 = 0.9$

Будуємо модель Уінтерса як добуток за формулою $\hat{X}_{t+\tau} = \hat{a}_{1,t} \cdot f_{t-l+\tau}$, ,

де $\hat{X}$ - прогнозне значення часового ряду на τ кроків вперед.

$\hat{a}_{1,t}$ - оцінка зваженої суми значень часового ряду , очищених від сезонних коливань.

Для моделі Хольта-Уінтерса необхідно розрахувати $a_{0,t}$.-коефіцієнт який оцінюється як експоненціальне середнє рівнів ряду з урахуванням попереднього зростання $\hat{a}_{1,t-1}$ і $a_{1,t}$ .. Де $a_{1,t}$ - коефіцієнт який оцінює зростання параметра за формулами (1) і (2) :

$$\hat{a}_{0,t} = \lambda_0 \cdot \hat{y}_t + \beta_0 \cdot \left[\hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1} \right] \tag{1}$$

$$\hat{a}_{1,t} = \lambda_1 \cdot \Delta \hat{a}_{0,t} + \beta_1 \cdot \hat{a}_{1,t-1} \qquad \beta_1 = 1 - \lambda_1 \tag{2}$$

Розраховуємо сезонні компоненти за формулою:

$$\hat{F}_t = \lambda_2 \cdot \hat{f}_t + \beta_2 \cdot \hat{f}_{t-1}$$

$$\hat{f}_t = \frac{y_t}{q_t}, або \quad \hat{f}_t = \frac{y_t}{\hat{a}_{0,t}}$$

Де f_t - коефіцієнт сезонності; q_t - середньостатистичне значення в момент t; λ_2 - параметр згладжування.

Розраховуємо модель Хольта -Уінтерса за формулою

$$\hat{y}_{t+j} = \left[\hat{a}_{0,t} + \hat{a}_{1,t} \cdot j \right] \cdot \hat{F}_{t+j-l}$$

$\hat{F}$ – це сезонний компонент, який розраховується за формулою експоненційної середньої.

Підбираємо оптимальні вагові коефіцієнти , причому $\lambda_0(0.1;0.3); \lambda_1(0.01;0.25)$.

Далі використовуємо метод Чоу для згладжених даних за формулою:

$$\begin{cases} \hat{y}_{t+1} = \lambda^* \hat{y}_t + \beta^* \cdot \hat{y}_{t-1} \end{cases}$$

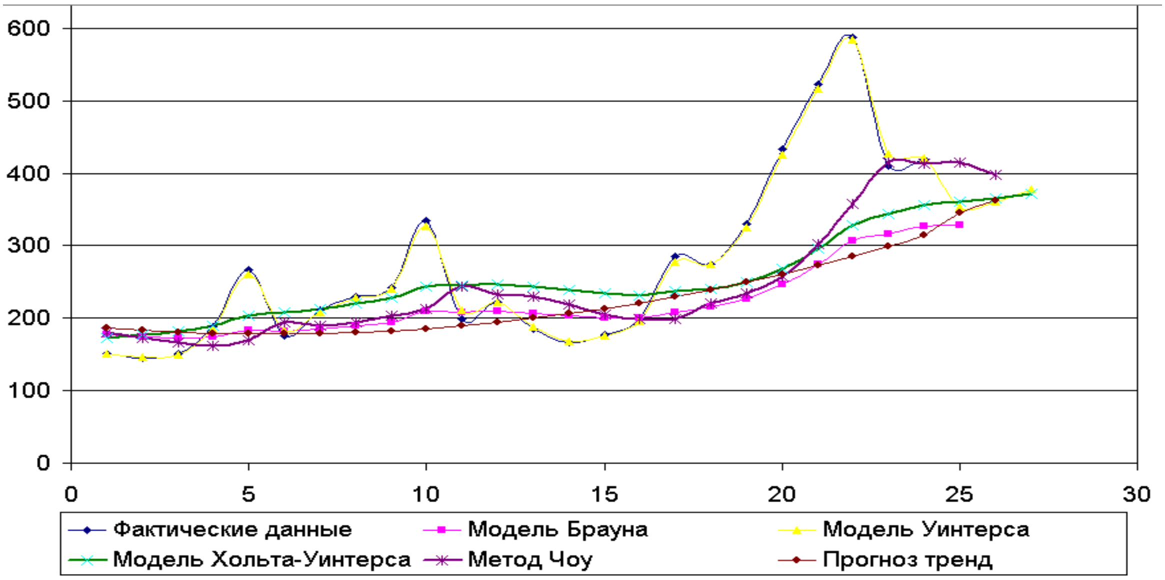
$$\beta^* = 1 - \lambda^*, \qquad \lambda^* = \lambda + i \cdot h, \quad i \in [-1; 0; 1]$$

При $h = 0,05$.

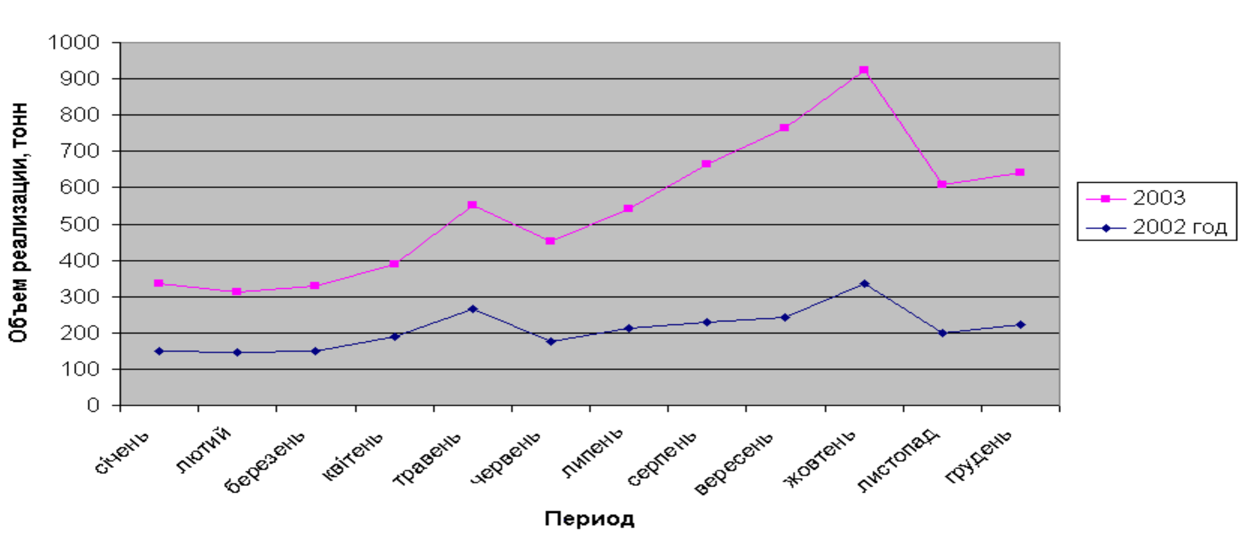
K7 | f_x =N1*C7+(1-N1)*(K6+L6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		Реализация нефтепродуктов			L1	L1	L2				L1=	0,13	L0=	0,1	L2=	0,1	Метод Чоу				
2			Год	сглажен	0,1	0,9	0,1	A1,I	FI		A0,I	A1,I					YIL2	YIL1	YIL3	L1	0,2
3	№ периода	Период	2002	180,64	Прогноз трен	Сезонность	Ср. сезонност	181,2351	0,8585895	XI Уинтерса	177,686	12,533333	F	Прогноз Х-У.			180,64	180,64	180,64	L2	0,25
4	1	січень	151,1	177,686	186,5853	0,8080849	0,867144763	174,7477	0,8581581	151,715606	186,3074	12,024782	0,8585504	172,26149			173,295	174,732	171,778	L3	0,3
5	2	лютий	145,5	174,4574	183,6004	0,7924819	0,7956895054	168,2364	0,8678537	146,006294	193,04896	11,337964	0,8581647	177,44151			166,31625	168,2896	163,295	h=	0,05
6	3	березень	150,8	172,10066	181,0253	0,8330327	0,831950462	173,077	0,8582062	150,266458	199,02873	10,641334	0,867898	181,97179			162,43719	165,26848	159,966		
7	4	квітень	188,7	173,76099	179,26	1,0526609	0,975763847	212,8316	0,8700473	185,173533	207,57261	10,368729	0,8583603	189,25815			169,00239	169,95478	168,586		
8	5	травень	267,1	183,09453	178,3045	1,4979982	1,370478725	298,0422	0,8726807	260,089712	222,85721	11,007792	0,8703086	203,53472			193,52717	189,38383	198,14		
9	6	червень	175,9	182,37508	178,1588	0,9873214	1,096296846	212,0952	0,8583408	184,14489	228,0685	10,254247	0,8722287	207,87194			189,12038	186,68706	191,468		
10	7	липень	211	185,23757	178,8229	1,1795384	1,249427928	239,8368	0,8594832	208,534102	235,59047	9,8980511	0,8584551	213,19662			194,59028	191,54965	197,328		
11	8	серпень	229,9	189,70382	180,2968	1,2751197	1,468404807	262,1975	0,8702169	228,169968	243,93057	9,6963873	0,8589996	220,54299			203,41771	199,21972	207,099		
12	9	вересень	241,6	194,289343	182,5805	1,3232519	1,618944914	276,5996	0,8705953	240,757832	252,42426	9,5400369	0,8702507	227,97462			212,96328	207,69678	217,45		
13	10	жовтень	335,2	208,92409	185,674	1,8053147	1,922774948	374,9774	0,8722918	327,314969	269,28787	10,492101	0,8707829	243,62929			243,52246	233,19962	252,775		
14	11	листопад	198,3	207,85168	189,5773	1,0460113	1,209643119	242,9688	0,867218	210,706911	271,63197	9,4328614	0,8723244	245,17972			232,21685	226,2173	236,432		
15	12	грудень	222,7	209,34551	194,2904	1,1452224	1,241982113	295,0503	0,8678123	221,335792	275,22835	8,6741186	0,8672775	246,22221			229,83764	225,51384	232,313		
16	13	січень	185,068	206,91776	199,8133	0,9262046	0,867144763	217,2696	0,8662117	188,197971	274,01902	7,3882705	0,8676523	244,16454			218,64523	217,42467	218,139		
17	14	лютий	166,425	202,85849	206,146	0,8073162	0,7956895054	194,1689	0,8653015	168,015523	269,90696	5,2944877	0,8661206	238,87993			205,59017	207,22474	202,625		
18	15	березень	177,044	200,22604	213,2885	0,8300682	0,831950462	202,2634	0,8660439	175,688577	265,92841	4,6106018	0,8653757	234,11789			198,45363	201,18289	194,951		
19	16	квітень	198,866	200,14403	221,2408	0,8988968	0,975763847	226,3439	0,8672996	196,307937	263,37171	3,6788527	0,8661696	231,31104			198,99672	200,72407	196,125		
20	17	травень	285,884	208,71803	230,0029	1,2429682	1,370478725	318,2967	0,8702287	277,478295	268,9039	3,9236874	0,8675925	236,72921			220,38854	217,79906	223,053		
21	18	червень	274,364	215,28263	239,5748	1,1452123	1,096296846	316,1714	0,8699829	275,063629	273,00823	3,9432707	0,8702042	241,00435			233,88241	229,07765	238,446		
22	19	липень	329,672	226,72156	249,5665	1,3189175	1,249427928	373,2109	0,8713185	325,189608	282,27355	4,6285372	0,8701164	249,5948			257,8298	249,19652	265,814		
23	20	серпень	433,947	247,44411	261,148	1,6616899	1,468404807	486,9608	0,8733	425,262835	301,56167	6,5408897	0,8715167	268,5165			301,8981	286,14661	316,254		
24	21	вересень	522,982	274,9979	273,1493	1,9146379	1,618944914	590,9905	0,8745224	516,484604	329,59049	9,3343027	0,8734223	296,02445			357,13983	333,51369	378,272		
25	22	жовтень	586,858	306,18391	285,9604	2,0522362	1,922774948	667,1394	0,8750365	583,771295	363,71811	12,957434	0,8745738	329,08074			414,56937	384,18295	440,848		
26	23	листопад	409,61	316,52952	299,5813	1,3672749	1,209643119	491,1365	0,8709333	427,747131	379,60899	12,990782	0,8746262	343,37804			413,32953	389,26804	431,477		
27	24	грудень	420,067	326,88057	314,012	1,3377419	1,241982113	484,3714	0,8709641	421,676336	395,3465	13,347896	0,8708964	356,93043			415,0139	395,42783	428,054		
28	26		345,3028	328,72279	345,3028		0,867144763	406,227	0,8585101	352,812296	402,3952	12,523766	0,8703587	361,08352			397,58612	385,40783	403,228		
29	27		362,1629		362,1629		0,7956895054	415,8824	0,8687421	361,294526	409,60736	11,838457	0,8685333	366,03974			388,73032	380,75484	390,909		
30	28		379,8328		379,8328		0,831950462	435,1968	0,8691543	378,218441	417,28451	11,297488	0,8687834	372,34491			386,50694	380,57043	387,596		
31	29		398,3125		398,3125		0,975763847	456,2322	0,8685437	396,71383	425,99505	10,903685	0,8691933	379,36726			389,45758	384,11825	390,204		

Будуємо графіки кожної моделі. Оскільки метод Чоу і модель Брауна не враховують сезонність, а сезонність реалізації нафтопродуктів яскраво виражена, то ми можемо виключити з аналізу ці моделі. З двох, що залишилися моделей , моделі Уінтерса і Хольта –Уінтерса експертним шляхом за даними графіка вибираємо модель Уінтерса , тому що вона краще описує сезонність.



Реализация нефтепродуктов



Таблиця 1

Обсяг продажу нафтопродуктів, тис. грн.

Варіант	Період																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	947,1 +*N/10*	95	208,5	459,1	514,4	70,2	492,2	386,8	248,3	73,2	38,9	17,1	908,4	570,4	393,1	605,8	488,8	201,9	366,6	393,5	294,3	59,7	93	314,4
2	330,3	35,3 +*N/10*	16,7	203,3	404,1	0	12,2	41,4	155	0	5,6	13,2	930,1	627,9	116,1	322	451,9	401,1	17,5	113,4	329,1	12,4	2,2	5,9
3	431,6	13,9	41,4 +*N/10*	136,2	200,7	3,9	138,7	119	92	15,5	16,1	16	1151,3	258,2	66,7	214,2	435,1	29,3	324,6	252,2	120,7	52	88,2	111,5
4	360,9	16,5	12,4	108,7 +*N/10*	262,2	11,2	56,6	52,5	196,9	20,1	6,3	5,5	596,4	108,1	109,4	140,7	212,9	47,4	36,9	47,8	419,3	115	23,4	38,1
5	1484,2	98	74	407,1	725,6 +*N/10*	43,1	251,6	393,2	274,7	54,9	85,3	26,6	2071,9	1278,2	287,9	416,8	832,3	127,2	184,4	246,5	413,8	34,8	128	110,4
6	1549,4	186,9	115	408,9	1921,3	16,8 +*N/10*	320,4	284,5	180,2	60,8	240,8	253,7	2110,9	1764,7	712,8	591,5	3092,8	449,8	372,8	460,6	458,1	211,7	200	297,1
7	1096,9	85,6	115,1	234,5	411,6	22,3	154,6 +*N/10*	141,9	91,1	32,5	39,5	22,3	1261,9	573,2	196,9	383	547,5	91,9	159,6	148,8	170,3	95,5	44,1	39,6
8	656,6	44,9	9	121,8	359,3	10	108,9	120,4 +*N/10*	81,2	3,9	3,6	27,9	1014,5	173	393,9	147,1	510,5	137,3	61,7	138,1	115,4	25,5	16,1	21,9
9	506,9	148,7	183	271,4	498,3	23,2	319,9	250,2	186,2 +*N/10*	28,2	18,6	5,1	616,7	443,2	150,8	420,2	557,5	76,2	515,6	296,9	257,1	90,3	41,6	40,7
10	458,7	641,2	219,7	193,9	22,3	114,6	92	200	239,9	129,9 +*N/10*	125,1	219,8	318,2	562,5	126,8	105,5	21,6	52,9	58,2	120,9	176,1	13,1	52,2	128,3
11	440,3	34,1	61,9	74,4	146,8	23,5	126,3	113,1	152,6	26,8	33,7 +*N/10*	19,8	499,3	276,3	75,4	136,6	259,7	43,2	256,6	233,9	344,6	69,4	67,3	58,9
12	333,1	166,8	4	133,3	325,2	31,1	233,8	171,3	72,8	7,4	30,7	16,1 +*N/10*	546,8	312,4	82,9	259,2	439,3	62,1	327,3	236,1	132,1	15,7	105,8	55,5
13	479	33,7	21,5	47	191,2	19,7	291,9	284,6	163,9	36,2	37,3	35,6 +*N/10*	719,3	238,3	104,6	136,9	374,7	118,2	452	482,4	257,5	107,7	80,8	67,9
14	1073,8	41,5	89,3	153	395	34,5	328,1	376,6	240,2	40,3	53	20,7	2084,1 +*N/10*	392,5	361,9	449	679,7	179,1	552,9	591,6	296,5	90,4	142,1	171
15	733,5	14,4	5,1	160,9	729,1	10,9	135,8	175	179,1	76,4	55,5	19,7	1151,9	254 +*N/10*	266,8	281,4	856,6	167,5	302,2	250,4	244,8	151,8	102,7	99,2
16	406,2	103,4	99,8	187,4	317,1	34,8	309,3	194,1	146,3	9,3	22,1	19,1	618,8	284,3	247,8 +*N/10*	258	877,3	77,3	432,8	345,9	283,6	56,1	76,5	78,7
17	263,6	53,6	11,1	127	289,2	16	56,6	51	51,6	17,7	8,3	6,1	306,5	157	121,5	311,6 +*N/10*	420,5	68,9	94	114	140,2	34,3	14,5	16,7
18	345,3	76,2	24,3	168	348,7	23	64,1	48	62,1	13,6	9,1	4,3	403,2	178	135,9	328,7 +*N/10*	682,4	76,4	84	167	192,6	56,4	23,4	18,9
19	534,9	264,1	216	361,4	628,3	33,2	31,9	60,2	186,2	23,2	8,6	5,9	816,7	263,2	340,8	327,2	531,5 +*N/10*	84,2	52,6	348,9	345,1	67,3	38,6	52,7
20	348,7	481,2	243,7	167,9	37,3	156,6	85	246	354,9	289,9	159,1	261,8	372,2	648,5	249,8	164,5	34,6	*68,9 +N/10*	78,2	241,9	281,1	16,6	67,2	142,3

N – номер студента за списком в журналі академічної групи.