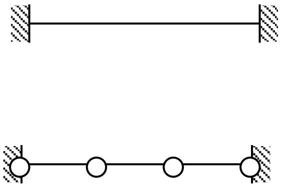
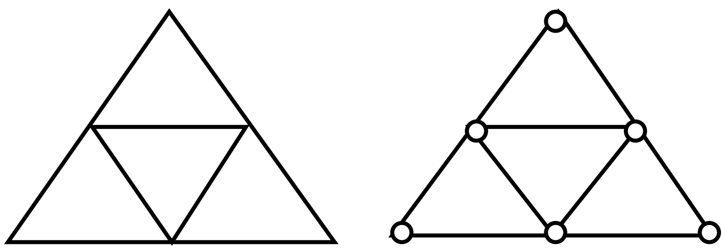
ОСНОВНІ ТИПИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

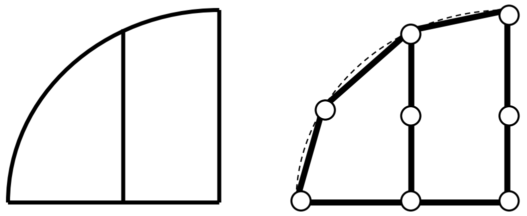
Метод скінченних елементів (МСЕ) є універсальним варіаційним методом, орієнтованим на рішення найбільш складних задач механіки деформованого твердого тіла і механіки руйнування. *Суть даного методу* в наступному: безперервний об’єм реальної конструкції розбивається на підобласті з об'ємних (у загальному випадку) елементів малих, але кінцевих розмірів - скінченні елементи (СЕ), у межах яких шукана функція може бути апроксимована. У підсумку будь-яка величина, що неперервно змінюється по об’єму тіла, також може бути приблизно апроксимована дискретною моделлю, що представляє собою безліч кусочно-безперервних функцій, кожна з яких визначена в межах підобласті.

При побудові скінченно-елементної моделі реальної конструкції розбивка на скінченні елементи не є однозначною процедурою і залежить від ряду факторів, таких як геометричні розміри конструкції, її конфігурація, розмірність задачі (одномірна, двовимірна, просторова), однорідність матеріалу конструкції і деяких інших. При виборі виду і кількості СЕ варто прагнути не тільки до найкращої апроксимації функцій усередині елемента, але і до найбільш природного опису границь області і граничних умов.

При рішенні одномірних задач (розрахунок балок, ферм і ін.) доцільно використовувати стрижневі елементи. У результаті скінченно-елементної дискретизації реальні конструкції представляються у виді окремих стрижневих елементів, зчленованих між собою в так званих вузлових точках, або вузлах. Найбільше широко використовуваним одномірним СЕ є СЕ у виді прямокутного стрижня.

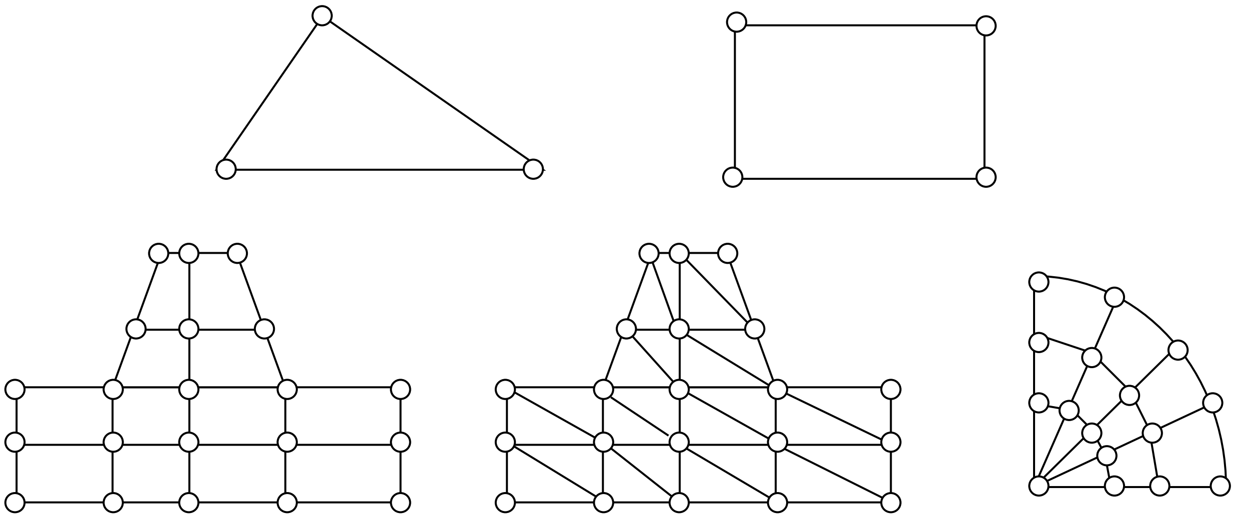




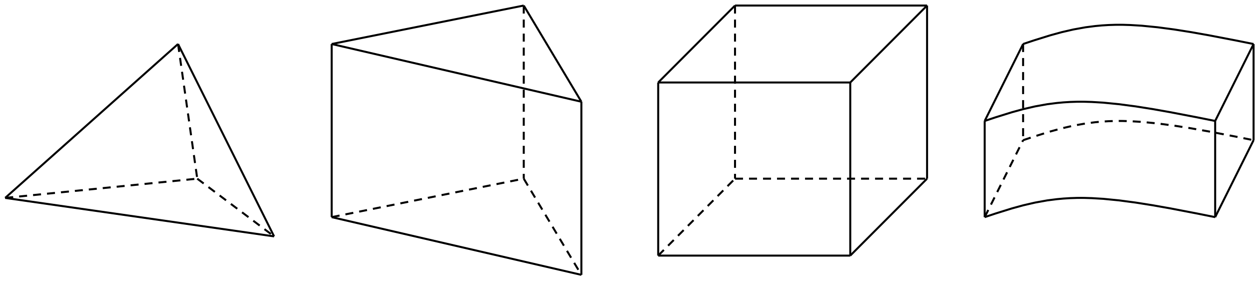


Якщо вихідна конструкція включає криволінійні ділянки, то кожну така ділянка необхідно замінити одним криволінійним стрижнем або сукупністю прямолінійних стрижневих елементів шляхом постановки проміжних вузлів. Чим точніше пропонована дискретна модель апроксимує реальну конструкцію, тим точніше одержуваний у ході рішення результат.

При рішенні двовимірних задач найбільш широке поширення одержали скінченні елементи у виді плоских трикутників і чотирикутників.



Найбільш загальним випадком задачі механіки деформованого твердого тіла є просторова (тривимірна) задача. При розбивці тривимірних об'єктів на СЕ використовують тетраедри, трикутні або чотирикутні призми.



Для опису тіл із криволінійними границями можуть використовуватися криволінійні СЕ. Однак їхнє застосування обмежене необхідністю аналітичного опису форми скінченного елемента і значним ускладненням виводу матриці жорсткості. Різноманіття існуючих криволінійних границь приводить до необхідності виводу матриці жорсткості криволінійного СЕ для кожного конкретного випадку, що доцільно тільки при дуже відповідальних розрахунках.

Крім представлених вище СЕ, застосовують також спеціальні скінченні елементи, що служать для опису особливостей напружено-деформованого стану матеріалу конструкції (біля вершини тріщини, розрізу і т.д.). Такі основні види СЕ.

МСЕ може базуватися на трьох підходах: *на методі переміщень* (задаються функції, що апроксимують переміщення усередині СЕ*); на методі сил* (задаються функції, що апроксимують напруження усередині СЕ); *на змішаному методі* (задаються функції, що апроксимують на одній частині СЕ переміщення, а на іншій - напруження). На практиці найбільш широке поширення одержав МСЕ в сполученні з методом переміщень, що дозволяє зменшити труднощі, зв'язані з задоволенням граничних і контактних умов. Крім цього для даного підходу у якості функцій, що апроксимують переміщення по об’єму, найбільш прийнятними є ті функції, у яких як невідомі коефіцієнти записуються переміщення вузлових точок елемента. Що дозволяє задовольнити умові спільності деформацій.

На практиці у якості апроксимуючих функцій в межах СЕ частіше застосовують інтерполяційні поліноми різного ступеня, називані в МСЕ *функціями форми*.

Інтерполяційні поліноми:

для одномірного випадку

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i,$$

для двомірного випадку

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^i y^j,\ (i+j\le k)$$

для тривимірного випадку

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^i y^j z^m.$$

Кількість доданків, що входять в апроксимуючий поліном, залежить від виду обраного скінченного елемента і, як правило, приймається рівним кількості вузлів скінченного елемента. Якщо за умовою задачі для апроксимації необов'язково використовувати повний поліном, то число членів розкладання повинне бути таке, щоб використовуваний поліном був симетричним щодо порядку апроксимації. Це властивість полінома називають *властивістю геометричної ізотропії.*

Визначити число членів у багаточлені довільного ступеня можна за допомогою трикутника Паскаля.

	Ступінь
1	0
$x \quad y$	1
$x^2 \quad xy \quad y^2$	2
$x^3 \quad x^2y \quad y^2 \quad y^3$	3
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	4
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	5
$x^6 \quad x^5y \quad x^4y^2 \quad x^3y^3 \quad x^2y^4 \quad xy^5 \quad y^6$	6
$x^7 \quad x^6y \quad x^5y^2 \quad x^4y^3 \quad x^3y^4 \quad x^2y^5 \quad xy^6 \quad y^7$	7

——— - повний поліном 3-ого ступеня;

– – – – – - члени, що утворюють кубічний елемент Лагранжева сімейства;

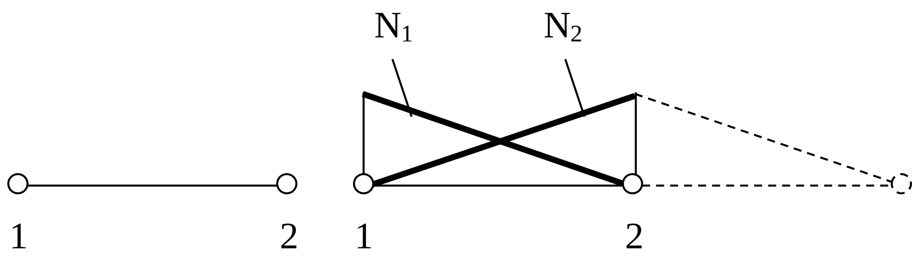
·········· - члени, що утворюють кубічний елемент Серендипова сімейства.

Вид функції форми підбирається для кожного вузла, що належить СЕ, окремо. Функція форми повинна задовольняти наступній умові: вона повинна дорівнювати 1 у вузлі, для якого підібрана, і дорівнювати 0 у всіх інших вузлах.

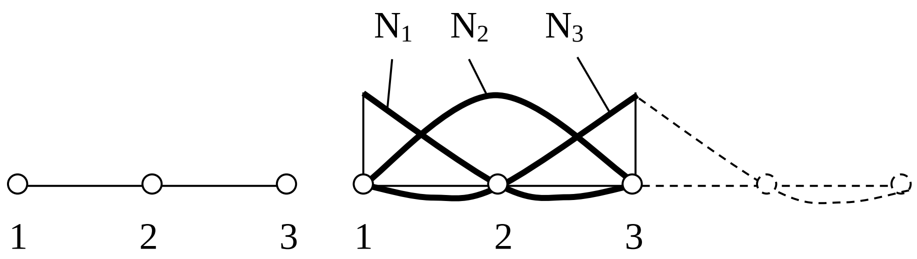
Розглянемо основні типи СЕ і їхні функції форми.

1) Одномірні СЕ

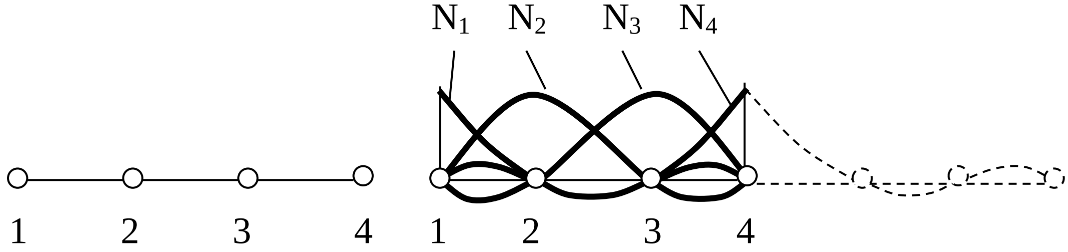
а) з лінійною апроксимацією



б) із квадратичною апроксимацією

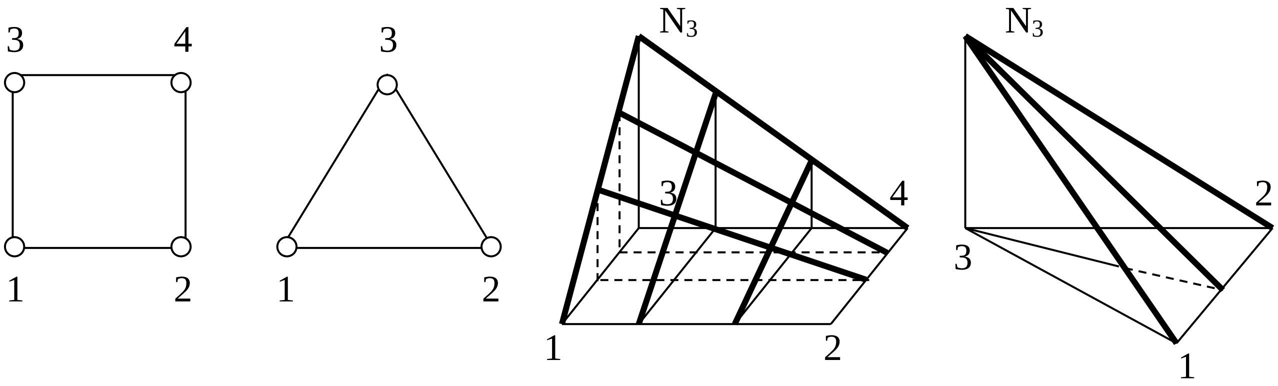


в) з кубічною апроксимацією

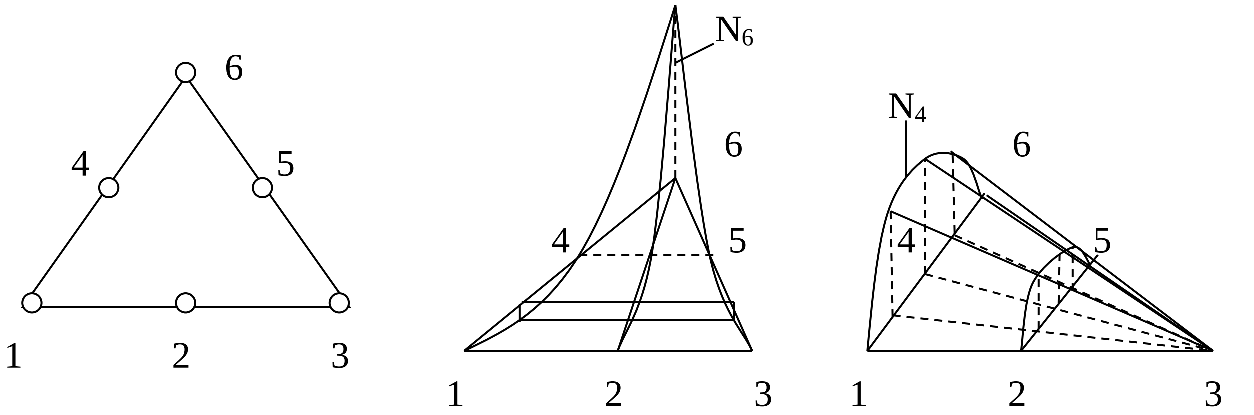


2) Двомірні

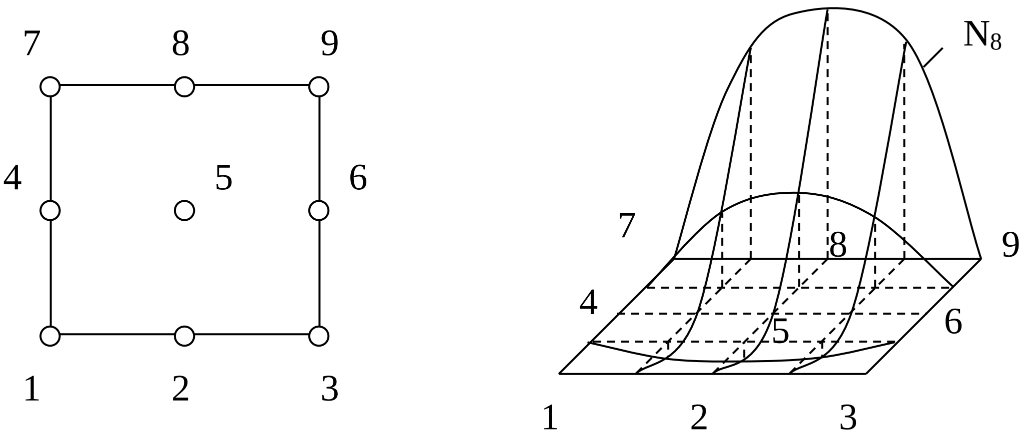
а) з лінійною апроксимацією



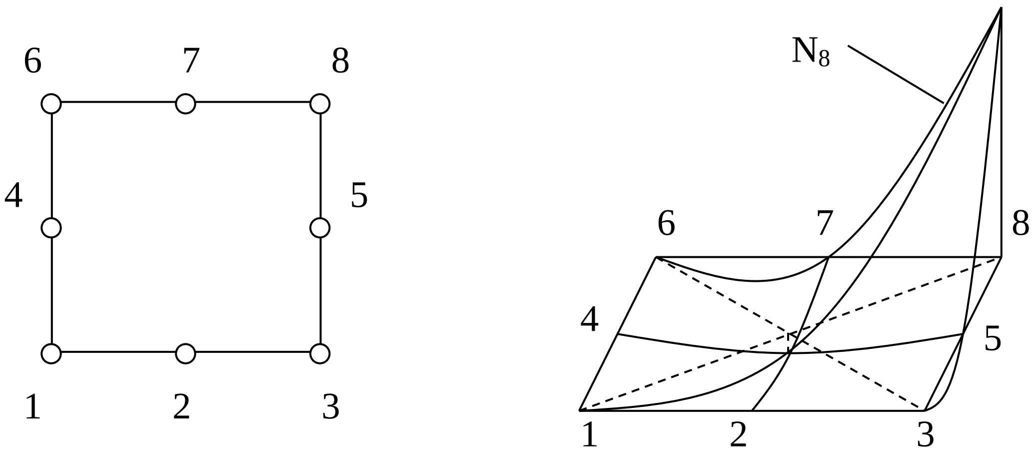
б) із квадратичною апроксимацією



Прямокутний скінченний елемент Лагранжева сімейства

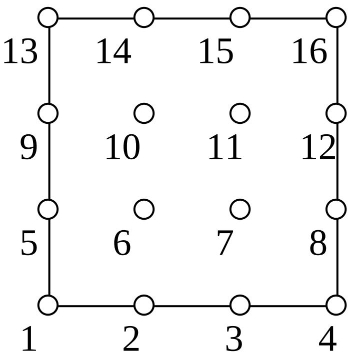


Скінченний елемент Серендипова сімейства

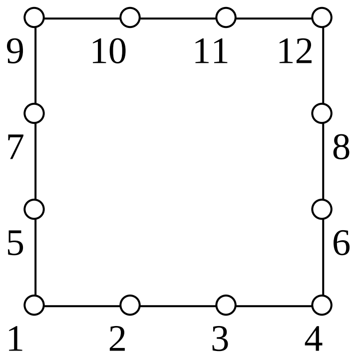


в) з кубічною апроксимацією

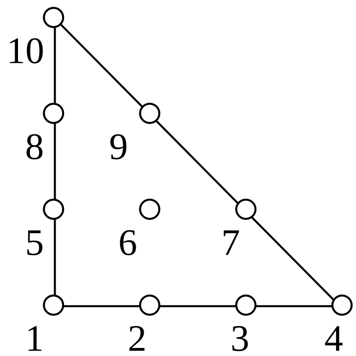
Лагранжев СЕ



Серендипов СЕ

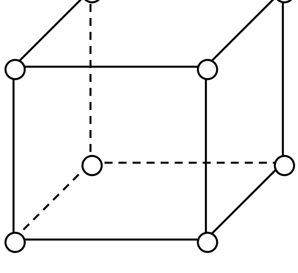


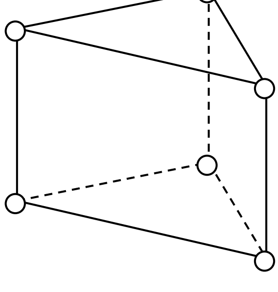
СЕ у виді трикутної призми

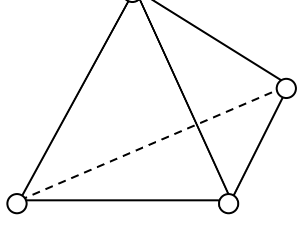


3) Просторові СЕ

а) з лінійною апроксимацією

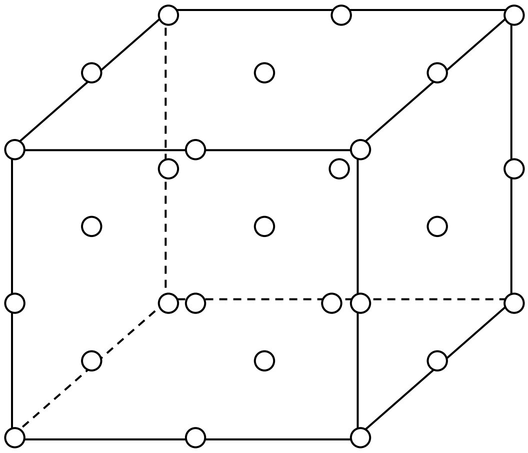




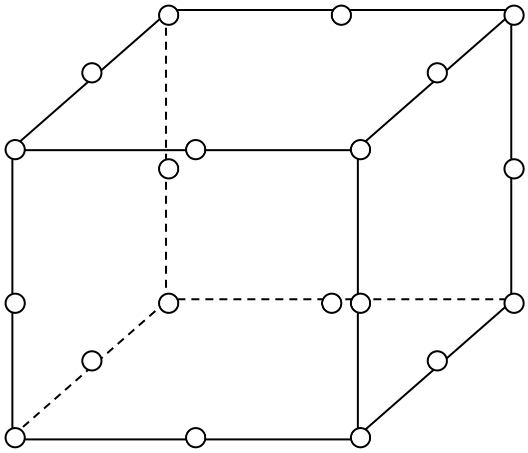


б) із квадратичною апроксимацією

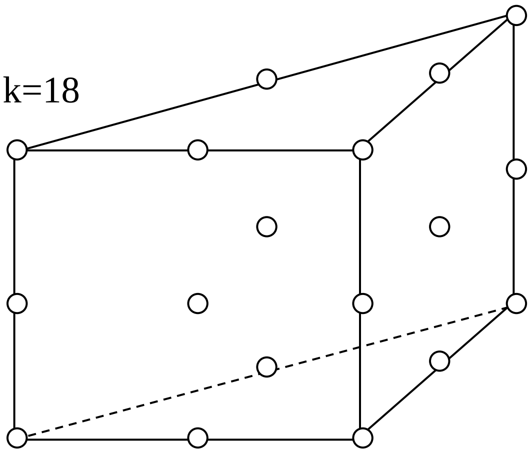
Лагранжев СЕ (k=27)



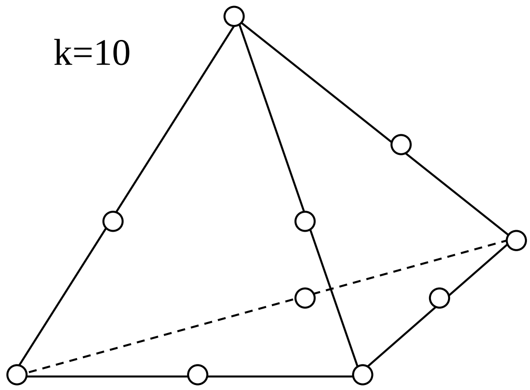
Серендипов СЕ (k=20)



k=18

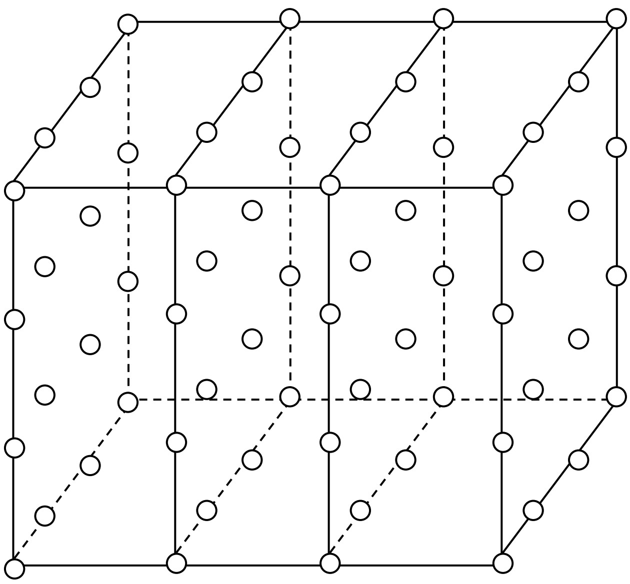


k=10



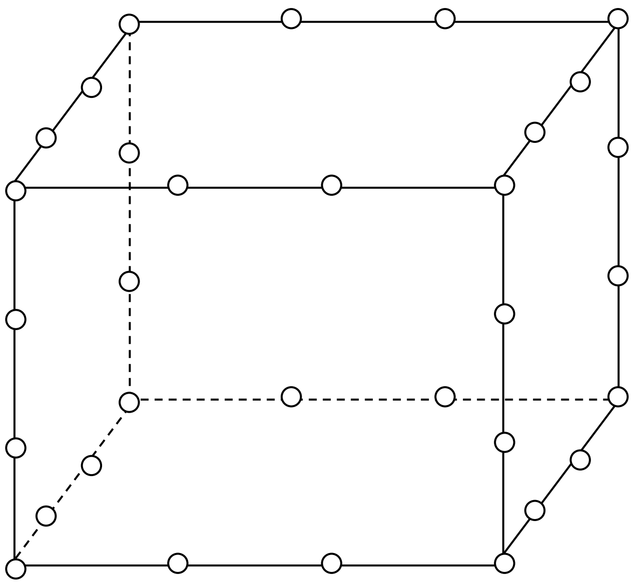
в) з кубічною апроксимацією

Лагранжев СЕ

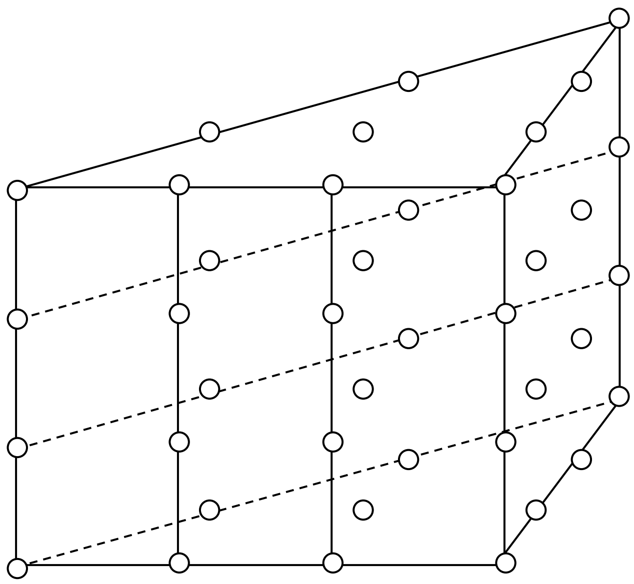


k=64

Серендипов СЕ



k=32



МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ ТА ЇЇ ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Функції форми для плоского трикутного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень

Розглянемо трикутний скінченний елемент (рис. 1). Кожному вузлові поставимо у відповідність координати $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ ($i = 1,\ \ 2{,}3$ – номера вузлів). Кожен вузол стрижня має два ступеня свободи, обумовлені переміщеннями $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$ по напрямку координатних осей x_1 і x_2 відповідно. Повне число ступенів свободи даного трикутного скінченного елемента дорівнює шести.

Вектор переміщень вузлів СЕ представимо у виді:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}. \qquad (1)$$

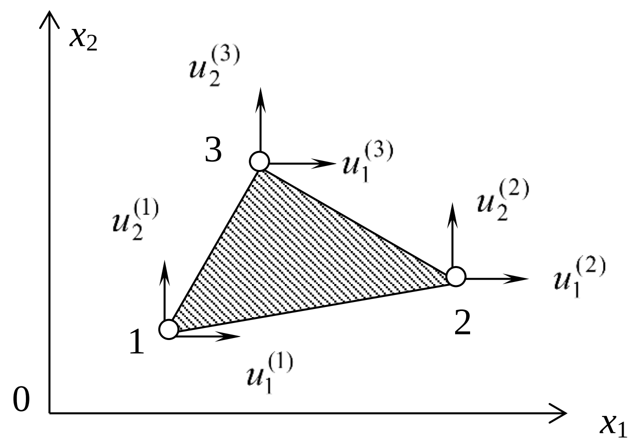


Рис.1.

Припустимо, що функція переміщень $u_1(x_1, x_2)$ і $u_2(x_1, x_2)$ в межах СЕ підкоряється лінійному законові:

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2, \qquad (2)$$

$$u_2(x_1, x_2) = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2. \qquad (3)$$

Шість постійних α_i можуть бути знайдені через вузлові переміщення $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ і координати вузлів $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ з незалежного розв'язання двох систем рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(1)} + \alpha_3 x_2^{(1)} = u_1^{(1)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(2)} + \alpha_3 x_2^{(2)} = u_1^{(2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_1^{(3)} + \alpha_3 x_2^{(3)} = u_1^{(3)}; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha_4 + \alpha_5 x_1^{(1)} + \alpha_6 x_2^{(1)} = u_2^{(1)}, \\ \alpha_4 + \alpha_5 x_1^{(2)} + \alpha_6 x_2^{(2)} = u_2^{(2)}, \\ \alpha_4 + \alpha_5 x_1^{(3)} + \alpha_6 x_2^{(3)} = u_2^{(3)}. \end{cases} \qquad (5)$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = x_1^{(2)} x_2^{(3)} + x_1^{(1)} x_2^{(2)} + x_1^{(3)} x_2^{(1)} -$$

$$-\left(x_1^{(2)} x_2^{(1)} + x_1^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)}\right) =$$

$$= \left(x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)}\right) + \left(x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)}\right) + \left(x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)}\right);$$

– подвоєна площа трикутника.

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = u_1^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(3)} + u_1^{(2)} x_1^{(1)} x_2^{(2)} + u_1^{(3)} x_1^{(3)} x_2^{(1)} -$$

$$-\left(u_1^{(3)} x_1^{(2)} x_2^{(1)} + u_1^{(1)} x_1^{(3)} x_2^{(2)} + u_1^{(2)} x_1^{(1)} x_2^{(3)}\right) = u_1^{(1)} \left(x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)}\right) +$$

$$+ u_1^{(2)} \left(x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)}\right) + u_1^{(3)} \left(x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)}\right);$$

$$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 1 & u_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & u_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & u_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = u_1^{(2)} x_2^{(3)} + u_1^{(1)} x_2^{(2)} + u_1^{(3)} x_2^{(1)} -$$

$$-\left(u_1^{(2)} x_2^{(1)} + u_1^{(3)} x_2^{(2)} + u_1^{(1)} x_2^{(3)}\right) =$$

$$= u_1^{(1)} \left(x_2^{(2)} - x_2^{(3)}\right) + u_1^{(2)} \left(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}\right) + u_1^{(3)} \left(x_2^{(1)} - x_2^{(2)}\right);$$

$$\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & u_1^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & u_1^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & u_1^{(3)} \end{vmatrix} = u_1^{(3)} x_1^{(2)} + u_1^{(2)} x_1^{(1)} + u_1^{(1)} x_1^{(3)} -$$

$$-\left(u_1^{(1)}x_1^{(2)}+u_1^{(2)}x_2^{(3)}+u_1^{(3)}x_1^{(1)}\right)=$$
$$=u_1^{(1)}\left(x_1^{(3)}-x_1^{(2)}\right)+u_1^{(2)}\left(x_1^{(1)}-x_1^{(3)}\right)+u_1^{(3)}\left(x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right).$$

Уведемо позначення:

$$a_1=x_1^{(2)}x_2^{(3)}-x_1^{(3)}x_2^{(2)};\ a_2=x_1^{(3)}x_2^{(1)}-x_1^{(1)}x_2^{(3)};\ a_3=x_1^{(1)}x_2^{(2)}-x_1^{(2)}x_2^{(1)};$$
$$b_1=x_2^{(2)}-x_2^{(3)};\ b_2=x_2^{(3)}-x_2^{(1)};\ b_3=x_2^{(1)}-x_2^{(2)};$$
$$c_1=x_1^{(3)}-x_1^{(2)};\ c_2=x_1^{(1)}-x_1^{(3)};\ c_3=x_1^{(2)}-x_1^{(1)}.$$

Тоді

$$\alpha_1=\frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}=\frac{u_1^{(1)}a_1+u_1^{(2)}a_2+u_1^{(3)}a_3}{a_1+a_2+a_3};$$
$$\alpha_2=\frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}=\frac{u_1^{(1)}b_1+u_1^{(2)}b_2+u_1^{(3)}b_3}{a_1+a_2+a_3}; \qquad (6)$$
$$\alpha_3=\frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta}=\frac{u_1^{(1)}c_1+u_1^{(2)}c_2+u_1^{(3)}c_3}{a_1+a_2+a_3}.$$

Підставимо співвідношення для α_i у вираз для переміщень (2) і (3), і перетворимо його до виду:

$$u_1(x_1,x_2)=\frac{u_1^{(1)}a_1+u_1^{(2)}a_2+u_1^{(3)}a_3}{a_1+a_2+a_3}+\frac{u_1^{(1)}b_1+u_1^{(2)}b_2+u_1^{(3)}b_3}{a_1+a_2+a_3}x_1+$$
$$+\frac{u_1^{(1)}c_1+u_1^{(2)}c_2+u_1^{(3)}c_3}{a_1+a_2+a_3}x_2=u_1^{(1)}\frac{a_1+b_1x_1+c_1x_2}{a_1+a_2+a_3}+$$
$$+u_1^{(2)}\frac{a_2+b_2x_1+c_2x_2}{a_1+a_2+a_3}+u_1^{(3)}\frac{a_3+b_3x_1+c_3x_2}{a_1+a_2+a_3}=$$
$$=u_1^{(1)}N_1+u_1^{(2)}N_2+u_1^{(3)}N_3, \qquad (7)$$

де функції форми плоского трикутного скінченного елемента з лінійною апроксимацією переміщень мають вид:

$$N_1=\frac{a_1+b_1x_1+c_1x_2}{a_1+a_2+a_3};$$
$$N_2=\frac{a_2+b_2x_1+c_2x_2}{a_1+a_2+a_3};$$

$$N_3 = \frac{a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_2}{a_1 + a_2 + a_3}. \qquad (8)$$

Коефіцієнти $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ визначаються із системи (5), що відрізняється від системи (4) правою частиною. Тому аналогічно формулам (6), можемо записати вираження для $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, заміняючи вектор $u_1^{(i)}$ вектором $u_2^{(i)}$:

$$\alpha_1 = \frac{u_2^{(1)} a_1 + u_2^{(2)} a_2 + u_2^{(3)} a_3}{a_1 + a_2 + a_3};$$

$$\alpha_2 = \frac{u_2^{(1)} b_1 + u_2^{(2)} b_2 + u_2^{(3)} b_3}{a_1 + a_2 + a_3}; \qquad (9)$$

$$\alpha_3 = \frac{u_2^{(1)} c_1 + u_2^{(2)} c_2 + u_2^{(3)} c_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Тоді вираження для $u_2(x_1, x_2)$ представиться аналогічно (7) у такий спосіб:

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)} N_1 + u_2^{(2)} N_2 + u_2^{(3)} N_3, \qquad (10)$$

де N_1, N_2, N_3 – функції форми, що знаходяться за формулами (8).

Вираження (7) і (10) у матричній формі запису можна представити як:

$$\{U\} = [N]\,\{u\}, \qquad (11)$$

де $\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень довільної точки СЕ,

$\{u\}$ – вектор вузлових переміщень виду (1),

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми, підібрана таким чином, щоб після підстановки її у вираження (11) одержати формули (7) і (10).

Нехай $x_1^{(1)} = 0, x_2^{(1)} = 0, x_1^{(2)} = 1, x_2^{(2)} = 0, x_1^{(3)} = 0, x_2^{(3)} = 1$. При таких даних одержуємо:

$$a_1 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1;\ a_2 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0;\ a_3 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0;$$

$$b_1 = 0 - 1 = -1;\ b_2 = 1 - 0 = 1;\ b_3 = 0 - 0 = 0;$$

$$c_1 = 0 - 1 = -1;\ c_2 = 0 - 0 = 0;\ c_3 = 1 - 0 = 1.$$

$$N_1 = 1 - x_1 - x_2;\ N_2 = x_1; N_3 = x_2.$$

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^{(1)}(1 - x_1 - x_2) + u_1^{(2)} x_1 + u_1^{(3)} x_2,$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^{(1)}(1 - x_1 - x_2) + u_2^{(2)} x_1 + u_2^{(3)} x_2.$$

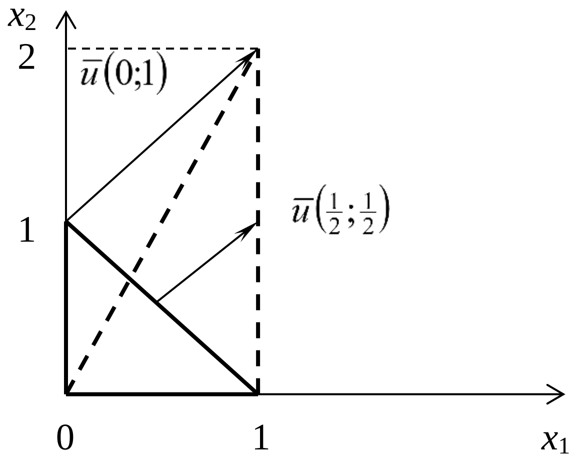
Нехай $u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = 0, u_1^{(3)} = u_2^{(3)} = 1.$

Знайдемо значення переміщень

у точці $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$u_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0 + 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

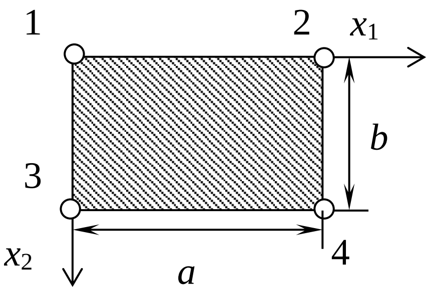
$$u_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0 + 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Функції форми для деяких СЕ

<table>
<tr><th>Тип скінченного елемента</th><th>Вектор переміщень</th></tr>
<tr><td>

Плоский прямокутник з вісьма ступенями свободи



$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

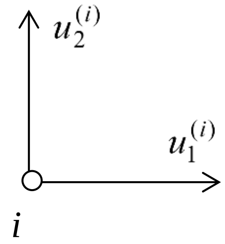
$$N_1 = \frac{1}{ab}(a - x_1)(b - x_2)$$

$$N_2 = \frac{1}{ab} x_1 (b - x_2)$$

$$N_3 = \frac{1}{ab}(a - x_1) x_2$$

$$N_4 = \frac{1}{ab} x_1 x_2$$

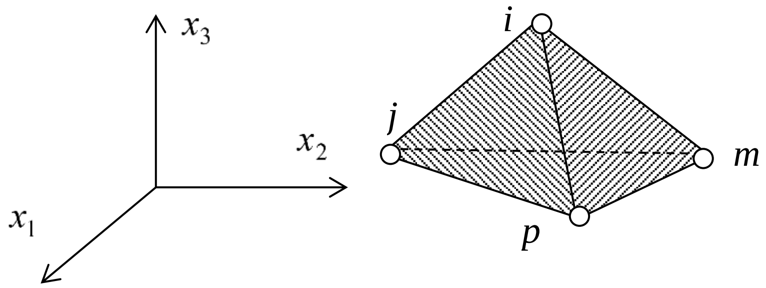
</td><td>



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

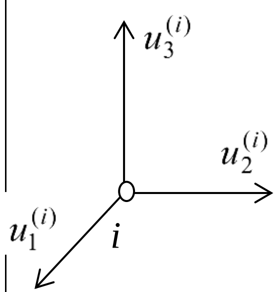
Елемент у виді тетраедра з двадцятьма ступенями свободи



$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_m & 0 & 0 & N_p \end{bmatrix}$$

$$N_i = \frac{a_i + b_i x_1^{(i)} + c_i x_2^{(i)} + d_i x_3^{(i)}}{6V}$$

</td><td>



</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

$$a_i=\begin{vmatrix} x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{vmatrix};\ b_i=-\begin{vmatrix} 1 & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ 1 & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{vmatrix};$$

$$c_i=-\begin{vmatrix} x_1^{(j)} & 1 & x_3^{(j)} \\ x_1^{(m)} & 1 & x_3^{(m)} \\ x_1^{(p)} & 1 & x_3^{(p)} \end{vmatrix};\ d_i=-\begin{vmatrix} x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & 1 \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & 1 \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & 1 \end{vmatrix};$$

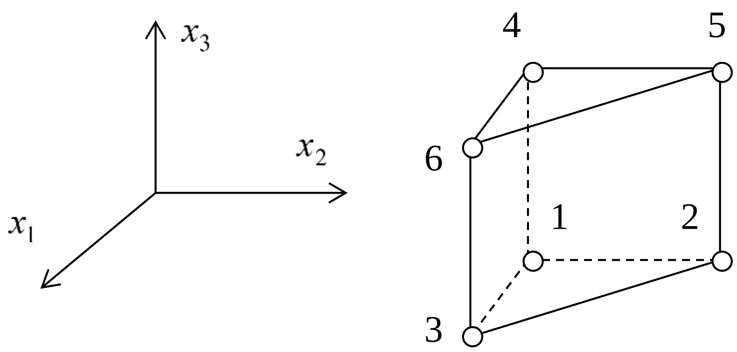
$$6V=\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ 1 & x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{vmatrix}$$

</td>
<td>

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ u_3^{(j)} \\ u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \\ u_1^{(p)} \\ u_2^{(p)} \\ u_3^{(p)} \end{Bmatrix}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Елемент у виді трикутної призми



$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

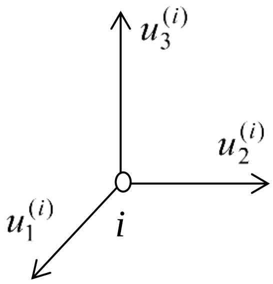
$$N_1=N_4=$$
$$=\frac{1}{2A}\left[x_1\left(x_2^{(2)}-x_2^{(3)}\right)+x_2\left(x_1^{(3)}-x_1^{(2)}\right)+x_1^{(2)}x_2^{(3)}-x_1^{(3)}x_2^{(2)}\right]$$

$$N_2=N_5=$$
$$=\frac{1}{2A}\left[x_1\left(x_2^{(3)}-x_2^{(1)}\right)+x_2\left(x_1^{(1)}-x_1^{(3)}\right)+x_1^{(3)}x_2^{(1)}-x_1^{(1)}x_2^{(3)}\right]$$

$$N_3=N_6=$$
$$=\frac{1}{2A}\left[x_1\left(x_2^{(1)}-x_2^{(2)}\right)+x_2\left(x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right)+x_1^{(1)}x_2^{(2)}-x_1^{(2)}x_2^{(1)}\right]$$

$2A$ – подвоєна площа трикутників 1-2-3 або 4-5-6.

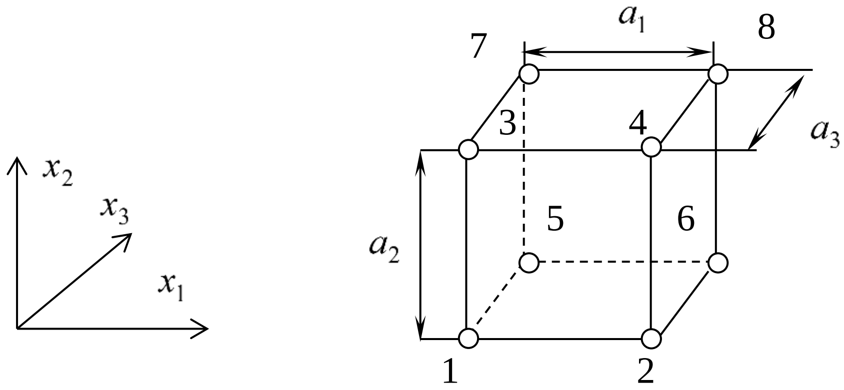
</td>
<td>



$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ \vdots \\ u_1^{(6)} \\ u_2^{(6)} \\ u_3^{(6)} \end{Bmatrix}$$

</td>
</tr>
</table>

Елемент у виді паралелепіпеда (чотирикутної призми)



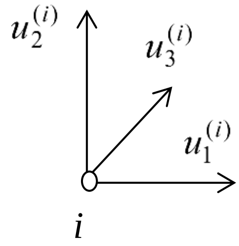
$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right)\left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right);\; N_2 = \frac{x_1}{a_1}\left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right)\left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right);$$

$$N_3 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)\frac{x_2}{a_2}\left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right);\; N_4 = \frac{x_1}{a_1}\frac{x_2}{a_2}\left(1 - \frac{x_3}{a_3}\right);$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right)\frac{x_3}{a_3};\; N_6 = \frac{x_1}{a_1}\left(1 - \frac{x_2}{a_2}\right)\frac{x_3}{a_3};$$

$$N_7 = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)\frac{x_2}{a_2}\frac{x_3}{a_3};\; N_8 = \frac{x_1}{a_1}\frac{x_2}{a_2}\frac{x_3}{a_3}.$$



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ \vdots \\ u_1^{(8)} \\ u_2^{(8)} \\ u_3^{(8)} \end{Bmatrix}$$

Матриця жорсткості трикутного скінченного елементу для ізотропного матеріалу

Основні співвідношення плоскої теорії пружності

В плоскій задачі теорії пружності незалежними компонентами тензора напружень є нормальні напруження σ_{11}, σ_{22} та дотичні σ_{12}. Тензор деформацій також має три незалежні компоненти – лінійні деформації $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ та кут зсуву γ_{12}. Запишемо перераховані компоненти в векторному виді:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}; \ \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Рівняння рівноваги запишуться в виді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + G_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + G_2 = 0, \end{cases}$$

або в матричній формі запису $[\partial]\{\sigma\} + \{G\} = \{0\}$, де матриця диференціювання приймає вид:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Вектор зовнішнього навантаження:

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}.$$

Вектор переміщень представляється в виді

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Геометричні рівняння

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

або в матричному виді $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$.

Фізичні рівняння (закон Гука)

$$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{12} = \mu\gamma_{12}.$$

В матричній формі ці співвідношення запишуться в виді:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\},$$

де матриця пружних сталих матеріалу має вид:

$$[E] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти μ та λ виражаються через модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν:

для плоскої деформації

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)};\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

для плоского напруженого стану

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)};\ \lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}.$$

Враховуючи наведені співвідношення матриця пружних сталих прийме вид:

для плоскодеформованого стану

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

для плосконапруженого стану

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Розглянемо трикутний скінченний елемент, переміщення для нього можна записати у такому виді:

$$\{U\} = [N]\,\{\delta\}, \tag{2}$$

де $\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень довільної точки СЕ,

$\{\delta\}$ – вектор вузлових переміщень розмірності 6×1,

$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми.

Визначимо величину пружної енергії деформування скінченного елемента:

$$U = \int_V \frac{\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}}{2} dV = t \int_S \frac{\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}}{2} dS, \tag{3}$$

де t – товщина скінченного елементу, S – його площа.

Враховуючи співвідношення Коші

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{\delta\} = [B]\{\delta\},$$

де $[B] = [\partial][N]$, та закон Гука

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{\delta\},$$

будемо мати

$$U = \frac{1}{2} t \int_S ([B]\{\delta\})^T [E][B]\{\delta\}\, dS. \tag{4}$$

Враховуючи, що $([B]\{\delta\})^T = \{\delta\}^T[B]^T$, отримаємо

$$U = \frac{1}{2} t\{\delta\}^T \int_S [B]^T[E][B]\, dS \cdot \{\delta\}. \tag{5}$$

Вираз під знаком інтеграла називають матрицею жорсткості скінченного елемента:

$$[K] = t \int_S [B]^T [E][B] \, dS.$$

Розглянемо побудову матриці жорсткості трикутного скінченного елементу, зображеного на рисунку 1. Товщина дорівнює t. Пружні сталі матеріалу: модуль пружності $\boldsymbol{E}$ та коефіцієнт Пуассона $\boldsymbol{\nu}$.

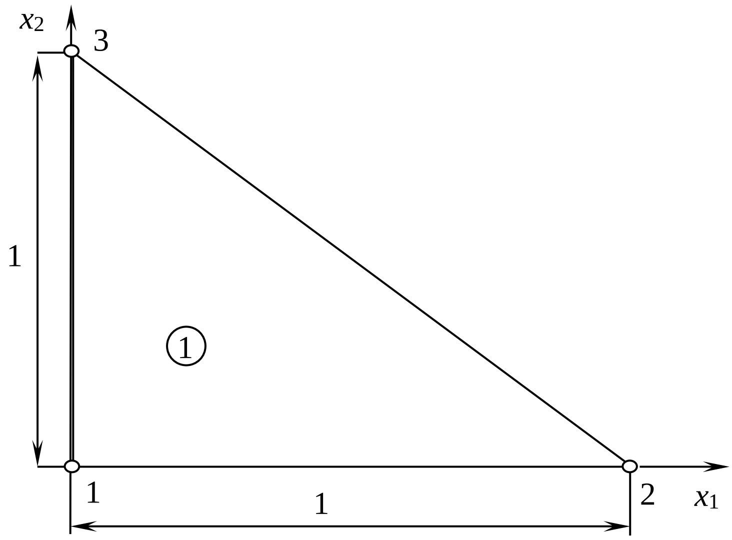


Рис.1.

Тоді функції форми для скінченного елементу будуть дорівнювати:

$$N_1 = 1 - x_1 - x_2, N_2 = x_1, N_3 = x_2.$$

Враховуючи співвідношення Коші для трикутного скінченного елементу отримуємо:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{\delta\} = [B]\{\delta\},$$

де $[B] = [\partial][N]$ – матриця векторів деформацій від одиничних переміщень вузлів скінченного елементу. Будемо мати:

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Матриця жорсткості трикутного скінченного елементу буде дорівнювати

$$[K]=t\int_0^1\int_0^{1-x_1}[B]^T[E][B]dx_2dx_1=$$

$$=\frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^1\int_0^{1-x_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}dx_2dx_1=\frac{Et}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\frac{3-4\nu}{2} & \frac{1}{2} & \nu-1 & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & -\nu\\ \frac{1}{2} & \frac{3-4\nu}{2} & -\nu & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & \nu-1\\ \nu-1 & -\nu & 1-\nu & 0 & 0 & \nu\\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ -\nu & \nu-1 & \nu & 0 & 0 & 1-\nu\end{bmatrix}.$$