ГЛОБАЛЬНА МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ ОБ’ЄКТА ТА ЇЇ ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Розглянемо балку, жорстко закріплену з одного краю під дією зосередженої сили на другому краї (рис. 1). Товщину балки приймемо рівною $b/4$. Модуль пружності матеріалу балки дорівнює E, а коефіцієнт Пуассона – ν.

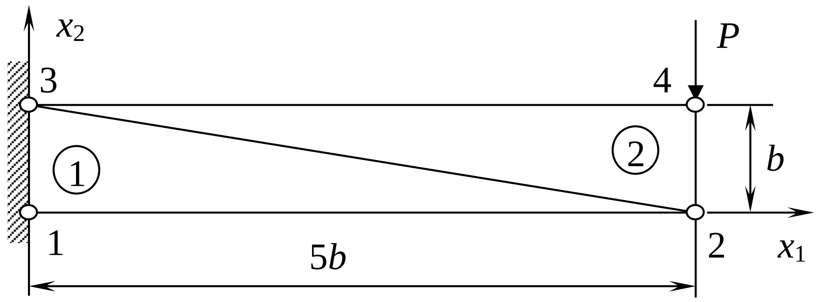

Рис. 1.

Розіб’ємо конструкцію на два скінченних елемента як показано на рисунку 1. При побудові матриць жорсткості окремих елементів доцільно спочатку скористатися місцевими системами координат, а потім перетворити їх у глобальну (базисну), пов’язану із конструкцією систему координат (рис. 2).

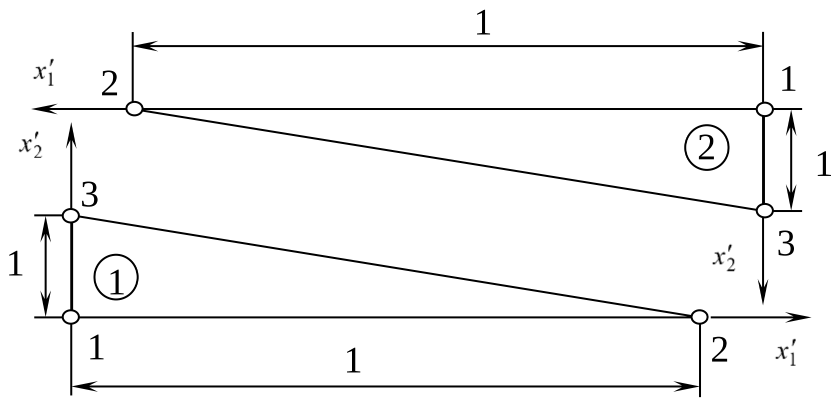

Рис. 2.

У місцевих системах координат (див. рис. 2) обидва елементи будуть абсолютно ідентичними і будуть співпадати із скінченним елементом, матриця жорсткості для якого побудована у попередньому розділі. Тому скористаємося вже отриманими функціями форми.

Залежність між базисною системою координат та локальними системами координат визначається залежностями:

для першого скінченного елемента маємо

$$x'_1 = \frac{x_1}{5b};\ x'_2 = \frac{x_2}{b}$$

для другого скінченного елемента маємо

$$x'_1 = 1 - \frac{x_1}{5b};\ x'_2 = 1 - \frac{x_2}{b}.$$

Тоді функції форми для першого скінченного елемента будуть дорівнювати:

$$N_1 = 1 - \frac{x_1}{5b} - \frac{x_2}{b};\ N_2 = \frac{x_1}{5b};\ N_3 = \frac{x_2}{b}.$$

А функції форми для другого скінченного елементу будуть дорівнювати

$$N_2 = 1 - \frac{x_2}{b};\ N_3 = 1 - \frac{x_1}{5b};\ N_4 = \frac{x_1}{5b} + \frac{x_2}{b} - 1.$$

Враховуючі співвідношення Коші для трикутного скінченного елементу отримуємо:

$$\left[B_{(1)}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для другого трикутного скінченного елемента маємо:

$$[B_{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{5b} \end{bmatrix}.$$

Матриця жорсткості першого скінченного елементу буде дорівнювати:

$$[K_{(1)}] = t\int_0^{5b}\int_0^{b-\frac{x_1}{5}} [B_{(1)}]^T[E][B_{(1)}]dx_2dx_1 =$$

$$= \frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^{5b}\int_0^{b-\frac{x_1}{5}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{5b} \\ \frac{1}{5b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} dx_2dx_1 = \frac{5Et}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{27-52\nu}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{\nu}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{51-52\nu}{50} & -\frac{\nu}{5} & -\frac{1-2\nu}{50} & -\frac{1-2\nu}{10} & \nu-1 \\ -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{\nu}{5} & \frac{1-\nu}{25} & 0 & 0 & \frac{\nu}{5} \\ -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{50} & 0 & \frac{1-2\nu}{50} & \frac{1-2\nu}{10} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{10} & 0 & \frac{1-2\nu}{10} & \frac{1-2\nu}{4} & 0 \\ -\frac{\nu}{5} & \nu-1 & \frac{\nu}{5} & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}.$$

Для другого скінченного елементу маємо:

$$\left[K_{(2)}\right] = t\int_0^{5b}\int_{b-\frac{x_1}{5}}^{b}\left[B_{(2)}\right]^T[E]\left[B_{(2)}\right]dx_2dx_1 =$$

$$= \frac{Et}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^{5b}\int_{b-\frac{x_1}{5}}^{b}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{5b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5b} \\ \frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{5b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & 0 & \frac{1}{5b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & -\frac{1}{5b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{5b} \end{bmatrix}dx_2dx_1 = \frac{5Et}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{27-52\nu}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{\nu}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{51-52\nu}{50} & -\frac{\nu}{5} & -\frac{1-2\nu}{50} & -\frac{1-2\nu}{10} & \nu-1 \\ -\frac{1-\nu}{25} & -\frac{\nu}{5} & \frac{1-\nu}{25} & 0 & 0 & \frac{\nu}{5} \\ -\frac{1-2\nu}{10} & -\frac{1-2\nu}{50} & 0 & \frac{1-2\nu}{50} & \frac{1-2\nu}{10} & 0 \\ -\frac{1-2\nu}{2} & -\frac{1-2\nu}{10} & 0 & \frac{1-2\nu}{10} & \frac{1-2\nu}{4} & 0 \\ -\frac{\nu}{5} & \nu-1 & \frac{\nu}{5} & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}.$$

Враховуючи умови навантаження та закріплення, будемо мати такі крайові умови:

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = u_1^{(3)} = u_2^{(3)} = 0,$$
$$P_1^{(1)} = P_2^{(1)} = P_1^{(2)} = P_2^{(2)} = P_1^{(3)} = P_2^{(3)} = P_1^{(4)} = 0;\ P_2^{(4)} = -P.$$

Для побудови глобальної матриці жорсткості конструкції доцільно записати матрицю инциденцій, яка однозначно показує відповідність глобальної нумерації вузлів з локальною нумерацією вузлів кожного скінченного елемента. Дана матриця має розмірність $n \times m$, де n – загальна кількість вузлів конструкції помножена на кількість ступенів свободи, m – кількість вузлів скінченного елементу помножена на кількість ступенів свободи вузла. Кількість матриць инциденцій дорівнює кількості скінченних елементів конструкції. Матриця инциденцій має структуру:

Номера вузлів скінченного елемента

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \cdots & \multicolumn{2}{c}{m} \\ \multicolumn{7}{c}{\text{Напрям}} \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Номера вузлів конструкції} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \cdots \\ n \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \text{Напрям} \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ 1 \\ 2 \end{array} &
\begin{bmatrix}
i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & \cdots & i_{1\,2m-1} & i_{1\,2m} \\
i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} & \cdots & i_{2\,2m-1} & i_{2\,2m} \\
i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} & \cdots & i_{3\,2m-1} & i_{3\,2m} \\
i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} & \cdots & i_{4\,2m-1} & i_{4\,2m} \\
i_{51} & i_{52} & i_{53} & i_{54} & \cdots & i_{5\,2m-1} & i_{5\,2m} \\
i_{61} & i_{62} & i_{63} & i_{64} & \cdots & i_{6\,2m-1} & i_{6\,2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
i_{2n-1\,1} & i_{2n-1\,2} & i_{2n-1\,3} & i_{2n-1\,4} & \cdots & i_{2n-1\,2m-1} & i_{2n-1\,2m} \\
i_{2n\,1} & i_{2n\,2} & i_{2n\,3} & i_{2n\,4} & \cdots & i_{2n-1\,2m-1} & i_{2n\,2m}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Глобальна матриця жорсткості системи має вид:

$$[\widetilde{K}] = \sum_{e=1}^{l} [i_{(e)}]^T [K_{(e)}][i_{(e)}],$$

де l – загальна кількість скінченних елементів.

Матриця жорсткості першого елементу:

$$[K_{(1)}] = \begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\text{Номера вузлів скінченного елемента}} \\ \multicolumn{2}{c}{1(1)} & \multicolumn{2}{c}{2(2)} & \multicolumn{2}{c}{3(3)} \\ \multicolumn{6}{c}{\text{Напрям}} \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Номера вузлів скінченного елемента} \\ 1(1) \\ \\ 2(2) \\ \\ 3(3) \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \text{Напрям} \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} &
\begin{bmatrix}
k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\
k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\
k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\
k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\
k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\
k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Матриця жорсткості другого елементу:

$$
[K_{(2)}] = \begin{array}{cccc}
 & & & \text{Номера вузлів скінченного елемента} \\
 & & & \begin{array}{ccc} 1(4) \quad & \quad 2(3) \quad & \quad 3(2) \end{array} \\
 & & & \text{Напрям} \\
 & & & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
\text{Номера вузлів скінченного елемента} & \begin{array}{c} 1(4) \\ \\ 2(3) \\ \\ 3(2) \\ \\ \end{array} & \text{Напрям} \; \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} &
\begin{bmatrix}
k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\
k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\
k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\
k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\
k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\
k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Глобальна матриця жорсткості для усієї конструкції:

$$
[\tilde{K}] = \begin{array}{cccc}
 & & & \text{Номера вузлів конструкції} \\
 & & & \begin{array}{cccc} 1 \qquad\qquad & \qquad 2 \qquad\qquad & \qquad 3 \qquad\qquad & \qquad 4 \end{array} \\
 & & & \text{Напрям} \\
 & & & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
\text{Номера вузлів конструкції} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} & \text{Напрям} \; \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} &
\begin{bmatrix}
k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} & 0 & 0 \\
k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} & 0 & 0 \\
k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)}+k_{55}^{(2)} & k_{34}^{(1)}+k_{56}^{(2)} & k_{35}^{(1)}+k_{53}^{(2)} & k_{36}^{(1)}+k_{54}^{(2)} & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} \\
k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)}+k_{65}^{(2)} & k_{44}^{(1)}+k_{66}^{(2)} & k_{45}^{(1)}+k_{63}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{64}^{(2)} & k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} \\
k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)}+k_{35}^{(2)} & k_{54}^{(1)}+k_{36}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{56}^{(1)}+k_{34}^{(2)} & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\
k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)}+k_{45}^{(2)} & k_{64}^{(1)}+k_{46}^{(2)} & k_{65}^{(1)}+k_{43}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{44}^{(2)} & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} \\
0 & 0 & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\
0 & 0 & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ПОБУДОВА СИСТЕМИ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ПРОЦЕДУРА ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Тоді система розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів прийме вид:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)}+k_{55}^{(2)} & k_{34}^{(1)}+k_{56}^{(2)} & k_{35}^{(1)}+k_{53}^{(2)} & k_{36}^{(1)}+k_{54}^{(2)} & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)}+k_{65}^{(2)} & k_{44}^{(1)}+k_{66}^{(2)} & k_{45}^{(1)}+k_{63}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{64}^{(2)} & k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)}+k_{35}^{(2)} & k_{54}^{(1)}+k_{36}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{56}^{(1)}+k_{34}^{(2)} & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)}+k_{45}^{(2)} & k_{64}^{(1)}+k_{46}^{(2)} & k_{65}^{(1)}+k_{43}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{44}^{(2)} & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \\ P_1^{(4)} \\ P_2^{(4)} \end{bmatrix},$$

або враховуючи крайові умови:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)}+k_{55}^{(2)} & k_{34}^{(1)}+k_{56}^{(2)} & k_{35}^{(1)}+k_{53}^{(2)} & k_{36}^{(1)}+k_{54}^{(2)} & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)}+k_{65}^{(2)} & k_{44}^{(1)}+k_{66}^{(2)} & k_{45}^{(1)}+k_{63}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{64}^{(2)} & k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)}+k_{35}^{(2)} & k_{54}^{(1)}+k_{36}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{56}^{(1)}+k_{34}^{(2)} & k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)}+k_{45}^{(2)} & k_{64}^{(1)}+k_{46}^{(2)} & k_{65}^{(1)}+k_{43}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{44}^{(2)} & k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}.$$

Відомі з крайових умов значення вектору переміщень дозволяють зменшити розмірність системи викреслюванням відповідних рядків та стовбців, для даної задачі остаточний результат можна отримати з системи:

$$\begin{bmatrix} k_{33}^{(1)}+k_{55}^{(2)} & k_{34}^{(1)}+k_{56}^{(2)} & k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} \\ k_{43}^{(1)}+k_{65}^{(2)} & k_{44}^{(1)}+k_{66}^{(2)} & k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} \\ k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}.$$