5 БАГАТОФАКТОРНА НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Якщо модель описується нелінійною функцією, то її потрібно попередньо лінеаризувати, а потім вже проводити необхідний аналіз. Для цього потрібно ввести заміну для отримання рівняння регресії $\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$. Аналіз моделі проводиться для замінених змінних та отриманих до них параметрів моделі.

Прогнозування величини результативної ознаки *y* при заданому значенні факторної ознаки *x*, робимо для моделі, для якої найменша *стандартна помилка оцінок параметрів моделі*, які показують відхилення емпіричних значень від лінії регресії.

Розглянемо деякі види функцій та відповідні заміни до них.

1. *Гіперболічна*: $y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_m}{x_m}$.

Зробимо заміну: $X_1 = \frac{1}{x_1}$, $X_2 = \frac{1}{x_2}$, …, $X_m = \frac{1}{x_m}$. Отримаємо $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_m X_m$. Після оцінки параметрів робимо зворотну заміну: $x_1 = \frac{1}{X_1}$, $x_2 = \frac{1}{X_2}$, …, $x_m = \frac{1}{X_m}$. Таким чином, будемо мати оцінку моделі: $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \frac{\hat{a}_1}{x_1} + \frac{\hat{a}_2}{x_2} + ... + \frac{\hat{a}_m}{x_m}$.

2. *Показникова*: $y = a_0 \cdot a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot ... \cdot a_m^{x_m}$.

Зробимо перетворення: логарифмування обох частин залежності за натуральною основою $\ln y = \ln a_0 + x_1 \ln a_1 + x_2 \ln a_2 + ... + x_m \ln a_m$, потім заміну: $Y = \ln y$, $\bar{a}_0 = \ln a_0$, $\bar{a}_1 = \ln a_1$, …, $\bar{a}_m = \ln a_m$. Отримаємо $Y = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + ... + \bar{a}_m x_m$. Після оцінки параметрів робимо зворотну заміну: $y = \ln Y$, $\hat{a}_0 = e^{\bar{a}_0}$, $\hat{a}_1 = e^{\bar{a}_1}$, …, $\hat{a}_m = e^{\bar{a}_m}$. Таким чином, будемо мати оцінку моделі: $\hat{Y} = \hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1^{x_1} \cdot \hat{a}_2^{x_2} \cdot ... \cdot \hat{a}_m^{x_m}$.

3. *Степенева*: $y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_m^{a_m}$.

Зробимо перетворення: логарифмування обох частин залежності за натуральною основою $\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + ... + a_m \ln x_m$, потім заміну: $Y = \ln y$, $\bar{a}_0 = \ln a_0$, $X_1 = \ln x_1$, $X_2 = \ln x_2$, …, $X_m = \ln x_m$. Отримаємо $Y = \bar{a}_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_m X_m$. Після оцінки параметрів робимо зворотну заміну: $y = \ln Y$, $\hat{a}_0 = e^{\bar{a}_0}$, $x_1 = e^{X_1}$, …, $x_m = e^{X_m}$. Таким чином, будемо мати оцінку моделі: $\hat{Y} = \hat{a}_0 \cdot x_1^{\hat{a}_1} \cdot x_2^{\hat{a}_2} \cdot ... \cdot x_m^{\hat{a}_m}$.

4. *Параболічна*: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + ... + a_m x_m^m$.

Зробимо заміну: $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2^2$, …, $X_m = x_m^m$. Отримаємо $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_m X_m$. Після оцінки параметрів робимо зворотну заміну: $x_1 = X_1$, $x_2 = \sqrt{X_2}$, …, $x_m = \sqrt[m]{X_m}$. Таким чином, будемо мати оцінку моделі: будемо мати оцінку моделі: $\widehat{Y} = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_1 + \widehat{a}_2 x_2^2 + ... + \widehat{a}_m x_m^m$.

5. *Логарифмічна*: $y = a_0 + a_1 \lg x_1 + a_2 \lg x_2 + ... + a_m \lg x_m$.

Зробимо заміну: $X_1 = \lg x_1$, $X_2 = \lg x_2$, …, $X_m = \lg x_m$. Отримаємо $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_m X_m$. Після оцінки параметрів робимо зворотну заміну: $x_1 = 10^{X_1}$, $x_2 = 10^{X_2}$, …, $x_2 = 10^{X_2}$. Таким чином, будемо мати оцінку моделі: будемо мати оцінку моделі: $\widehat{Y} = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \lg x_1 + \widehat{a}_2 \lg x_2 + ... + \widehat{a}_m \lg x_m$.

6. *Експоненціальна*: $y = a_0 \cdot e^{a_1 x_1} \cdot e^{a_2 x_2} \cdot ... \cdot e^{a_m x_m}$.

Зробимо перетворення: логарифмування обох частин залежності за натуральною основою $\ln y = \ln a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, потім заміну: $Y = \ln y$, $\overline{a}_0 = \ln a_0$. Отримаємо $Y = \overline{a}_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$. Після оцінки параметрів робимо зворотну заміну: $y = \ln Y$, $\widehat{a}_0 = e^{\overline{a}_0}$. Таким чином, будемо мати оцінку моделі: $\widehat{Y} = \widehat{a}_0 \cdot e^{\widehat{a}_1 x_1} \cdot e^{\widehat{a}_2 x_2} \cdot ... \cdot e^{\widehat{a}_m x_m}$.

Практичним застосуванням множинної нелінійної моделі виробничої функції, наприклад, мультиплікативна функція типу Кобба-Дугласа.

Виробнича функція відображає залежність випуску від витрат ресурсів.

Мультиплікативна функція типа Кобба-Дугласа має вигляд:

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{\beta} + u,$$

яка описує залежність між об'ємом виробництва *Y*, млн. грн., обсягом спожитої праці *L*, млн. грн. та обсягом виробничого капіталу *K*, млн. грн.

Особливим випадком мультиплікативної функції є Кобба-Дугласа. Вона має такий само вигляд, але для неї виконується умова: $\alpha + \beta = 1$.

Мультиплікативна функція застосовується для моделювання на макро- і мікрорівнях.

Для визначення параметрів моделі можна застосувати метод найменших квадратів. Для цього нелінійну модель треба звести до лінійної форми. Після логарифмування

$$\ln Y = \ln a_0 K^{\alpha} L^{\beta},$$

$$\ln Y = \ln a_0 + \ln K^{\alpha} + \ln L^{\beta},$$

$$\ln Y = \ln a_0 + \alpha \ln K + \beta \ln L,$$

і заміни змінних $y' = \ln Y$, $x_1' = \ln K$, $x_2' = \ln L$ отримаємо приведену лінійну регресію $y' = \ln a_0 + \alpha x_1' + \beta x_2'$.

Далі обчислюємо параметри регресії, визначаємо якість та адекватність моделі, визначаємо границі надійних інтервалів для параметрів і прогнозу показника, як було вище зазначено для множинної лінійної моделі.