Практичне заняття № 3. Елементи теорії множини

1. Записати множини, перелічивши їх елементи:
   1) $A=\{n\in\mathbb{R}:0\le n\le 25\wedge n\,\text{кратне}\,3\}$
   2) 2) $A=\{n\in\mathbb{N}:n-\text{прості числа, менші}\,22\}$;
   3) $A=\left\{x\in\mathbb{Z}:\frac{1}{9}\le 3^{x}<10\right\}$;
2. Знайти об’єднання, переріз та різницю множин:
   1) $A=\{x\in\mathbb{R}:x^{2}-2x>0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:x^{2}-4x+3\le 0\}$.
   2) $A=\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{x+2}>x\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{\sqrt{x+2}}<\frac{1}{x}\right\}$.

Для доведення рівності множин використовуються наступні основні формули.

1. $A\cup B=B\cup A.$

2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C.$

3. $(A\subset B)\Rightarrow(A\cup B=B).$

4. $A\cup A=A.$

5. $A\cup\varnothing=A.$

7. $A\cap B=B\cap A.$

8. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C.$

9. $(A\subset B)\Rightarrow(A\cap B=A).$

10. $A\cap\varnothing=\varnothing.$

11. $A\cap A=A.$

12. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

13. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

14. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

15. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

16. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

17. $\overline{\overline{A}} = A$.

Приклад. Довести рівність множин: $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$.

Доведення. Для доведення рівності потрібно, використовуючи основні формули, перетворити ліву частину рівності до правої або праву частину рівності до лівої. Можна також показати, що обидві частини рівності дорівнюють одній і тій же множині. У даному прикладі перетворимо праву частину рівності до лівої.

$$(B \cup C) \setminus A = (B \cup C) \cap \overline{A} = (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A}) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$$

Тут були використали формули (12) та (14)

4. Довести дані твердження або показати, що вони є невірними:

1) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;
2) $A \cap B = A \setminus (B \setminus A)$;
3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
4) $\overline{(A \setminus B)} = \bar{A} \cup B$;
5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Розв'язування прикладу 1.

$$A\cup B=A\cup(B\setminus A); A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\bar{A})=(A\cup\bar{A})\cap(A\cup B)=$$
$$=E\cap(A\cup B)=A\cup B.$$

Розв'язування прикладу 2

$$A\cap B=A\setminus(B\setminus A);\; A\setminus(B\setminus A)=A\setminus(B\cap\bar{A})=A\cap\overline{(B\cap\bar{A})}=A\cap(\bar{B}\cup A)=$$
$$=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap A)=(A\cap\bar{B})\cup A=A,\textit{т.к.}(A\cap\bar{B})\subset A.$$

Розв'язування прикладу 3

$$A\setminus B=A\setminus(A\cap B); A\setminus(A\cap B)=A\cap\overline{(A\cap B)}=A\cap(\bar{A}\cup\bar{B})=$$
$$=(A\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B})=\varnothing\cup(A\setminus B)=A\setminus B.$$

Розв'язування прикладу 4

$$\overline{(A\setminus B)}=\bar{A}\cup B;\quad \overline{(A\setminus B)}=\overline{(A\cap\bar{B})}=\bar{A}\cup B.$$

Розв'язування прикладу 5

$$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$$
$$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C); (A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\cap\bar{C})\cap\overline{(B\cap\bar{C})}=$$
$$=(A\cap\bar{C})\cap(\bar{B}\cup C)=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}\cup((A\cap\bar{C})\cap C)=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}\cup\varnothing=$$
$$=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}=(A\setminus B)\setminus C.$$

5. Якщо коло та пряма дотикається, що є перерізом множин точок цих фігур?
6. Нехай A – множина всіх ромбів, B – множина всіх прямокутників. Що буде перерізом цих множин?
7. Якою фігурою може виявиться перерізом 2 прямих на площині?
8. Нехай А – множина всіх простих дільників числа 30, В – множина простих дільників числа 42. Що є об'єднанням цих множин?
9. Кількість елементів множини, що є об'єднанням множини А з кількостю елементів N(A) та множини В з кількостю елементів множини N(B) дорівнює $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$.

10. У школі 1400 учнів. З них 1250 кататися на лижах, 952 – на ковзанах. На лижах і на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів уміють кататися і на лижах і на ковзанах?

11. У магазині відвідувачі, звичайно, або один торт або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. Одного дня було продано57 тортів та 36 коробок цукерок. Скільки всього було покупців,, якщо12 чоловік купили і торт, і коробку цукерок?
12. Кожному студенту першого курсу поставили у відповідність номеру групу, у якій він навчається. Чи буде ця відповідність взаємно однозначною?

.

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Довести рівність множин:
   1) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$;
   2) $\overline{A} \cap (B \cup C) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$;
   3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Розв'язання

Приклад 1.

$$(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = \left((A \cap B) \cup A\right) \cap \left((A \cap B) \cup \overline{B}\right) =$$

$$= A \cap \left(A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right) = A \cap (A \cap E) = A.$$

Приклад 2

$$\overline{A} \cap (B \cup C) = \left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(C \cap \overline{A}\right) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A).$$

Приклад 3

$$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B \cap C}\right) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) =$$

$$= A \cap C \cap \overline{B} \cup (A \cap C \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap C \cup \varnothing = A \cap \overline{B} \cap C = (A \setminus B) \cap C.$$