

§ 1. Елементи комбінаторики

Основними правилами комбінаторики

Задачі складання з елементів скінченних множин комбінацій (або груп) за певними правилами відбору елементів у ці комбінації відносяться до основних задач розділу математики, який називається комбінаторним аналізом або комбінаторикою.

Основними правилами комбінаторики є правило множення та правило суми.

Правило множення. Нехай треба послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу дію — n_2 способами, третю — n_3 способами й т. д., то всі k дій може бути виконано $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Правило суми. Нехай треба послідовно виконати k дій, які взаємно виключають одна одну. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу дію — n_2 способами, третю — n_3 способами й т. д., то всі k дій може бути виконано $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Приклад 1.1. В класі вивчають 10 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на навчальний день, складений з 6-ти різних уроків?

Розв'язування. Для того, щоб скласти розклад уроків, потрібно послідовно виконати 6 дій, що відповідають порядковим номерам уроків. Першим можна поставити будь-який з 10-ти предметів, тобто першу дію можна виконати 10-тю способами, тоді другу — 9-тю способами, третю — 8, четверту — 7, п'яту — 6, шосту — 5 способами. Застосувавши правило множення отримаємо, що розклад з шести різних уроків можна скласти $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ способами.

Приклад 1.2. Маємо 20 виробів першого сорту та 30 виробів другого сорту. Потрібно послідовно вибрати два вироби одного сорту. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язування. Вибір двох виробів одного сорту складається з двох дій — вибрати два вироби першого сорту або два вироби другого сорту. Першу дію за правилом множення можна виконати $20 \cdot 19 = 380$ способами, другу — $30 \cdot 29 = 870$ способами. Застосувавши правило суми, отримуємо відповідь: $380 + 870 = 1250$ способами можна послідовно вибрати два вироби одного сорту.

Приклад 1.3. У камері схову встановлено кодовий замок з чотирьох цифр. Кожна з цифр може дорівнювати 1,2,3,4,5. Скільки різних варіантів коду можна скласти, якщо відомо :

- а) цифри в коді можуть повторюватися?
- б) цифри в коді не повинні повторюватися?

в) код повинен починатися з цифри «3»?

г) код повинен бути парним числом?

д) код повинен бути парним числом, цифри якого не повторюються?

Розв'язування. а) Якщо цифри у коді можуть повторюватися, то на кожній позиції у коді може стояти будь-яка з 5 цифр, тобто загальна кількість варіантів складання коду $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

б) На першому місці може стояти будь-яка з 5 цифр, на другому — 4 (оскільки одна цифра вже вибрана на перше місце), на третьому — 3, на четвертому — 2 цифри. Загальна кількість варіантів складання коду підраховується за основним правилом множення комбінаторики: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

в) На першому місці повинна стояти цифра «3», на інших місцях можуть стояти будь-які з 5 цифр. Загальна кількість варіантів складання коду $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

г) Код буде парним числом, якщо на останньому місці буде стояти парна цифра. У нашому випадку це можуть бути тільки 2, або 4. На інших місцях можуть стояти будь-які цифри з 5 цифр. Тоді маємо, що загальна кількість варіантів складання коду $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$.

д) Код у цьому випадку теж повинен бути парним числом. Тому останню цифру також можна записати двома способами. У коді цифри не можуть повторюватися, тому на передостанньому місці може стояти лише чотири цифри, на другому — 3, на першому — 2 цифри. Загальна кількість варіантів складання коду $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$.

Перестановки, розміщення, комбінації

Нехай множина M містить n елементів ($n \geq 2$), $1 \leq k \leq n$.

Означення 1.1. Будь-яка підмножина множини M з k елементів називається комбінацією з n елементів по k . Число комбінацій позначають C_n^k та обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Домовимось, що $0! = 1$, тоді $C_n^0 = 1$. Справедливі властивості:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Множина з n елементів називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер цього елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа (номери елементів).

Дві впорядковані множини рівні, якщо вони складаються з однакових елементів та однаково впорядковані. Наприклад, множини (a, b) і (b, a) — різні впорядковані множини, елементами яких є елементи неупорядкованої множини $\{a, b\}$.

Означення 1.2. Розміщеннями з n елементів по k називають впорядковані підмножини множини M , які складаються з k елементів.

Розміщення можуть відрізнятися одне від одного або самими елементами, або їх порядком.

Кількість розміщень з n елементів по k позначають A_n^k , $k \leq n$ та обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Для кількості розміщень справедлива наступна рекурентна формула:

$$A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k), \quad k \leq n-1.$$

Справедливе відношення $A_n^k = k! C_n^k$. Воно випливає з того, що число усіх підмножин множини M , які мають k елементів, дорівнює C_n^k та кожна така підмножина може бути впорядкована $k!$ способами.

Означення 1.3. Перестановкою з n елементів множини M називається будь-яка впорядкована множина, яка утворена з n елементів множини M .

Перестановки складаються з одних й тих самих елементів, а відрізняються лише порядком елементів. Число перестановок множини з n елементів позначається P_n та обчислюється за формулою:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Приклад 1.4. Дано множину $M = \{n_1, n_2, n_3\}$. Наведіть усі можливі перестановки, розміщення та комбінації.

Розв'язування. Перестановками з трьох елементів цієї множини є упорядковані набори (n_1, n_2, n_3) , (n_1, n_3, n_2) , (n_2, n_1, n_3) , (n_2, n_3, n_1) , (n_3, n_2, n_1) , (n_3, n_1, n_2) . Розміщеннями з трьох елементів цієї множини по два є упорядковані набори (n_1, n_2) , (n_1, n_3) , (n_2, n_3) , (n_2, n_1) , (n_3, n_1) , (n_3, n_2) . Комбінаціями з трьох елементів цієї множини по два є множини $\{n_1, n_2\}$, $\{n_1, n_3\}$, $\{n_2, n_3\}$. Дві комбінації відрізняються одна від іншої хоча б одним елементом, а розміщення або самими елементами, або порядком їх розташування. Розміщеннями з трьох елементів цієї множини по одному будуть (n_1) , (n_2) , (n_3) . Комбінаціями із трьох елементів цієї множини по одному будуть $\{n_1\}$, $\{n_2\}$, $\{n_3\}$.

Приклад 1.5. Скількома способами можна поставити 9 різних книг на полиці, щоб певні 4 книги стояли поряд?

Розв'язування. Потрібно виконати дві дії: сформувати блок з чотирьох певних книг, а потім розкласти цей блок та 5 книг, які залишалися на полиці. Першу дію можна виконати $P_4 = 4! = 24$ способами, другу дію можна виконати

$P_6 = 6! = 720$ способами. За правилом множення отримаємо, що кількість усіх можливих способів $24 \cdot 720 = 17280$.

Приклад 1.6. Скількома способами можна вибрати з 10 чорних та 4 білих куль 7 куль так, щоб серед них були 3 білі кулі?

Розв'язування. Для того, щоб отримати потрібний набір куль, потрібно виконати дві дії: вибрати 4 чорних та 3 білих куль. Першу дію можна виконати $C_{10}^4 = 210$ способами, другу — $C_4^3 = 4$ способами. Тоді за правилом множення потрібний набір з 7 куль можна отримати $210 \cdot 4 = 840$ способами.

Приклад 1.7. Групу з 12 чоловік потрібно розбити на дві підгрупи, у одній з яких повинно бути не більше 5 чоловік, а у другій не більше 9 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування. Можливі три варіанти розбиття групи з 12 чоловік на дві підгрупи таким чином, щоб задовольнити умову: 5 чоловік й 7 чоловік, 4 й 8, 3 та 9. Перший варіант можна здійснити $C_{12}^5 = C_{12}^7 = 792$ способами, другий $C_{12}^4 = C_{12}^8 = 495$ способами, третій — $C_{12}^3 = 220$ способами. Застосувавши правило суми, отримаємо, що кількість усіх можливих варіантів $792 + 495 + 220 = 1507$.

Приклад 1.8. Десять команд приймають участь у розіграші першості з футболу за три призові місця. Дві команди, що займуть останні два місця серед десяти команд, не будуть вже приймати участь у наступній такій же першості. Скільки різних варіантів першості може бути, якщо враховувати лише перші три й останні дві команди серед десяти команд?

Розв'язування. З постановки задачі випливає, що потрібно виконати дві дії: заповнити три перші призові місця та два останні місця. Першу дію можна виконати $A_{10}^3 = 720$ способами, другу — $C_7^2 = 21$ способами. Застосувавши правило множення, отримаємо, що кількість усіх способів дорівнює $720 \cdot 21 = 15120$.

Перестановки, розміщення з повторами

Означення 1.4. Розглянемо перестановки з повторами. Нехай з елементів $n_1, n_2, \dots, n_s$ утворюються скінченні впорядковані набори, що містять n членів, у котрих n_1 повторюється k_1 разів, n_2 — k_2 разів, ..., n_s — k_s разів, $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$. Такі набори називаються перестановками з повторами. Фактично перестановка з повторами утворюється перестановкою різних елементів в наборі

$$\left(\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{k_s} \right).$$

Кількість різних перестановок з повторами обчислюється за формулою

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}.$$

Приклад 1.9. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви у слові «мама»? Написати усі ці слова.

Розв’язування. Враховуючи те, що букви м та а у слові «мама» повторюються двічі, то кількість різних слів можна скласти $P_4(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ способами. Ці слова такі: мама, амма, амам, ммаа, маам, аамм.

Приклад 1.10. Знайти n — кількість шестибуквених «слів» які можна скласти з a , b й c , якщо відомо, що a зустрічається не більше трьох раз, b — не більше двох раз, c — не більше двох раз?

Розв’язування. Можна виділити наступні варіанти шестибуквених наборів — «слів», складених відповідно з букв a , b та c : $(3,2,1)$, $(3,1,2)$, $(2,2,2)$. У наборі $(3,2,1)$, наприклад, буква a зустрічається три рази, буква b — два рази, буква c один раз. Такі набори можна скласти $\frac{6!}{3!2!1!}$ способами. Набори виду $(3,1,2)$ — $\frac{6!}{3!1!2!}$ способами. Набори виду $(2,2,2)$ — $\frac{6!}{2!2!2!}$ способами. Тоді загальна кількість шестибуквених «слів» $n = \frac{6!}{3!2!1!} + \frac{6!}{3!1!2!} + \frac{6!}{2!2!2!} = 210$.

Означення 1.5. Нехай дано множину M , яка містить n типів елементів. З’єднання з повторами з елементів n типів по k , які відрізняються складом елементів і/або порядком їх розташування, називаються розміщеннями з повторами з n елементів по k . Кількість усіх таких розміщень з повторами позначається $A_n^k(i)$ обчислюється за формулою

$$A_n^k(i) = n^k.$$

Приклад 1.11. Скільки існує різних варіантів розмістити 6 пасажирів по 4 вагонах?

Розв’язування. Кожний пасажир може розміститися у будь-якому з чотирьох вагонів, тому маємо: $A_4^6(i) = 4^6 = 4096$.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 0;2;3;4?
2. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 2;5;7;9?
3. Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовуються 28 літер українського алфавіту.
4. У ліфт 12-ти поверхового будинку увійшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфту?

5. На вершину гори ведуть 11 шляхів. Скількома способами мандрівник може піднятися на гору та спуститися з неї? Дати відповідь на те ж запитання, якщо підйом та спуск здійснювати різними шляхами.

6. З міста A до міста B можна вибрати один із 5 залізничних або один із 7 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорожі:
а) $A \rightarrow B$; б) $A \rightarrow B \rightarrow A$; в) $B \rightarrow A \rightarrow B$, якщо зворотній шлях провести у поїзді?

7. Скількома способами 9 чоловік можуть розміститися у черзі до каси?

8. Скільки є п'ятизначних чисел, котрі діляться на 5 без остачі?

9. Скільки є тризначних чисел, у котрих усі три цифри парні?

10. Скількома способами з 40 чоловік можна вибрати делегацію, що складається з п'яти чоловік?

11. Скільки є чотиризначних чисел, у котрих кожна наступна цифра більше ніж попередня?

12. Скільки є чотиризначних чисел, у котрих кожна наступна цифра менше ніж попередня?

13. Чотири юнаки та три дівчини вирішили після закінчення школи стати на роботу у своєму місті. У місті є три заводи, котрі беруть на роботу чоловіків, 4 — де потрібні жінки, та 2 — де приймають на роботу й чоловіків, й жінок. Скількома способами ці сім випускників можуть розподілитися на роботу?

14. У розіграші чемпіонату країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна та бронзова медалі?

15. В турнірі грають n шахістів. Кожний учасник турніру грає зі всіма іншими учасниками по одні партії. Скільки партій буде зіграно в цьому турнірі?

16. У партії з 12 виробів 4 бракованих. Скількома способами можна вибрати 5 виробів, щоб серед них було 2 бракованих?

17. Скількома способами можна розсадити 4 осіб на 25 стільцях?

18. Скільки існує семизначних телефонних номерів, які відрізняються лише тим, що три останні цифри непарні та різні?

19. У танцювальному залі знаходяться 8 дівчат та 6 хлопців. Скільки можна скласти варіантів танцювальних пар дівчат з хлопцями?

20. Скількома способами можна розбити $m + n + s$ предметів на 3 групи так, щоб у одній групі було m предметів, у другій — n предметів, в третій — s предметів? $m, n, s \in \mathbb{N}$.

21. У поштовому відділенні продаються листівки 8 видів. Скільки існує варіантів покупки у ньому п'яти різних листівок?

22. Шестеро студентів здають екзамен. Скільки існує різних варіантів отримати позитивну екзаменаційну оцінку по п'ятибальній системі?

23. У кондитерській є п'ять різних сортів пирогів. Скількома способами можна вибрати набір з 4 пирогів.

24. Скількома способами можна наклеїти 3 види марок на 6 конвертів без марок?

25. Скільки тризначних чисел, які діляться на 3, можна записати цифрами 0,1,2,3,4,5, якщо кожне число не повинно мати однакових цифр?

26. Якщо повернути аркуш паперу на 180° , то цифри 0,1,8 можна вважати такими, що не змінюються, 6 і 9 переходять одна в одну, а інші цифри втрачають зміст. Скільки існує семицифрових чисел, величина яких не змінюється при повороті аркуша паперу на 180° ?

27. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,\dots,n\}$ так, щоб числа 1,2,3 стояли поруч у порядку зростання?

28. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,\dots,2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

29. На зборах має виступити 4 особи: A, B, C, D . Скількома способами їх можна записати в список ораторів, якщо B не може виступити раніше, ніж A ?

30. На першому курсі вивчають 10 предметів. У понеділок 4 пари, причому всі пари різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

31. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій — m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками, взятими на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник проведеними прямими?

32. Комісія складається з голови, двох його заступників і ще 4 осіб. Скількома способами члени комісії можуть розподілити між собою обов'язки?

33. Скільки є способів розподілити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала 5 предметів?

34. На книжковій полиці розміщено 10 томів. Скількома способами можна розставити їх так, щоб при цьому перший та другий томи не стояли поруч?

35. З 12 чоловік кожен день протягом 6 днів вибирають 2 чергових. Визначити кількість різних списків чергових, якщо кожна особа чергує лише один раз.

36. Скільки різних слів можна утворити перестановкою букв у слові: а) «математика»? б) «комбінаторика»?

37. З урни, яка містить 10 чорних та 6 білих куль, вибирають 2 чорні та 3 білі кулі. Скількома способами це можна зробити?

38. Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

39. Студентові треба за 8 днів скласти 4 іспити. Скількома способами це можна зробити?

40. Скільки існує перестановок з n елементів, серед яких між двома даними елементами стоїть r елементів?

41. Шість ящиків різних матеріалів доставляють на вісім поверхів будівництва. Скількома способами можна розподілити матеріали по поверхах? У скількох з них на восьмий поверх буде доставлено не менше двох матеріалів?

42. Ліфт, у якому перебуває 9 пасажирів, зупиняється на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три, чотири чоловіки. Скількома способами це можна зробити?

§ 2. Простір елементарних подій

Операції над множинами

У теорії ймовірностей розглядаються стохастичні експерименти, які можна повторити будь-яку кількість разів, але результати яких не можна напевне передбачити. З кожним стохастичним експериментом пов'язують простір елементарних подій Ω — сукупність різних можливих наслідків експерименту. Будь-яка підмножина A простору елементарних наслідків Ω називається випадковою подією. При цьому Ω — така подія, яка відбувається при будь-якому наслідку стохастичного експерименту. Будемо вважати, що сукупність усіх підмножин Ω які ми будемо вважати подіями, утворюють σ —алгебру.

Нехай $\Omega = \{\omega\}$ — простір елементарних подій ω , тобто сукупність усіх різних можливих подій пов'язаних з даним стохастичним експериментом. Події — це деякі підмножини множини усіх елементарних подій Ω , тому над подіями можна ввести такі самі операції, як і над множинами у теорії множин. Будемо говорити, що подія A сприяє появі події B ($A \subset B$), якщо з появою події A відбувається і подія B . Якщо подія A сприяє появі події B , а подія B сприяє появі події A , то події A та B називаються еквівалентними, або рівносильними ($A = B$).

Сумою двох подій A та B називається така подія C , яка відбувається тоді, коли відбуваються принаймні одна з двох подій A або B . У цьому разі пишуть $C = A \cup B$, або $C = A + B$.

Добутком двох подій A та B називається така подія C , яка відбувається тоді, коли відбуваються одночасно обидві події A та B разом. У цьому разі пишуть $C = A \cap B$, $C = A \cdot B$. Різницею подій A та B називається така подія C , яка відбувається тоді, коли відбувається подія A але не відбувається подія B . У цьому разі пишуть $C = A \setminus B$, або $C = A - B$.

Подією, протилежною до події A , називається подія $\bar{A}$, яка відбувається тоді, коли не відбувається подія A , та не відбувається тоді, коли відбувається подія A . Позначають $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Сукупність усіх елементів простору елементарних подій Ω називається вірогідною подією. Подія $\emptyset = \bar{\Omega}$ називається неможливою.

Приклад 2.1. Навмання вибирається ціле число з відрізка $[-6, 6]$. Розглянемо такі події:

A = «вибране число на більше ніж 4»;

B = «модуль цього числа не перевищує 2»;

C = «це число не менше ніж 3».

Що означають події: $A + B$, $A + C$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A - B$, $B - A$, $C - A$?

Розв'язання. Маємо

$$\Omega = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, C = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Легко зрозуміти, що

$$A + B = A, A + C = \Omega,$$

$$A \cdot B = B, A \cdot C = \{3, 4\}$$

$$A - B = \{-6, -5, -4, -3, 3, 4\}, B - A = \emptyset, C - A = \{5, 6\}.$$

Приклад 2.2. Довести, що для будь-яких подій A та B співвідношення $A \subset B$ та $A + B = B$ рівносильні.

Розв'язання. а) Нехай $A \subset B$. Тоді $\omega \in A + B \Rightarrow \omega \in A$ (отже $\omega \in B$) або $\omega \notin A$ та $\omega \in B$. Звідси випливає, що

$$\omega \in (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot B) = (A + \bar{A}) \cdot B = \Omega \cdot B = B.$$

Навпаки, якщо $\omega \in B$, то $\omega \in A + B$.

б) Нехай $A + B = B$. Тоді $\omega \in A \Rightarrow \omega \in A + B \Leftrightarrow \omega \in B$, тобто $A \subset B$.

Приклад 2.3. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають тричі. Побудувати простір елементарних подій. Описати підмножини, що відповідають таким подіям:

A = «герб випав рівно один раз»;

B = «число не випало ані разу»;

C = «гербів випало більше, ніж чисел»;

D = «герб випав принаймні 2 рази підряд».

Розв'язання. При кожному киданні монета може впасти догори гербом (г) або числом (ч). Тому при трьох киданнях простір Ω складається з таких елементарних подій; ггг, ггч, гчг, чгг, гчч, чгч, ччг, ччч. Тоді

$$A = \{ччг, чгч, гчч\};$$

$$B = \{ггг\};$$

$$C = \{ггг, ггч, гчг, чгг\};$$

$$D = \{ггг, ггч, чгг\}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

43. Гральну кість підкидають 2 рази. Описати простір елементарних подій. Описати події:

A = «сума очок, що випали, дорівнює 6»;

B = «не менше, ніж один раз, з'явиться 3».

44. Підкидають гральну кість, а потім підкидають монету. Описати простір елементарних подій.

45. Кидають монету і фіксують, чи випав герб; кидання триває доти, доки герб не випаде двічі. Описати простір елементарних подій.

46. Монету підкидають до того часу, поки не з'явиться герб. Описати простір елементарних подій. Описати події:

A = «герб випадає раніше четвертого разу»,
 B = «герб випадає не пізніше четвертого разу»,
 C = «герб випадає при непарному числі підкидуваний».

47. Нехай експеримент полягає в тому, що вимірюють дві величини ξ, η , котрі приймають будь-які значення відрізка $[0,1]$. Описати простір елементарних подій. Описати події:

A = «різниця між значеннями ξ і η не більш за 0,5»,
 B = «довжина вектору (ξ, η) не менша, ніж 0,25».

48. Експеримент полягає у тому, що гральну кість підкидають доти, поки не з'явиться 6 очок. Описати простір елементарних подій. Скільки елементарних подій містить в собі подія A = «експеримент закінчиться до п'ятого кидка»?

49. З ящика, що містить 10 деталей, з яких 3 браковані, навмання послідовно та без повернення витягають по одній деталі до появи бракованої, після чого експеримент припиняють. Нехай ω_i = «бракована деталь з'явиться при i -му випробуванні». Розглянемо подію A = «доведеться проводити третє за рахунком витягання».

а) Сконструювати елементарні події за допомогою алгебраїчних операцій над ω_i , $i = 1, 2, \dots$

б) Записати подію A за допомогою елементарних подій а також спростити запис, провівши алгебраїчні перетворення.

50. Два баскетболісти по черзі кидають м'яч у корзину до першого влучення. Виграє той, хто першим кине м'яч. Першим кидає перший баскетболіст. Нехай A_k = «перший баскетболіст влучає в результаті свого k -го кидка», B_k = «другий баскетболіст влучає в результаті свого k -го кидка». Описати простір елементарних подій. Записати такі події:

A = «виграє перший баскетболіст»,
 B = «виграє другий баскетболіст».

51. Нехай A, B, C - події. Довести співвідношення:

а) $A \cdot B = B \setminus (B \setminus A) = A \setminus (A \setminus B)$;

б) $(A \setminus B) \cdot C = (A \cdot C) \setminus (B \cdot C)$;

в) $(A \cdot B) \setminus C = (A \cdot C) \setminus (B \cdot C)$;

г) $(A + B) \setminus B = A \setminus (A \cdot B) = A \cdot \bar{B}$;

д) $A + B = (A \setminus (A \cdot B)) + B$;

є) $(A + B) \setminus (A \cdot B) = (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$;

ж) $A \setminus (B \cdot C) = (A \setminus B) + (A \setminus C)$;

з) $A \setminus (B + C) = (A \setminus B) \setminus C$.

52. Спростити вирази:

а) $(B + C) \cdot (B + \bar{C}) \cdot (\bar{B} + C) \cdot (\bar{B} + \bar{C})$;

- б) $((A \cdot B) + A) \cdot ((B \cdot C) + B) + (A \cdot C) + A$;
 в) $(A + B) \cdot (B + C)$.

53. Суму двох подій $A + B$ можна виразити як суму двох несумісних подій $A + B = (A \setminus (A \cdot B)) + B$. Зобразити аналогічним способом суму трьох подій.

54. Довести, що подія $((A + B) \cdot (A + \bar{B})) + ((\bar{A} + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}))$ є вірогідною.

55. Чи є рівносильними події A та B , якщо

- а) $\bar{A} = \bar{B}$;
 б) $A + C = B + C$, C - деяка подія;
 в) $A \cdot C = B \cdot C$, C - деяка подія;
 г) $A \cdot (A + B) = B \cdot (A + B)$;
 д) $A \cdot (A \setminus B) = B \cdot (B \setminus A)$.

56. Нехай A, B, C - довільні події. Знайти вирази для подій, полягаючих у тому, що

- а) здійснилась тільки подія A ;
 б) здійснилися тільки A і B ;
 в) здійснилися усі три події;
 г) здійснилася не менше ніж одна подія;
 д) здійснилися не менше ніж дві події;
 е) здійснилася одна й тільки одна подія;
 ж) здійснилися дві й тільки дві події;
 з) ніяка подія не здійснилася;
 і) здійснилися не більше ніж дві події.

57. Розглянемо такі події:

- а) A = «поява герба при двох підкиданнях монети»,
 б) B = «три влучення при трьох пострілах»,
 в) C = «не менше ніж одне влучення при трьох пострілах»,
 г) Вказати події, протилежні до подій A, B, C .

58. З множини подружніх пар береться наздогад одна пара. Вводимо такі події:

- A = «чоловіку більше 30 років»,
 B = «чоловік старший за жінку»,
 C = «жінці більше за 30 років».

З'ясувати зміст подій $A \cdot B \cdot C$, $A \setminus (A \cdot B)$, $A \cdot \bar{B} \cdot C$. Перевірити, $A \cdot \bar{C} \subset B$.

59. Нехай A та B - підмножини площини $\Omega = \mathbb{R}^2$, що визначаються так: $A = \{(x, y): x + y \leq 1\}$, $B = \{(x, y): y \leq 2x + 2\}$. Зобразити події: $A \cdot B$, $A + B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$.

60. Двоє грають у шахи. Розглянемо події: A = «виграв перший гравець», B = «виграв другий гравець». Що означають події: а) $\bar{A} \cdot \bar{A}$; б) $\bar{B} \setminus A$; в) $\bar{A} \setminus B$?

61. З урни, яка містить чорні та білі кулі, добуто n куль. Введемо подію $A_i: A_i$ = « i -та куля біла», $i = 1, \dots, n$. Виразити через A_i такі події: а) усі кулі

білі; б) хоч би одна куля біла; в) рівно одна куля біла; г) не більше ніж k куль білі ($1 \leq k \leq n$); д) хоч би k куль білі; є) рівно k куль білі; ж) всі n куль одного кольору.

62. Мішень складається з десяти кругів, що обмежені концентричними колами з радіусами $R_1 < R_2 < \dots < R_{10}$. Нехай $A_k =$ «влучення в круг з радіусом R_k », $k = \overline{1,10}$. Що означають події $B = A_1 + A_3 + A_6$; $C = A_2 \cdot A_4 \cdot A_6 \cdot A_8$; $D = (A_1 + A_2) \cdot A_6$; $G = \bigcup_{k=1}^5 A_k$; $F = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$?

63. Судно має кермо, 4 котли та 2 турбіни. Подія A полягає в тому, що кермо працює (не вийшло з ладу); подія $B_k, k = \overline{1,4}$, — працює k -й котел; подія $C_j, j = \overline{1,2}$ - працює j -та турбіна. Подія D полягає в тому, що судном можна керувати, а це можливо, коли працює кермо, принаймні один котел та одна турбіна. Виразити подію D через події A, B_k, C_j .

§ 3. Класичне означення ймовірності

Простір елементарних подій Ω називається дискретним, якщо множина Ω скінченна або зліченна. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ дискретний. Припустимо, що кожній елементарній події ω_k можна поставити у відповідність невід'ємне число p_k (ймовірність ω_k), причому $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Якщо A — випадкова подія ($A \subset \Omega$), то число

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k, \text{ де } P(A)$$

називається ймовірністю події A .

Мають місце властивості:

- а) $P(A) \geq 0$;
- б) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, якщо події A і B несумісні;
- в) $P(\Omega) = 1$.

Нехай простір Ω складається з n елементарних рівноможливих подій $\left(p_k = \frac{1}{n}, k = \overline{1, n}\right)$, а до складу A входять m з цих подій. Тоді ймовірністю події можна обчислити за формуло

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ця формула і є класичним означення ймовірності.

Алгоритм розв'язування задач на обчислення ймовірностей подій наступний: з'ясувати, в чому полягає стохастичне випробування, результат випробу-

вання (елементарна подія), встановити простір елементарних подій Ω ; перевірити виконання трьох умов класичного означення: скінченність Ω , рівноможливість та несумісність елементарних подій; знайти n - кількість всіх можливих результатів випробування; з'ясувати m - кількість результатів випробування, що сприяють появі досліджуваної A ; для розрахунку ймовірності події A застосувати формулу

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

При невеликих n всі результати можна перерахувати безпосередньо і серед них неважко вказати ті, що сприяють появі події A . Проте в більшості задачах це не вдається зробити і доводиться застосовувати правила і формули комбінаторики.

Приклад 3.1. В магазин поступило 30 кольорових телевізорів, серед яких у 5 приховані дефекти. Знайти ймовірність того, що взятий наугад для перевірки телевізор не має прихованих дефектів.

Розв'язування. Експеримент полягає у випадковому виборі одного телевізора з 30, а елементарною подією (спостережуваним результатом експерименту) є вибраний телевізор. Тоді кількість всіх елементарних подій рівна 30, тобто $n = 30$. Подія A - наугад взятий для перевірки телевізор не має прихованих дефектів, рівна 25, тобто $m = 25$. Тоді $P(A) = \frac{5}{6}$.

Приклад 3.2. Підкидають дві гральні кісті. Знайти ймовірності наступних подій:

- A = «числа очок на обох костях співпадають»;
- B = «число очок на першій кості більше, ніж на другій»;
- C = «сума очок парна»;
- D = «сума очок більше двох»;
- E = «сума очок не менше п'яти»;
- F = «хоча б на одній кості з'явиться цифра 5»;
- G = «добуток чисел очок, що випали, дорівнює 6».

Розв'язування. Експеримент полягає в одинарному підкиданні двох гральних костей одночасно. Елементарна подія – пара чисел, що випали на верхніх гранях обох костей. Число n всіх елементарних подій дорівнює $6 \cdot 6 = 36$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A . Тоді

$m_A = 6$ і $P(A) = \frac{1}{6}$. Нехай m_B - кількість елементарних подій, що сприяють

появі події B . Якщо на першій кості випаде число два, то сприятливий результат на другій кості один; якщо на першій кості випаде число три, то сприятливих результатів два, і т.д. Тоді, застосовуючи правило суми, отримаємо, що

$m_B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ і $P(B) = \frac{5}{12}$. Пропонуємо ймовірності наступних

подій обчислити самостійно. Наведемо лише відповіді:

$$P(C) = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{35}{36}, P(E) = \frac{1}{6}, P(F) = \frac{11}{36}, P(G) = \frac{1}{9}.$$

Приклад 3.3. З партії, що містить 10 деталей, серед яких 3 бракованих, наугад витягують 3 деталі для контролю. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «в отриманій вибірці один виріб бракований»;

B = «в отриманій вибірці немає жодного бракованого виробу»;

C = «в отриманій вибірці хоча б один виріб бракований»;

Розв'язування. Елементарною подією є будь-який набір з 3 деталей із 10.

Тоді кількість всіх елементарних подій $C_{10}^3 = 120$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A . В цьому випадку в кожному наборі повинно бути один бракований виріб і два не бракованих виробу. Браковані вироби можна вибрати трьома способами, два не бракованих з 7 можна вибрати $C_7^2 = 21$ способом. За правилом множення $m_A = 3 \cdot 21 = 63$, тоді

$P(A) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$. Нехай m_B - кількість елементарних виробів, що сприяють появі події B . В цьому випадку в кожному наборі всі вироби повинні бути не бракованими. Три не бракованих виробу з семи можна вибрати $C_7^3 = 35$ спо-

собами, тобто $m_B = 35$. Тоді $P(B) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$. Нехай m_C - кількість елемен-

тарних подій, що сприяють появі події C . В цьому випадку в кожному наборі повинні бути або один, або два, або три вироби браковані. В першому випадку кількість наборів рівна $m_A = 63$, в другому - $m_B = 21$, так як два бракованих виробу можна вибрати $C_3^2 = 3$ способами, а одне не браковане – 7 способами.

В третьому випадку $m_C = m_A + m_B + 1 = 63 + 21 + 1 = 85$, оскільки три бракованих виробу можна вибрати одним способом. Отже, $P(C) = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$.

Приклад 3.4. Серед кандидатів у студентську раду факультету 3 першокурсника, 5 другокурсників і 7 третьокурсників. Наугад вибирають 5 чоловік на конференцію. Знайти ймовірність наступних подій:

A = «будуть вибрані одні третьокурсники»;

B = «всі першокурсники попадуть на конференцію»;

C = «не буде вибрано ні одного другокурсника».

Розв'язування. Елементарною подією є будь-який набір 5 студентів з 15.

Тоді кількість всіх елементарних подій рівна $C_{15}^5 = 3003$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A . В цьому випадку

$m_A = C_7^5 = 21$, тоді $P(A) = \frac{21}{3003} = \frac{1}{143}$. Нехай m_B - кількість елементарних

виробів, що сприяють появі події B . В цьому випадку у кожному наборі з 5 студентів повинні бути всі три першокурсника і будь-які два студента другого

або третього курсу. Кількість таких наборів рівна $1 \cdot C_{12}^2 = 66$, тоді $m_B = 66$ і

$P(B) = \frac{66}{3003} = \frac{2}{91}$. Нехай m_C - кількість елементарних подій, що сприяють

появі події C . В цьому випадку в кожному наборі повинні бути відсутніми

другокурсники. Студентів першого і другого курсів 10 чоловік, отже,
 $m_C = C_{10}^5 = 252$, тоді $P(C) = \frac{252}{3003} = \frac{12}{143}$.

Приклад 3.5. Із колоді в 52 карти витягують наугад 4 карти. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «в отриманій вибірці всі карти бубнової масті»;

B = «в отриманій вибірці опиниться хоча б один туз»;

C = «в отриманій вибірці всі карти однієї масті».

Розв'язування. Елементарною подією є будь-який набір 4 карт із 52. Тоді число всіх елементарних подій $C_{52}^4 = 270725$. Нехай m_A - кількість елементарних подій, що сприяють появі події A . В цьому випадку $m_A = C_{13}^4 = 715$,

тоді $P(A) = \frac{715}{270725} = 0,00264$. Нехай m_B - кількість елементарних подій,

що сприяють появі події B . В цьому випадку в кожному наборі повинні бути або один, або два, або три, або чотири тузи. У першому випадку кількість елементарних подій за правилом множення дорівнює $4 \cdot C_{48}^3 = 69184$, в другому випадку $C_4^2 \cdot C_{48}^2 = 6768$, в третьому випадку $C_4^3 \cdot C_{48}^1 = 192$, в четвертому - 1.

Отже, $m_B = 69184 + 6768 + 192 + 1 = 76145$ і $P(B) = \frac{76145}{270725} = 0,2813$. Не-

хай m_C - кількість елементарних подій, що сприяють появі події C . В цьому випадку в кожному наборі повинні бути карти тільки однієї із чотирьох мастей,

тоді $m_C = 4 \cdot C_{13}^4 = 2860$. Отже, $P(C) = \frac{2860}{270725} = 0,01056$.

Приклад 3.6. Готуючись до доповіді, студент виписав із книги цитату, але, забувши номер сторінки, на якій вона знаходиться, написав номер наугад. Яка ймовірність того, що студент записав потрібний номер, якщо він пам'ятає, що номер виражається двозначним числом з різними цифрами?

Розв'язування. Введемо позначення події: A - студент записав потрібний номер. Знайдемо ймовірність. Кількість всіх можливих результатів випробування n знайдемо, скориставшись формулами комбінаторики. Всього є 10 цифр, кожний номер містить 2 цифри і порядок цифр суттєвий при утворенні двозначних чисел, отже, потрібно знайти кількість розміщень із 10 по 2: $A_{10}^2 = 90$. Із загальної кількості розміщень потрібно виключити ті 9 розміщень,

котрі починаються з цифри 0, а саме: 01, 02, ..., 09. Таким чином,
 $n = A_{10}^2 - 9 = 90 - 9 = 81$.

Кількість результатів випробування, що сприяють появі події A , дорівнює $m = 1$, оскільки цитата знаходиться на одній певній сторінці. Отже,

$$P(A) = \frac{1}{81}.$$

Приклад 3.7. Знайти ймовірність того, що в 8-значному числі рівно 4 цифри співпадають, а інші різні.

Розв'язування. Елементарною подією є 8-значне число. Кількість всіх можливих способів скласти 8-значне число із 10 цифр $n = 10^8$. Досліджувана подія A - «у 8-значному числі рівно 4 цифри співпадають», тобто в числі 5 різних цифр, одна із яких повторюється – кількість способів її вибору – будь-яка із 10 цифр, і ця цифра займає будь-які 4 місця в числі – кількість способів C_8^4 . 4 місця, що залишилися, займають різні цифри із 9 невикористаних, і оскільки число залежить від порядку розміщення цифр, то кількість способів вибору чотирьох цифр A_9^4 . Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі події A рівна $m = 10 \cdot C_8^4 \cdot A_9^4$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{10 \cdot C_8^4 \cdot A_9^4}{10^8} = 0,021168.$$

Приклад 3.8. n студентів, в тому числі A та B , розташовуються в ряд у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що між A та B будуть стояти рівно r студентів.

Розв'язування. Загальна кількість випадків дорівнює кількості перестановок із n елементів, тобто $n!$. Кількість сприятливих випадків знаходиться наступним чином. Якщо A та B займають фіксовані місця, які знаходяться на відстані r одне від одного, то інші $n - 2$ можуть займати місця, що залишилися $(n - 2)!$ різними способами (кількість перестановок із $n - 2$). Розглянемо, як можна розмістити A та B на відстані r , якщо A знаходиться, наприклад, зліва від B . Це можна зробити наступним чином:

A займає 1-е місце. B займає $(r + 2)$ -е місце;

A займає 2-е місце. B займає $(r + 3)$ -е місце;

.....;

A займає $(n - r - 1)$ -е місце. B займає n -е місце;

Крім того, можна переставити місцями A та B . Таким чином, всього $2(n - r - 1)$ можна розмістити A та B . Кожному способу розміщення A та B відповідає $(n - 2)!$ способів розміщення інших $n - 2$ студентів. Отже, всього є $2(n - r - 1) \cdot (n - 2)!$ сприятливих випадків. Шукана ймовірність дорівнює:

$$\frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

Приклад 3.9. Знайти ймовірність того, що серед трьох вибраних навмання цифр зустрінуться 2, 1, 0 повторів.

Розв’язування. Три вибрані навмання цифри утворюють одну із наступних трійок: 000, 001, 002, ..., 999. Таких трійок всього $10^3 = 1000$ (розміщення з повторами із 10 елементів по 3). Серед цих трійок є рівно 10 вигляду XXX (з двома повторами). Тому ймовірність двох повторів дорівнює:

$$P_2 = \frac{10}{10^3} = 0,01.$$

Кількість трійок вигляду XXY , XYX , YXX дорівнює $10 \cdot 9 \cdot 3$ (10 – кількість способів вибрати X , 9 – кількість способів вибрати Y , 3 – кількість різних трійок з одними і тими ж цифрами X та Y), тому ймовірність одного повтору дорівнює

$$P_1 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 3}{10^3} = 0,27.$$

Кількість трійок вигляду XYZ дорівнює $10 \cdot 9 \cdot 8$, тому ймовірність не мати жодного повтору рівна

$$P_1 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = 0,72.$$

Приклад 3.10. У кладочці знаходиться n пар черевиків. Із них навмання вибирають $2r$ черевиків ($2r < n$). Яка ймовірність того, що серед вибраних черевиків відсутні парні?

Розв’язування. Із $2n$ черевиків можна вибрати $2r$ черевиків C_{2n}^{2r} способами. Кількість сприятливих випадків рівна $C_n^{2r} \cdot 2^{2r}$. Підраховується вона наступним чином: C_n^{2r} способами із n пар черевиків можна вибрати $2r$ пар. Із кожної пари двома способами можна вибрати один черевик (лівий або правий). Отже, із $2r$ пар черевиків можна вибрати $2r$ непарних 2^{2r} способами. Шукає ймовірність рівна

$$P = \frac{C_n^{2r} \cdot 2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

Задачі для розв’язування

64. Гральний кубик підкидають один раз. Описати простір елементарних подій. а) Описати подію A — випаде число, що ділиться на 3. Знайти ймовірність події A , вважаючи, що всі елементарні події рівноможливі;

б) нехай підкидають гральний кубик, у якому масу розподілено так, що ймовірність випадання певної грані пропорційна її номеру. Описати простір елементарних подій, вказати ймовірність кожної елементарної події. Обчислити ймовірність події A .

65. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 спочатку вибирають одну; потім з чотирьох цифр, які залишились, вибирають другу. Описати простір елементарних подій. Вважаючи, що всі елементарні події однаково можливі, обчислити ймовірність таких подій: а) перший раз вибрано непарну цифру; б) другий раз вибрано непарну цифру; в) і перший, і другий раз вибрано непарну цифру.

66. У групі r студентів. Яка ймовірність того, що принаймні у двох із них збігаються дні народження?

67. Гральний кубик підкидають шість разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть усі шість граней.

68. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на 10-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажери не вийдуть на одному поверсі?

Визначити, що більш імовірно: при підкиданні чотирьох гральних кубиків випадання принаймні однієї одиниці чи при 24 підкиданнях двох кубиків випадання принаймні один раз двох одиниць. (Відповідь відома як «парадокс де Мере». Придворний кавалер і азартний гравець Шевальє де Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав ці ймовірності рівними і звинувачував математиків у своїх програхах).

69. У групі r студентів. Обчислити ймовірність того, що принаймні двоє з них народилися в одному місяці.

70. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадатимуть на різні місяці року.

71. Обчислити ймовірність того, що для даних тридцяти осіб з 12 місяців року на 6 місяців припадає по два дні народження і на інші 6 — по 3 дні народження.

72. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. З урни навмання виймається одна куля. Яка ймовірність того, що ця куля: а) біла? б) чорна?

73. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. Яка ймовірність того, що витягнуті навмання 2 кулі будуть: а) чорні? б) білі?

74. A та B і ще 8 осіб стоять у черзі. Яка ймовірність того, що A та B віддалені один від одного 3 особами?

75. З урни, в якій лежать n білих та m чорних куль, взяли навмання k куль. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль буде r білих куль ($r \leq n$)?

76. Серед n виробів m бракованих. Навмання беруть k виробів. Яка ймовірність того, що серед них r бракованих виробів ($r \leq n$)? Яка ймовірність того, що серед них не більше ніж r бракованих виробів?

77. У лотереї є n білетів, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів.

78. На іспиті може бути запропоновано n запитань. Студент знає відповіді на k запитань. Екзаменатор задає студентові r запитань, а для того щоб склас-

ти екзамен, треба відповісти не менше, ніж на j запитань ($j < r$). Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

79. Учасник «Національної лотереї» з 39 чисел повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто правильно назве всі шість. Виграші також одержують і ті, хто вгадає не менше трьох чисел. Обчислити ймовірність повного виграшу. Обчислити ймовірність того, що учасник відгадає 5, 4 і 3 числа. Яка ймовірність одержати виграш у лотереї?

80. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд розбивають на дві підгрупи по n команд кожна. Яка ймовірність того, що дві найбільш сильні команди виявляться: а) в різних підгрупах? б) в одній підгрупі? Яка ймовірність того, що чотири найбільш сильні команди потраплять по дві в різні підгрупи?

81. Кидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел 1, 2, ..., 6 випаде двічі?

82. До ліфта семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли 3 особи. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність таких подій: A = «всі пасажери вийдуть на 4 поверсі», B = «всі пасажери вийдуть одночасно (на одному поверсі)», C = «всі пасажери вийдуть на різних поверхах».

83. У три вагони заходять дев'ять пасажирів. Яка ймовірність того, що: а) в перший вагон зайдуть три пасажери? б) в кожен вагон зайдуть по три пасажери? в) в один з вагонів зайдуть чотири, в другий – три і в третій – два пасажери?

84. У шафі стоять 10 пар різноманітного взуття. З них навмання обирається 4 чоботи. Знайти ймовірність того, що серед вибраних чобіт немає парних.

85. 500 фірм отримали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сума кредиту і термін кредиту (в місяцях). Відповідну класифікацію наведено в таблиці.

86.

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	< 2000\$	2000—4999\$	5000—7999\$	> 8000\$
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

Для перевірки навмання вибирається одна фірма.

а) Яка ймовірність того, що сума кредиту цієї фірми не менша 5000\$?

б) Яка ймовірність того, що термін кредиту фірми більший двох років?

в) Яка ймовірність того, що фірма взяла кредит на суму, не меншу 2000\$ на 42 місяці?

87. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Суми вкладу		
	< 1000\$	1000—5000 \$	> 5000\$
< 30 років	5%	15%	8%
30—50 років	8%	25%	20%
> 50 років	7%	10%	2%

Нехай A та B такі події:

A = «у навання вибраного клієнта вклад більший 5000\$»;

B = «вік навання вибраного клієнта більший 30 років».

Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

88. У супермаркеті, аналізуючи 10000 покупок за типом товарів і типом розрахунків (готівка чи кредитна картка), виявлено такий процентний розподіл:

Тип розрахунків	Тип товару			
	Жіночий одяг	Чоловічий одяг	Спортивні товари	Господарчі товари
Каса	6%	9%	3%	7%
Кредитна картка	41%	9%	22%	3%

Нехай A , B , C , D такі події:

A = «навання вибраний рахунок сплачений кредитною картою»;

B = «навання вибраний рахунок за жіночий одяг»;

C = «навання вибраний рахунок за чоловічий одяг»;

D = «навання вибраний рахунок за спортивні товари»;

Обчислити $P(A)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap D)$, $P(A \cup C)$.

89. Під час набирання телефонного номеру абонент забув дві останні цифри і набрав їх навання, пам'ятаючи при цьому, що вони не парні та різні. Знайти ймовірність того, що номер набрано вірно.

Є r куль, котрі навання розкидані по n ящиках. В одному і тому ж ящику можуть знаходитись декілька куль та навіть усі кулі. Обчислити ймовірність того, що в перший ящик рівно r_1 , в другий - r_2 куль, ..., в n -й - r_n куль, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

90. Числа 1, 2, ..., 9 записано навання. Знайти ймовірність наступних подій:

A = «числа записані у зростаючому порядку»;

B = «числа 1 і 2 стоять поруч та у зростаючому порядку»;

C = «числа 3, 6, 9 будуть іти одне за другим і у зростаючому порядку»;

D = «на парних місцях записані парні числа»;

F = «сума кожних двох чисел, що стоять на однаковій відстані від кінців, дорівнює 10».

91. У кладочці знаходиться n пар черевиків. З них навмання беруть $2r$ $n > r$ черевиків. Знайти ймовірність того, що серед вибраних черевиків: а) є рівно одна комплектна пара; б) є рівно дві комплектні пари.

92. Серед 17 студентів групи, із яких 8 дівчат, розігрується 7 лотерейних квитків. Знайти ймовірність того, що серед володарів квитків будуть дівчата.

93. Із урни, в якій знаходяться 3 білих та 2 чорних кулі, переклали 2 кулі в другу урну, що містить 4 білих та 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що в другій урні опиняться білих і чорних куль порівну.

94. В урні 4 червоних, 6 зелених і 5 синіх куль. Одночасно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного (будь-якого) кольору.

95. Студент знає відповіді на 20 питань із 25. Залік вражається зарахованим, якщо він відповість правильно не менше ніж на 3 питання із 4 в білеті. Яка ймовірність того, що студент отримає залік, якщо, подивившись на перше питання білета, він виявив, що його знає.

96. 10 футбольних команд, серед яких два призери й один аутсайдер за результатами попереднього чемпіонату, шляхом жеребкування розбиваються на дві підгрупи по 5 команд. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «команди-призери попадуть у різні групи»;

B = «обидва призери й аутсайдер попадуть у різні групи»;

C = «обидва призери й аутсайдер попадуть в одну групу».

97. Серед 20 лотерейних квитків 15 виграшних. Знайти ймовірності наступних подій:

A = «серед 10 проданих білетів 6 виграшних»;

B = «серед 12 проданих білетів всі виграшні»;

C = «серед 8 проданих білетів хоча б один не виграшний».

98. 10 варіантів контрольної роботи роздаються випадковим чином 8 студентам, які сидять в ряд, по одному варіанту кожному. Знайти ймовірність подій:

A = «варіанти 1 і 2 залишаться невикористаними»;

B = «варіанти 1 і 2 дістануться студентам, що сидять поряд».

99. Десять різних книг розставлені на полиці навмання. Знайти ймовірність того, що цьому три певні книги будуть поставлені разом.

100. Група із 8 чоловік займає місця за круглим столом у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що певні дві особи опиняться поруч.

У студентській групі 25 чоловік. Серед них 20 – старші 19 років і 8 старші 22 років. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний із групи студент старший 19 років, але не старший 22 років.

101. Група із 8 чоловік займає місця з однієї сторони прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що певні дві особи опиняться поруч при умові:

а) кількість місць 8 (подія A);

б) кількість місць 12 (подія B).