

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

І.Г. Ткаченко, О.В. Кудін, С.М. Гребенюк, А.Г. Кривохата

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Курс лекцій
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2019

УДК:004.94:519.8:517.91(075.8)
М744

Ткаченко І.Г., Кудін О.В., Гребенюк С.М., Кривохата А.Г. Моделювання динамічних систем : курс лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Комп'ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки». Запоріжжя : ЗНУ, 2019. 65 с.

У навчальному виданні викладено теоретичні основи математичного моделювання динамічних систем. При розробці моделей використано математичний апарат звичайних диференціальних рівнянь. У виданні розглянуто основні поняття стійкості рівноваги та руху, надано постановку задачі стійкості за Ляпуновим, вивід диференціальних рівнянь збуреного руху. Також розглянуто елементи теорії матриць, критерії стійкості Рауса, Гурвиця, Л'єнара-Шипара. Представлено деякі алгоритми побудови фазового портрету. аналізу стійкості лінійних автономних динамічних систем другого порядку.

Для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Комп'ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки». Може бути корисним для науковців та інженерів.

Рецензент

М.І. Клименко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск

А.О. Лісняк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри програмної інженерії

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ ТА РУХУ.	
СТІЙКІСТЬ ЗА О.М. ЛЯПУНОВИМ	5
1.1 Вступ. Основні поняття й означення.....	5
1.2 Загальна постановка задачі стійкості за Ляпуновим	7
1.3 Геометрична інтерпретація стійкості за Ляпуновим	9
2 ФАЗОВІ ТРАЄКТОРІЇ ТА ФАЗОВІ ПРОСТОРИ	
АВТОНОМНИХ СИСТЕМ	12
2.1 Теорема про властивості фазових траєкторій	12
2.2 Геометрична інтерпретація фазових траєкторій	13
2.3 Види фазових траєкторій.....	14
3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ	17
3.1 Вхідні положення	17
3.2 Виведення диференціальних рівнянь збуреного руху (загальний випадок). 17	
3.3 Рівняння збуреного руху систем другого порядку	18
4 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ	21
4.1 Зведення матриць до діагонального вигляду	21
4.2 Симетричні матриці та їх властивості.....	27
4.3 Зведення квадратичних форм до канонічного вигляду.....	28
5 ТИПИ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ	30
5.1 Зведення системи рівнянь до канонічного вигляду.....	31
5.2 Характеристичні числа та фазові портрети.....	32
6 УМОВИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ	
ТА СИСТЕМ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ	44
6.1 Алгебраїчні критерії стійкості	47
6.1.1 Критерій стійкості Рауса.....	48
6.1.2 Критерій стійкості Гурвиця	49
6.1.3 Критерій стійкості Л'єнара-Шипара.....	50
6.2 Частотні критерії стійкості. Принцип аргументу	51
6.2.1 Частотний критерій стійкості Михайлова.....	54
6.2.2 Криві Михайлова для стійких та нестійких систем	55
6.2.3 Наслідок з критерію стійкості Михайлова.....	57
6.3 Алгоритм побудови фазового портрета та аналізу стійкості лінійних автономних динамічних систем другого порядку	59
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	64

ВСТУП

Курс «Моделювання динамічних систем» входить до циклу дисциплін професійної підготовки магістрів спеціальності «Комп'ютерні науки». Цей курс охоплює дослідження міждисциплінарного характеру, що знаходяться на стику диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, лінійної алгебри, методів оптимізації та дослідження операцій, які орієнтовано на розробку та дослідження математичних моделей складних динамічних систем, необхідних для розв'язування практичних завдань забезпечення ефективного функціонування технічних, фінансово-економічних, соціально-екологічних та інших динамічних процесів і керованих систем.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Моделювання динамічних систем» є опанування студентами методів побудови математичних моделей об'єктів і процесів, методів аналізу їх динаміки; формування теоретичних знань та практичних навичок аналізу руху динамічних систем (автономних чи неавтономних) на стійкість.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Моделювання динамічних систем» є засвоєння студентами основних понять та формування навичок аналізу динамічних систем на основі сучасних методів теорії стійкості, застосування систем комп'ютерної алгебри для аналізу вказаних об'єктів на стійкість.

За результатами вивчення дисципліни студент повинен:

знати: постановку питання про стійкість за О.М. Ляпуновим та його геометричну інтерпретацію; основні означення та теореми про фазові траєкторії; типи стійкості точок рівноваги та відповідні їм фазові портрети системи; теорему про лінеаризацію; основні визначення та теореми про граничні цикли; теореми для нелінійних динамічних систем; ознайомитися з сучасними комп'ютерними технологіями, які застосовуються при зборі, зберіганні, обробці, аналізі та передачі інформації;

вміти: визначати характеристичні числа, власні вектори матриці, що відповідає заданій системі диференціальних рівнянь, записувати відповідні їм матриці канонічної форми; якісно будувати фазові портрети на основі отриманих результатів; аналізувати стійкість систем за її першим наближенням; використовувати системи комп'ютерної алгебри для аналізу на стійкість.

Посібник є друкованим (доповненим та уточненим) варіантом лекцій, які читав доктор фізико-математичних наук, професор Тамуров Юрій Миколайович (1963-2015) на математичному факультеті ЗНУ.

1 СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ ТА РУХУ. СТІЙКІСТЬ ЗА О.М. ЛЯПУНОВИМ

Мета: вивчити поняття стійкості рівноваги руху, сформулювати постановку задачі стійкості за Ляпуновим, дослідити геометричну інтерпретацію стійкості за Ляпуновим.

1.1 Вступ. Основні поняття й означення

Для математичного опису деякого явища неминуче доводиться спрощувати та ідеалізувати це явище. При цьому потрібно виділити та враховувати найбільш суттєві з факторів, що впливають на нього; інші, найменш суттєві, фактори виключаються з розгляду. При цьому обов'язково виникає питання про те, чи вдало обрано спрощуючі припущення. Можливо, що невраховані фактори достатньо сильно впливають на явище, що вивчається, при цьому значним чином змінюючи кількісні, а можливо навіть й якісні, характеристики цього явища.

Розглянемо деяку фізичну систему S та будемо вважати, що її положення в деякий момент часу t повністю описується n функціями $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ (або більш скорочено $y_i(t), i = \overline{1; n}$). Аналітичним виразом цього явища (математичною моделлю) є система диференціальних рівнянь першого порядку наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t; y_1; y_2; \dots; y_n); \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t; y_1; y_2; \dots; y_n); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t; y_1; y_2; \dots; y_n) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = f_i(t; y_1; y_2; \dots; y_n), i = \overline{1; n} \end{cases} \quad (1.1)$$

з відповідними початковими умовами $y_i(t_0) = C_i, i = \overline{1; n}$, які зазвичай є результатами вимірювань, а тому отримані з деякою похибкою. Правомірно виникає питання: як впливає зміна початкових значень на шуканий розв'язок?

Може виявитися, що як завгодно малі зміни початкових умов сильно змінюють розв'язок, а тоді цей розв'язок, що визначається обраними неточними початковими умовами, не має жодного прикладного значення й навіть наближено не може описувати поведінку системи S . Тому виникає питання про знаходження умов, при яких достатньо малі зміни початкових значень викликають як завгодно малі зміни розв'язку. При цьому вважається, що час t неперервно змінюється та може приймати як завгодно великі значення. Відповіддю на поставлене питання займається *теорія стійкості*.

У найпростішому випадку поняття стійкості пов'язане зі здатністю деякої фізичної системи повертатися (з певною точністю) в стан рівноваги після зникнення зовнішнього фактору, що вивів її з цього стану. Якщо система

нестійка, то вона не повертається в початковий стан рівноваги, при цьому чи віддаляється від нього, чи здійснює навколо нього неприпустимо великі коливання. Спостереження показують, що деякі положення рівноваги системи стійкі до невеликих збурень, а інші принципово можливі положення рівноваги практично не можуть бути реалізовані.

У загальному випадку при розгляді фізичних систем вводяться поняття стійкості «в малому», «в великому», «в цілому».

Система називається **стійкою «в малому»**, якщо констатується лише факт наявності області стійкості, але не визначаються її границі.

Система називається **стійкою «в великому»**, якщо визначено межі області стійкості, тобто границі області початкових відхилень, при яких система повертається в початкове положення, та відомо, що реальні початкові відхилення системи належать цій області (не виходять за межі цієї області).

У випадку, коли система повертається в початкове положення при будь-яких початкових відхиленнях, система називається **стійкою «в цілому»** або **абсолютно стійкою**.

Наочно стійкість рівноваги представлена на рисунку 1.1.

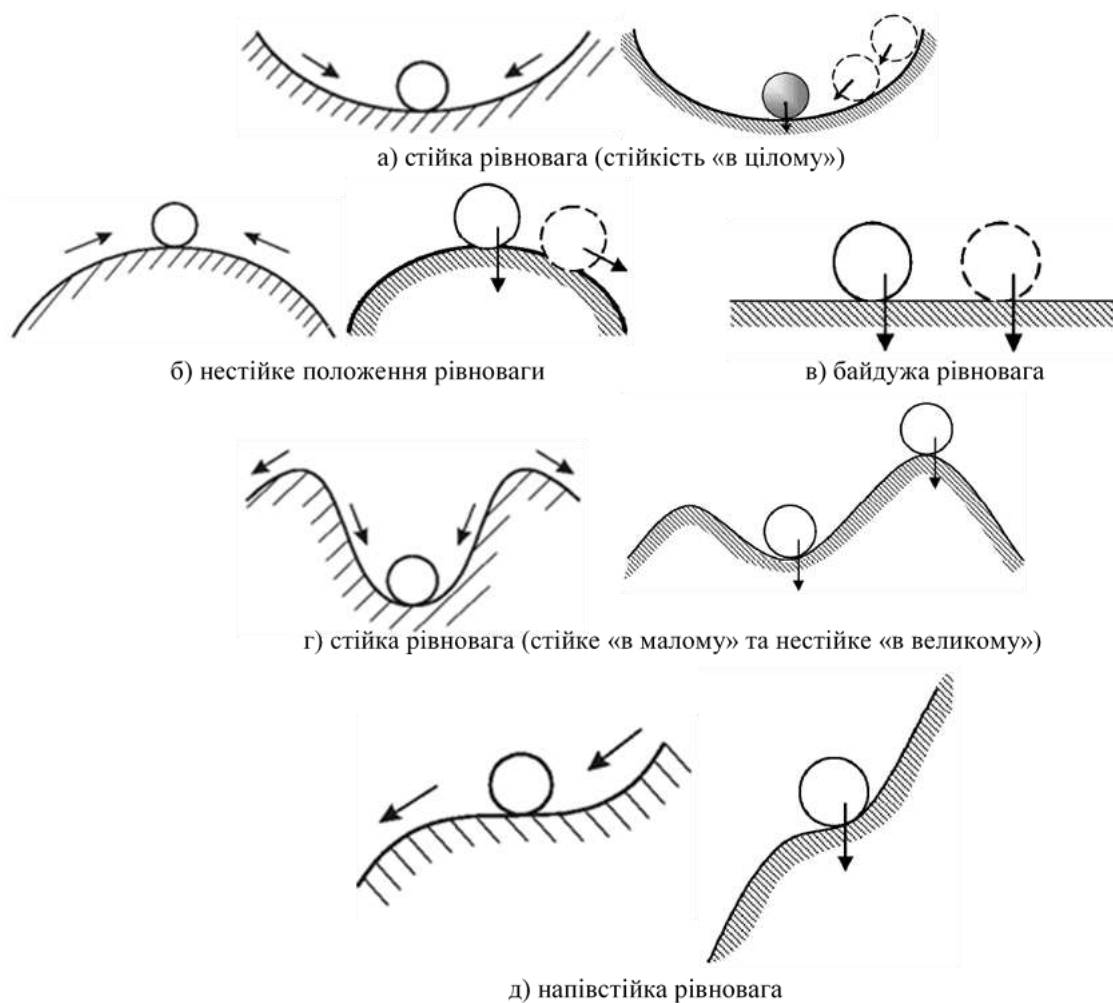


Рисунок 1.1 – Наочне зображення стійкості рівноваги

Зауваження 1.1 Якщо система абсолютно стійка, то вона стійка й «в великому», й «в малому». Система стійка «в великому» є стійкою «в малому». Якщо система лінійна, то система стійка «в малому» є стійкою й «в цілому». Якщо система нелінійна, то вид стійкості слід доводити окремо.

Система буде *стійкою*, якщо із збуреного стану вона перейде у деяку задану область навколо незбуреного стану рівноваги.

Поняття рівноваги можна розповсюдити й на більш загальний випадок, коли в якості незбуреного стану розглядається не положення рівноваги системи, а її рух деякою наперед заданою траєкторією.

Нехай заданий рух системи при відсутності збурень визначається деяким законом зміни незалежних координат $y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_n^*(t)$. За аналогією з випадком положення рівноваги, заданий рух називається *незбуреним рухом*. При впливі на систему зовнішніх факторів виникне відхилення реального руху від заданого. Реальний рух системи називається *збуреним рухом*.

Якщо реальний рух системи визначається незалежними координатами $y_i(t), i = \overline{1; n}$, то в загальному випадку

$$y_i(t) \neq y_i^*(t), i = \overline{1; n}.$$

Твердження 1.1 Заданий незбурений рух буде стійким, якщо після прикладення зовнішніх сил (збурень, навантажень), які потім знімаються, збурений рух через деякий час «зайде» в задану область простору

$$\left| y_i(t) - y_i^*(t) \right| \leq \varepsilon_i, i = \overline{1; n},$$

де $\varepsilon_i > 0$ – задані величини.

1.2 Загальна постановка задачі стійкості за Ляпуновим

Уперше строге визначення стійкості було наведено російським математиком та механіком, академіком Петербурзької академії наук, членом-кореспондентом Паризької академії наук, членом Національної академії наук деї Лінчеї (Accademia Nazionale dei Lincei, Італія) Олександром Михайловичем Ляпуновим (1857-1918) у 1892 році. Надане ним означення виявилось дуже вдалим та найкращим чином задовольняло багатьом технічним задачам, тому воно було взяте за основне означення стійкості.

Нехай рух фізичної системи S описується за допомогою диференціальних рівнянь, які можуть бути зведені до нормального вигляду (1.2):

$$\left\{ \frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1; y_2; \dots; y_n), i = \overline{1; n}, \right. \quad (1.2)$$

де $y_i, i = \overline{1; n}$ – узагальненні координати – дійсні змінні, які характеризують стан системи; $f_i, i = \overline{1; n}$ – праві частини рівнянь, які є функціями узагальнених координат та не залежать від часу t . Крім того, вихідне положення системи при

$t = t_0$ визначається початковими значеннями $y_{i0}, i = \overline{1; n}$.

Системи виду (1.2), в яких праві частини – функції $f_i, i = \overline{1; n}$ – не залежать явно від часу t , називаються **автономними системами**.

Уважається, що функції $f_i(y_1; y_2; \dots; y_n), i = \overline{1; n}$ є визначеними та неперервними разом зі своїми частинними похідними першого порядку в деякій опуклій області G n -вимірного простору, координатами якого є змінні $y_1; y_2; \dots; y_n$. З цього слідує, що система диференціальних рівнянь (1.2) задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку. Тому кожній сукупності початкових значень відповідає єдиний розв'язок (1.2) для усіх $t > t_0$

$$y_i = y_i(y_{10}; y_{20}; \dots; y_{n0}),$$

тобто цей розв'язок визначається вихідним станом $t = t_0$.

Деякий певний рух системи, який потрібно дослідити на стійкість, називається **незбуреним рухом**.

Зауваження 1.2 Вибір незбуреного руху відбувається довільно, це може бути довільний можливий рух системи.

Припустимо, що у вигляді функцій $y_i = y_i^*, i = \overline{1; n}$ отримано частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1.2), тобто мають місце рівності

$$\left\{ \frac{dy_i^*}{dt} = f_i(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*) \right. \quad i = \overline{1; n}, \quad (1.3)$$

причому ці розв'язки задовольняють початковим умовам $y_{10}^*; y_{20}^*; \dots; y_{n0}^*$.

Якщо змінити початкові умови, надавши їм невеликі за абсолютною величиною прирости $\varepsilon_i, i = \overline{1; n}$, то можна записати, що

$$y_{10} = y_{10}^* + \varepsilon_1; y_{20} = y_{20}^* + \varepsilon_2; \dots; y_{n0} = y_{n0}^* + \varepsilon_n. \quad (1.4)$$

Рух системи, який відповідає початковим умовам (1.4), називається **збуреним рухом**.

Зауваження 1.3 Іншими словами, **збурений рух** – це будь-який рух системи, який відрізняється від незбуреного.

Позначимо різницю змінних $y_i, i = \overline{1; n}$ в збуреному та незбуреному рухах як

$$x_i = y_i - y_i^*, i = \overline{1; n}. \quad (1.5)$$

Змінні $x_i, i = \overline{1; n}$ називаються **відхиленнями** або **варіаціями** величин $y_i, i = \overline{1; n}$.

Якщо всі відхилення $x_i, i = \overline{1; n}$ рівні нулю:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

або, що теж саме $y_i = y_i^*, i = \overline{1; n}$, то збурений і незбурений рухи співпадають, тобто незбуреному руху відповідають ненульові значення варіацій $x_i, i = \overline{1; n}$.

Нехай при $t = t_0$ серед усіх початкових відхилень принаймні одне не рівне нулю, тобто

$$\exists i \in N : x_i(t_0) = x_{i0} \stackrel{(1.5)}{=} y_{i0} - y_{i0}^* \stackrel{(1.4)}{=} y_{i0} + \varepsilon_i - y_{i0}^* = \varepsilon_i. \quad (1.6)$$

Початкові значення $x_{i0}, i = \overline{1; n}$ (1.6) відхилень $x_i, i = \overline{1; n}$ називаються **збуреннями**.

Означення стійкості за Ляпуновим: незбурений рух називається **стійким** по відношенню до змінних $x_i, i = \overline{1; n}$, якщо для будь-якого наперед заданого нескінченно малого додатного числа ε можна обрати таке інше додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що при довільних збуреннях $x_{i0}, i = \overline{1; n}$, які задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 \leq \delta,$$

та при будь-якому $t \geq t_0$ буде мати місце нерівність

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < \varepsilon.$$

В протилежному випадку рух нестійкий.

У наведеному означенні стійкості за Ляпуновим було прийнято наступні допущення:

- а) збурення надається лише початковим умовам, тобто збурений рух відбувається при тих же силах, що й незбурений;
- б) стійкість розглядається на нескінченно великому проміжку часу;
- в) збурення припускаються малими.

1.3 Геометрична інтерпретація стійкості за Ляпуновим

Сукупність відхилень $x_i, i = \overline{1; n}$ в n -вимірному просторі змінних x_1, x_2, \dots, x_n визначає деяку точку M , яку будемо називати *зображуючою точкою*. В збуреному русі при зміні величин $x_i, i = \overline{1; n}$ зображуюча точка описує деяку траєкторію, а незбуреному руху $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ відповідає *нерухома точка* – початок координат.

Для зручності побудови та кращого розуміння всього вище сказаного, обмежимося випадком тривимірного простору (тобто $n = 3$). Навколо початку

координат будуються дві сфери: $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \varepsilon$ та $\sum_{i=1}^3 x_{i0}^2 = \delta$. Радіус $\sqrt{\varepsilon}$ першої

сфери обирається довільно малим. Тоді, якщо незбурений рух стійкий, то для першої сфери повинна знайтися така друга сфера радіуса $\sqrt{\delta}$, яка має наступну властивість: зображуюча точка M , яка почала свій рух із довільної точки M_0 ,

що лежить всередині другої сфери $\sum_{i=1}^3 x_{i0}^2 = \delta$, при своєму подальшому русі

залишається всередині сфери $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \varepsilon$, причому ніколи не досягає її поверхні (рис. 1.2).

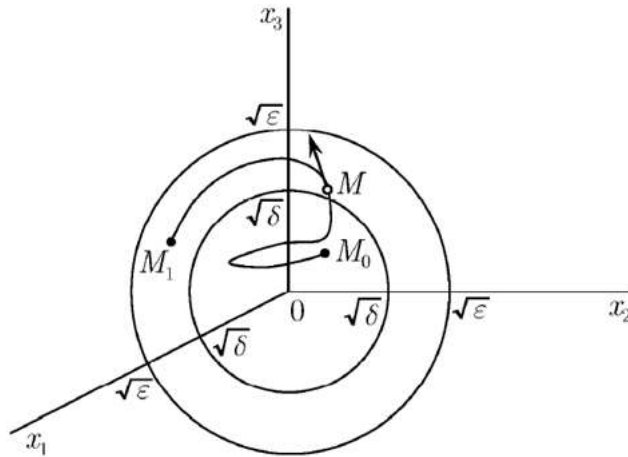


Рисунок 1.2 – Рух точки M

Якщо ж незбурений рух нестійкий, то траєкторія зображуючої точки M через деякий момент часу t перетне сферу $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \varepsilon$ зсередини назовні або потрапить на її поверхню при як завгодно малому положенні точки M_0 до початку координат.

Практично стійкість даного незбуреного руху означає, що при достатньо малих початкових збуреннях збурений рух буде як завгодно мало відрізнятися від незбуреного руху. Якщо незбурений рух нестійкий, то збурений рух буде відходити від нього, якими б малими не були початкові збурення.

Якщо незбурений рух стійкий та при цьому будь-який збурений рух при достатньо малих $x_{i0}, i = 1; n$ прагне до незбуреного руху, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = 0, i = \overline{1; n},$$

то незбурений рух називається **асимптотично стійким**, а зображуюча точка M через деякий проміжок часу необмежено прагне до початку координат, не виходячи зі сфери $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \varepsilon$.

координат, не виходячи зі сфери $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \varepsilon$.

Запитання для самоконтролю

1. Дослідженням яких питань займається теорія стійкості?
2. Яка система називається стійкою «в малому»?
3. Яка система називається стійкою «в великому»?

4. Яка система називається абсолютно стійкою?
5. Який рух називається незбуреним? Збуреним?
6. Які системи називають автономними?
7. Що таке нерухома точка?
8. Що таке зображуюча точка?
9. Що таке стійкість за Ляпуновим?
10. Який рух називається асимптотично стійким?

2 ФАЗОВІ ТРАЄКТОРІЇ ТА ФАЗОВІ ПРОСТОРИ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ

Мета: опанувати поняття фазової траєкторії, фазового простору, довести теорему про зв'язок станів рівноваги з фазовими швидкостями, охарактеризувати види фазових траєкторій.

2.1 Теорема про властивості фазових траєкторій

Теорема 2.1 Якщо є деякий розв'язок $y_i = y_i(t), i = \overline{1; n}$ автономної системи (1.2), то функції $y_i = y_i(t + C), i = \overline{1; n}, C = \text{const}$ також є розв'язком цієї системи.

Доведення. Оскільки функції $y_i = y_i(t), i = \overline{1; n}$ є розв'язками системи (1.2), то для них справедливі тотожності

$$\left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \equiv f_i(y_1(t); y_2(t); \dots; y_n(t)), i = \overline{1; n}. \right.$$

Замінімо в цих тотожностях t на $t + C$:

$$\left\{ \frac{dy_i(t+C)}{d(t+C)} \equiv f_i(y_1(t+C); y_2(t+C); \dots; y_n(t+C)), i = \overline{1; n}. \right.$$

Оскільки $d(t+C) = dt$, то

$$\left\{ \frac{dy_i(t+C)}{dt} \equiv f_i(y_1(t+C); y_2(t+C); \dots; y_n(t+C)), i = \overline{1; n}. \right.$$

Нехай $y_i(t+C) = \bar{y}_i(t), i = \overline{1; n}$, тоді справедливими є й тотожності

$$\left\{ \frac{d\bar{y}_i(t)}{dt} \equiv f_i(\bar{y}_1(t); \bar{y}_2(t); \dots; \bar{y}_n(t)), i = \overline{1; n}. \right.$$

А це означає, що й функції $y_i = \bar{y}_i(t) = y_i(t+C), i = \overline{1; n}$ є розв'язками системи (1.2).

Що і потрібно було довести.

Надамо геометричну інтерпретацію розв'язків автономної системи (1.2).

Нехай

$$y_i = y_i(t), i = \overline{1; n} \quad (2.1)$$

– деякий розв'язок системи (1.2). Розглянемо n -вимірний простір з координатами y_1, y_2, \dots, y_n та поставимо у відповідність цьому розв'язку рух точки в n -вимірному просторі, який задається рівняннями (2.1).

При неперервній зміні часу t в діапазоні $-\infty < t < +\infty$ точка опише деяку траєкторію, яка називається **фазовою траєкторією**. Точка, яка відповідно до (2.1) рухається фазовою траєкторією, називається **зображуючою точкою**, а простір вимірності n , в якому дається геометрична інтерпретація розв'язку автономної системи (1.2) у вигляді фазових траєкторій, – **фазовим простором**.

Фазові траєкторії, які відповідають різним розв'язкам системи (1.2), не можуть перетинатися. Проте різним розв'язкам цієї системи можуть

відповідати одні й ті ж самі фазові траєкторії.

Теорема 2.2 Якщо фазові траєкторії для різних розв'язків системи (1.2) мають хоча б одну спільну точку, то вони співпадають.

Доведення. Нехай

$$y_i = \xi_i(t), i = \overline{1; n} \quad (2.2)$$

є деяким іншим розв'язком системи (1.2), який відмінний від розв'язку (2.1), та нехай траєкторії, що відповідають розв'язкам (2.1), (2.2), мають спільну точку, тобто

$$\exists t_1, t_2 : y_i(t_1) = \xi_i(t_2). \quad (2.3)$$

В силу теореми 2.1 розв'язком системи також будуть функції

$$\bar{y}_i(t) = y_i(t + C), \quad (2.4)$$

де $C = t_1 - t_2$.

Розв'язок (2.4) в момент часу t_2 , згідно з (2.3), має однакові початкові умови з розв'язком (2.2), тобто

$$\bar{y}_i(t_2) = y_i(t_2 + C) = y_i(t_2 + t_1 - t_2) = y_i(t_1) \stackrel{(2.3)}{=} \xi_i(t_2), i = \overline{1; n}.$$

А тому, в силу теореми про єдиність розв'язку, розв'язки (2.2) та (2.4) співпадають один з одним, тобто

$$\xi_i(t) \equiv y_i(t + C), i = \overline{1; n}.$$

З цієї тотожності можна зробити висновок: для обох розв'язків (2.1) і (2.2) зображуюча точка описує в фазовому просторі одну й ту ж саму траєкторію, але для першого розв'язку ця точка відстає за траєкторією на час C .

Що і потрібно було довести.

Таким чином, розв'язок автономної системи диференціальних рівнянь (1.2) інтерпретується як процес руху зображуючої точки фазовою траєкторією в n -вимірному фазовому просторі, причому фазові траєкторії для різних розв'язків системи (1.2) або не перетинаються, або співпадають.

2.2 Геометрична інтерпретація фазових траєкторій

Якщо розв'язки системи (1.2) розглядати як інтегральні криві в $(n+1)$ -вимірному просторі з координатами t, y_1, y_2, \dots, y_n , то кожному розв'язку в тій області простору, в якій виконуються умови існування й єдиності розв'язку, відповідає єдина інтегральна крива. При цьому фазові траєкторії можна розглядати як проекції інтегральних кривих в $(n+1)$ -вимірному просторі на n -вимірний простір y_1, y_2, \dots, y_n , причому проекції різних інтегральних кривих або не перетинаються, або співпадають.

Інтегральні криві та їх проекції у випадку $n=2$ наведені на рисунку 2.1. На рисунку двом розв'язкам $y(t)$ та $\bar{y}(t) = y(t+c)$, які відрізняються зсувом у часі, відповідають різні інтегральні криві, але одна фазова траєкторія.

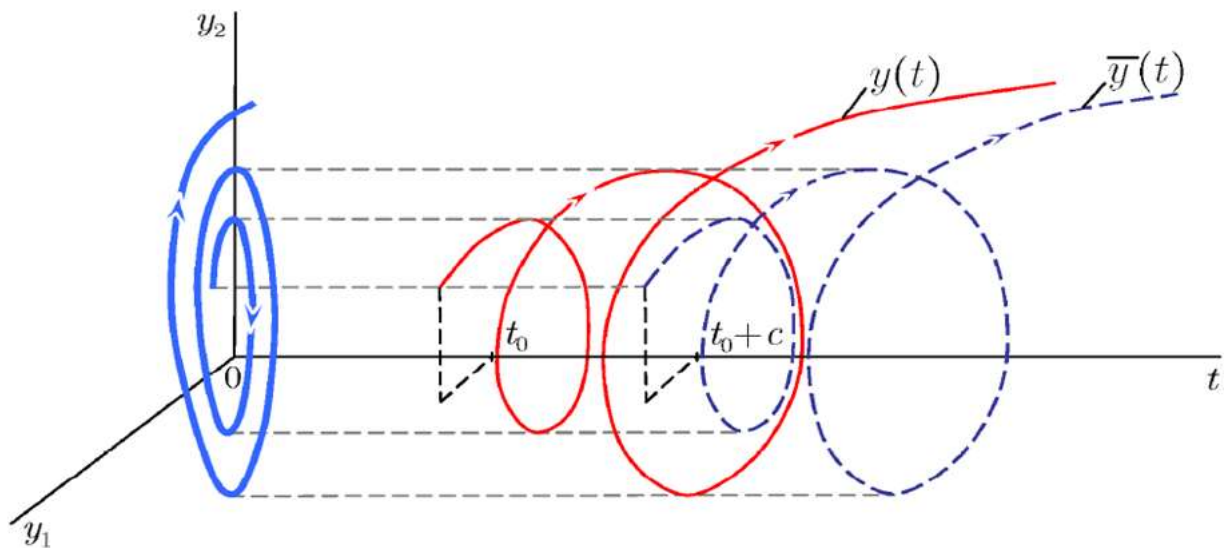


Рисунок 2.1 – Інтегральні криві та їх проєкції

Дамо геометричну інтерпретацію не лише розв'язкам, але і самій системі (1.2). Для цього кожній точці $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ області G фазового простору поставимо у відповідність вектор

$$\vec{f}(y_0) = (f_1(y_0), f_2(y_0), \dots, f_n(y_0)),$$

що виходить із цієї точки. Система (1.2) буде задавати в області G векторне поле.

Нехай $y_i = y_i(t)$ – розв'язок системи (1.2), що задовольняє початковим умовам

$$y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = \overline{1; n}.$$

Цьому розв'язку відповідає фазова траєкторія, яка виходить в момент часу t_0 з точки y_0 . Тоді вектор $\vec{f}(y_0)$ представляє собою, як слідує з тотожності

$$\left. \frac{dy_i(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \equiv f_i(y_0) = f_i(y_{10}; y_{20}; \dots; y_{n0}), \quad i = \overline{1; n},$$

вектор швидкості руху зображуючої точки траєкторією в момент часу t_0 .

Вектор $\vec{f}(y_0)$ називається **вектором фазової швидкості**.

2.3 Види фазових траєкторій

У фазовому просторі існує три види фазових траєкторій.

1. Фазові траєкторії, що відповідають розв'язкам системи (1.2) виду

$$y_i(t) = a_i = \text{const}, \quad i = \overline{1; n}. \quad (2.5)$$

У цьому випадку зображуюча точка у фазовому просторі при зміні t не рухається, залишається на місці. Фазова траєкторія для розв'язку (2.5) називається *станом рівноваги*.

2. Фазові траєкторії, для яких розв'язок автономної системи (1.2) є періодичним, тобто існує таке дійсне число $T > 0$, для якого виконується умова періодичності:

$$y_i(t + T) = y_i(t), i = \overline{1; n}.$$

У даному випадку фазова траєкторія буде замкненою та називається *циклом*, а число T називається *періодом циклу*.

Траєкторія не буде вироджуватися у точку, якщо будуть існувати такі два значення $t_1 \neq t_2$, які задовольняють нерівності $|t_1 - t_2| < T$, що хоча б для одного i буде справедливою умова

$$y_i(t_1) \neq y_i(t_2).$$

Зауваження 2.1 Стани рівноваги та цикли є фазовими траєкторіями з самоперетинами. Дійсно, для стану рівноваги для будь-яких $t_1 \neq t_2$ справедливе співвідношення

$$y_i(t_1) = y_i(t_2), i = \overline{1; n}.$$

Цей же стан при $|t_1 - t_2| = T$ справедливий і для циклу.

3. Фазові траєкторії без самоперетину, що відповідають розв'язкам $y_i = y_i(t), i = \overline{1; n}$ системи (1.2), та які задовольняють властивості, що не існує значень $t_1 \neq t_2$, для яких

$$y_i(t_1) = y_i(t_2), i = \overline{1; n}.$$

Таким чином, через кожен точку фазового простору проходить фазова траєкторія, яка відповідає деякому розв'язку системи (1.2). У результаті весь фазовий простір є заповненим фазовими траєкторіями, які не перетинаються одна з одною. Серед цих траєкторій особливе місце займають фазові траєкторії з самоперетином, до яких відносяться стани рівноваги та цикли.

Теорема 2.3 (Зв'язок станів рівноваги з фазовими швидкостями). Для того, щоб точка $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ була станом рівноваги, необхідно та достатньо, щоб вектор фазової швидкості $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ у цій точці обертався на нуль.

Доведення. Необхідність. Нехай система (1.2) має розв'язок виду (2.5):

$$y_i(t) = a_i = \text{const}, i = \overline{1; n},$$

тобто точка $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ є станом рівноваги. Підставивши розв'язок (2.5) у систему (1.2) будемо мати:

$$\left\{ f_i(a_1; a_2; \dots; a_n) = \frac{da_i}{dt} = 0, i = \overline{1; n}, \right.$$

тобто вектор фазової швидкості $f(y_1; y_2; \dots; y_n)$ у точці $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ обертається на нуль.

Достатність. Нехай у точці $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ вектор фазової швидкості дорівнює нулю, тобто

$$f(a) = f(a_1; a_2; \dots; a_n) = 0.$$

Тоді система (1.2) має розв'язок (2.5) $y_i = a_i, i = \overline{1; n}$, який відповідає стану

рівноваги, оскільки при підстановці $y_i = a_i = \text{const}$ у систему (1.2) отримуємо тотожність

$$\left\{ \frac{da_i}{dt} \equiv f(a_1; a_2; \dots; a_n) \equiv 0, i = \overline{1; n}. \right.$$

Що і потрібно було довести.

Із теореми 2.3 можна зробити висновок, що стани рівноваги є розв'язками системи рівнянь

$$f(a_1; a_2; \dots; a_n) = 0.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке фазова траєкторія?
2. Що таке зображуюча точка?
3. Що таке фазовий простір?
4. Коли фазові траєкторії для різних розв'язків системи співпадають?
5. Що таке стан рівноваги?
6. Що таке цикл?
7. Що таке період циклу?
8. Якій умові повинен задовольняти вектор фазової швидкості для того, щоб точка була станом рівноваги?

3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ

Мета: вивести диференціальні рівняння збуреного руху, розглянути рівняння збуреного руху систем другого порядку.

3.1 Вхідні положення

Дослідження стійкості руху, як правило, проводять наближеними методами, що ґрунтуються на якісному аналізі диференціальних рівнянь збуреного руху, яким задовольняють відхилення (варіації) $x_i, i = \overline{1; n}$ (1.5).

Основною передумовою наближених методів є припущення того, що властивості системи по відношенню до стійкості її усталеного руху виявляються вже в тих малих збуреннях руху, які виникають навколо незбуреного руху на протязі невеликого проміжку часу слідом за моментом повідомлення системі достатньо малого початкового збурення. На цій підставі при розв'язанні питання про стійкість руху у рівняннях збуреного руху відкидають усі члени вище першого порядку (відносно координат та швидкостей) та за формою інтегралів лінеаризованих рівнянь робиться висновок про стійкість незбуреного руху.

3.2 Виведення диференціальних рівнянь збуреного руху (загальний випадок)

Щоб отримати рівняння збуреного руху, з рівностей (1.5) знайдемо, що

$$y_i = y_i^* + x_i, i = \overline{1; n},$$

та підставимо отримані значення у систему диференціальних рівнянь (1.2):

$$\left\{ \frac{d(y_i^* + x_i)}{dt} \equiv f_i(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2; \dots; y_n^* + x_n), i = \overline{1; n}. \right.$$

Якщо праві частини отриманої системи можна розвинути у степеневі ряди Тейлора, то після розкладання за степенями $(y_i - y_i^*)$ в околі незбуреного руху y_i^* будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i^*}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = f_i(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*) + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} (y_1 - y_1^*) + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} (y_2 - y_2^*) + \\ + \frac{\partial f_i}{\partial y_3} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} (y_3 - y_3^*) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} \Big|_{(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*)} (y_n - y_n^*) + \\ + R_i(y_1 - y_1^*; \dots; y_n - y_n^*), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $R_i(y_1 - y_1^*; \dots; y_n - y_n^*)$ – сукупність членів, які залежать від відхилень (1.5) $x_i = y_i - y_i^*, i = \overline{1; n}$ степенів вище першого.

Для незбуреного руху, згідно з (1.3), повинна виконуватися тотожність

$$\frac{dy_i^*}{dt} \equiv f_i(y_1^*; y_2^*; \dots; y_n^*).$$

Виключаючи з (3.1) незбурений рух, а також враховуючи, що цьому руху відповідає рівноважний стан зображуючої точки на початку координат $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, з (3.1) отримуються диференціальні рівняння збуреного руху:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} x_n + R_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

або

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + R_i(x_1; x_2; \dots; x_n), \quad (3.2)$$

де коефіцієнти $a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_{(0; 0; \dots; 0)} = \text{const}; i, k = \overline{1; n}$.

Якщо відхилення x_i достатньо малі, то нехтуючи залишковим членом R_i , приходимо до лінеаризованих рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} \approx a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, i = \overline{1; n}, \quad (3.3)$$

які називаються **рівняннями першого наближення**.

Підставою для лінеаризації нелінійної системи в околі точки рівноваги є бажання дістати інформацію про поведінку цієї нелінійної системи за допомогою аналізу її лінеаризації. При цьому вважається, що нелінійна система буде локально поводити себе подібно до лінеаризованої, принаймні в якісному сенсі.

3.3 Рівняння збуреного руху систем другого порядку

Розглянемо нелінійну систему рівнянь другого порядку загального вигляду, яка характеризує незбурений рух

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1; y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1; y_2). \end{cases} \quad (3.4)$$

У системі (3.4) функції $f_1(y_1; y_2)$, $f_2(y_1; y_2)$ вважаються аналітичними на всій площині змінних y_1, y_2 .

Точки (y_1^*, y_2^*) , які характеризують стан рівноваги, є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} f_1(y_1^*; y_2^*) = 0, \\ f_2(y_1^*; y_2^*) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

У загальному випадку система (3.5) може мати не один, а декілька розв'язків. Нехай $y_1^* = a_1, y_2^* = a_2$ – це один із розв'язків системи (3.5).

Система рівнянь (3.4) відповідає випадку $n=2$, для якого фазовий простір представляє собою фазову площину. Для збуреного руху $y_i = y_i^* + x_i$ можна записати систему (3.4) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d(y_1^* + x_1)}{dt} = f_1(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2), \\ \frac{d(y_2^* + x_2)}{dt} = f_2(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2). \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.6) може бути лінеаризована за допомогою розвинення функцій у ряд Тейлора за степенями $(y_i - y_i^*) = (y_i - a_i)$:

$$\begin{aligned} f_1(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2) &= f_1(a_1; a_2) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right|_{(a_1; a_2)} (y_1 - a_1) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right|_{(a_1; a_2)} (y_2 - a_2) + \\ &+ R_1(y_1 - a_1; y_2 - a_2); \\ f_2(y_1^* + x_1; y_2^* + x_2) &= f_2(a_1; a_2) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right|_{(a_1; a_2)} (y_1 - a_1) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right|_{(a_1; a_2)} (y_2 - a_2) + \\ &+ R_2(y_1 - a_1; y_2 - a_2). \end{aligned}$$

Для збуреного руху з системи (3.6), враховуючи (3.4) та (3.5), отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right|_{(a_1; a_2)} (y_1 - a_1) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right|_{(a_1; a_2)} (y_2 - a_2) + R_1(y_1 - a_1; y_2 - a_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right|_{(a_1; a_2)} (y_1 - a_1) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right|_{(a_1; a_2)} (y_2 - a_2) + R_2(y_1 - a_1; y_2 - a_2). \end{cases}$$

При дослідженні нелінійних систем зручно за допомогою лінійного перетворення

$$x_i = y_i - a_i, i = 1; 2$$

початок координат паралельним переносом змістити у точку рівноваги $(a_1; a_2)$.

Лінійна однорідна система з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (3.7)$$

де $a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{(0; 0; \dots; 0)} = \text{const}; i, k = 1; 2$, називається **лінеаризацією нелінійної**

системи при умові, що для нелінійних членів $R_1(x_1; x_2), R_2(x_1; x_2)$ виконуються умови

$$\lim_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \rightarrow 0} \frac{R_1(x_1; x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \lim_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \rightarrow 0} \frac{R_2(x_1; x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0,$$

тобто при $(x_1; x_2) \rightarrow O_1(0; 0)$.

З цих умов можна зробити висновок, що нелінійні члени вважаються нескінченно малими у порівнянні з x_1 та x_2 при наближенні до точки рівноваги $O_1(0; 0)$, а тому ними можна знехтувати.

Систему (3.7) більш зручно представляти у матричній формі

$$\dot{X} = A \cdot X, \quad (3.8)$$

$$\text{де } \dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(0;0)}.$$

Рівняння (3.7) можна трактувати як рівняння, що визначають проекції швидкості зображуючої точки системи, яка рухається в фазовій площині $x_1 O_1 x_2$. Незбуреному руху $x_1 = x_2 = 0$ на цій площині відповідає рівноважний стан зображуючої точки в початку координат, оскільки коли $x_1 = x_2 = 0$, то й $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$.

Запитання для самоконтролю

1. Який вигляд мають рівняння першого наближення?
2. Що таке лінеаризація нелінійної системи?
3. Якими рівняннями визначаються проекції швидкості зображуючої точки системи?
4. Який вигляд мають рівняння збуреного руху системи другого порядку?

4 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ

Мета: опанувати поняття теорії перетворень матриць та теорії квадратичних форм, довести теореми про комутативність матриць, засвоїти алгоритм зведення квадратичних форм до канонічного вигляду.

4.1 Зведення матриць до діагонального вигляду

Нехай задано n -вимірний дійсний простір, який будемо позначати через R_n . Розглянемо *перетворення* (тобто відображення цього простору), яке переводить кожний вектор \bar{x} простору R_n у деякий вектор \bar{y} цього ж простору. У цьому випадку вектор \bar{x} називається *прообразом* вектора \bar{y} , а вектор \bar{y} у свою чергу – *образом* вектора \bar{x} . Зазначене правило називається *перетворенням простору R_n* або *оператором*, який діє у просторі R_n .

Перетворення (оператор) A називається *лінійним оператором*, якщо суму будь-яких двох векторів $\bar{x}, \bar{y} \in R_n$ він переводить у суму образів цих векторів:

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y}),$$

а також для довільного вектора \bar{x} та довільного числа $\lambda \neq 0$

$$A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x}).$$

Розглянемо лінійне перетворення, що діє за правилом

$$\bar{y} = A\bar{x}, \tag{4.1}$$

та з'ясуємо, як буде змінюватися матриця A , якщо до вихідної системи координат застосувати перетворення з невідірженою матрицею T .

Зауваження 4.1 Нагадаємо, що матриця називається *невідірженою*, якщо її визначник не дорівнює нулю.

При вказаному зауваженні вектор $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ перетворюється у новий вектор $\bar{x}' = (x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$, координати якого виражаються через координати старого вектора \bar{x} за допомогою наступного співвідношення:

$$\bar{x}' = T \cdot \bar{x}.$$

Аналогічним чином змінюється й вектор \bar{y} :

$$\bar{y}' = T \cdot \bar{y}.$$

Знайдемо з двох останніх рівностей вектори \bar{x} та \bar{y} :

$$\bar{x} = T^{-1} \cdot \bar{x}', \quad \bar{y} = T^{-1} \cdot \bar{y}'.$$

Підставимо отримані вирази у (4.1):

$$T^{-1} \cdot \bar{y}' = A \cdot T^{-1} \cdot \bar{x}'$$

або

$$\bar{y}' = T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \bar{x}'.$$

Отже, в новій системі координат перетворення (4.1) здійснюється матрицею

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1}. \tag{4.2}$$

Матриці A та A' , які пов'язані між собою співвідношенням (4.2),

називаються *подібними*.

Зауваження 4.2 Зрозуміло, що вони не дорівнюють одна одній, але у геометричному сенсі еквівалентні, оскільки здійснюють одне й теж саме перетворення, але у різних системах координат.

З (4.2) можна записати, що

$$A' - \lambda E = T \cdot (A - \lambda E) \cdot T^{-1},$$

а тоді

$$|A' - \lambda E| = |T \cdot (A - \lambda E) \cdot T^{-1}| = |T| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T^{-1}| = |T| \cdot \underbrace{|T^{-1}|}_{|E|} \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що подібні матриці мають один і той самий характеристичний многочлен.

Практичний інтерес представляє така система координат, в якій матриця перетворення приймає найпростіший діагональний вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Якщо така система координат існує, то перетворення, що у старій системі координат здійснюється за допомогою матриці A , зводилось би у нових осях просто до розтягнення вздовж цих осей, тобто

$$y'_i = \lambda_i x'_i, \quad i = \overline{1; n}.$$

Запишемо рівність (4.2) наступним чином:

$$T^{-1} \cdot A' = T^{-1} \cdot T \cdot A \cdot T^{-1} \Rightarrow T^{-1} \cdot A' = E \cdot A \cdot T^{-1} \Rightarrow T^{-1} \cdot A' = A \cdot T^{-1}.$$

Уведемо у розгляд матрицю $V = T^{-1}$, тоді останнє співвідношення перепишеться у вигляді $V \cdot A' = A \cdot V$ або $A \cdot V = V \cdot A'$. У розгорнутому вигляді ця рівність приймає вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & \dots & V_{(n-1)n} \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{(n-1)1} & V_{(n-1)2} & \dots & V_{(n-1)n} \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

або

при цьому $(n-1)$ складових будуть виражатися через одну, наприклад V_{11} , яка залишається невизначеною. Іншими словами, компоненти власного вектора V_{i1} визначаються лише з точністю до деякого постійного множника. Для того, щоб не виникала ця невизначеність, власні вектори *нормують*, тобто обирають множник таким чином, щоб у результаті отримати вектор одиничної довжини, тобто щоб $\sqrt{\sum_{i=1}^n V_{i1}^2} = 1$. Аналогічно визначаються координати інших $(n-1)$ -го власного вектора V_2, V_3, \dots, V_n , які є елементами шуканої матриці V перетворення.

Істотний інтерес представляють умови, при яких дві матриці A та B одночасно приводяться до головних осей.

Теорема 4.1 Комутативність двох матриць A та B є необхідною умовою зведення їх одночасно до головних осей.

Доведення. Нехай A та B – це дві матриці, власні числа яких дорівнюють відповідно α та β . Якщо їх головні осі співпадають, то

$$Av = \alpha v, Bv = \beta v,$$

де v – спільний для обох матриць власний вектор. Помножимо перше із записаних рівнянь з ліва на матрицю B , а друге – на A , та віднімемо від нового першого рівняння нове друге:

$$\left. \begin{array}{l} BA v = B \alpha v, \\ AB v = A \beta v \end{array} \right\} \Rightarrow BA v - AB v = B \alpha v - A \beta v \Rightarrow (BA - AB)v = \alpha Bv - \beta Av.$$

Оскільки $\alpha Bv - \beta Av = \alpha \cdot \beta v - \beta \cdot \alpha v = 0$, то

$$(BA - AB)v = 0.$$

А тоді

$$BA - AB = 0 \Rightarrow BA = AB,$$

тобто маємо, що матриці повинні комутувати.

Що і потрібно було довести.

Зауваження 4.3 Має місце й обернене твердження: якщо дві матриці комутують, то за допомогою одного й того ж самого перетворення подібності їх можна привести до діагонального вигляду. Тобто комутативність матриць є не лише необхідною, але й достатньою умовою для зведення їх одночасно до головних осей.

Випадок, коли корені характеристичного рівняння кратні, представляє для дослідження великі труднощі. Нижче наведемо лише деякі остаточні результати для цього випадку.

Розглянемо характеристичний визначник

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

який є многочленом n -го степеня. Цей многочлен можна розкласти на

елементарні дільники виду

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{\rho_j},$$

причому $\sum_{k=1}^j \rho_k = n$. Зазначимо, що для випадку різних власних значень λ_k

елементарні дільники будуть мати вигляд

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2), \dots, (\lambda - \lambda_n),$$

тобто є лінійними або простими.

Якщо ж серед власних значень є однакові, то можливі наступні варіанти.

1) Усі елементарні дільники є простими; це означає, що кожний дільник, який відповідає кореню кратності r_k , буде зустрічатися рівно r_k раз, тобто елементарні дільники будуть мати вигляд

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2), \dots, \overbrace{(\lambda - \lambda_k), (\lambda - \lambda_k), \dots, (\lambda - \lambda_k)}^{r_k \text{ штук}}, \dots, (\lambda - \lambda_j).$$

У цьому випадку, як і для різних коренів характеристичного многочлена, матриця A може бути приведена до діагонального вигляду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & & & \\ & & \dots & & & & & & & \\ & & & \lambda_k & & & & & & \\ & & & & \lambda_k & & & & & \\ & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & \lambda_k & & & \\ & & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & & & \lambda_j & \end{pmatrix}.$$

2) Усі елементарні дільники (або принаймні частина з них) можуть виявитися нелінійними:

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{\rho_j}, \quad (4.7)$$

де хоча б одне $\rho_k > 1$. У цьому випадку матриця A не приводиться до діагонального виду. Проте існує найпростіше канонічне представлення цієї матриці, яке називається **нормальною жордановою формою** матриці A . Ця канонічна форма має вигляд:

$$A' = J = \begin{pmatrix} A_{\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\rho_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\rho_3} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\rho_j} \end{pmatrix}.$$

Елементи $A_{\rho_k}, k = \overline{1; j}$ матриці J в свою чергу є матрицями. Матриця J

називається **квазіматрицею**. Якщо всі елементи квазіматриці, окрім діагональних, дорівнюють нулю, то така матриця називається **квазідіагональною**.

Розглянемо один із нелінійних множників $(\lambda - \lambda_k)^{\rho_k}$ в (4.7) та поставимо йому у відповідність матрицю $A_{\rho_k} = J_{\rho_k}$ порядку ρ_k , яка має спеціальну структуру

$$A_{\rho_k} = J_{\rho_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

а також має лише один елементарний дільник $(\lambda - \lambda_k)^{\rho_k}$. Матриця J_{ρ_k} називається **жордановою клітиною порядку ρ_k** .

Квазідіагональна матриця, яка має своїми елементарними дільниками степені (4.7), може тепер бути представлена у вигляді

$$J = \text{diag}(J_{\rho_1}, J_{\rho_2}, \dots, J_{\rho_j}),$$

де $J_{\rho_k} = A_k, k = \overline{1; j}, \sum_{k=1}^j \rho_k = n$.

Приклад 4.1 Як приклад приведемо жорданову матрицю J , елементарними дільниками якої є $(\lambda - \lambda_1)^2, (\lambda - \lambda_2)^3, (\lambda - \lambda_3), (\lambda - \lambda_4)^2$:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці A та J мають однакові елементарні дільники, то вони є подібними, тобто, згідно (4.2), існує така невідроджена матриця T ($|T| \neq 0$), що має місце співвідношення

$$A = T \cdot J \cdot T^{-1}.$$

Зауваження 4.4 Якщо всі елементарні дільники матриці A прості, то жорданові клітини J_{ρ_k} перетворюються просто у числа λ_k . Тому для матриці A канонічне представлення співпадає з діагональною формою цієї матриці лише у тому випадку, коли всі її елементарні дільники прості.

Іноді замість жорданової клітини виду (4.8) розглядають «нижню» жорданову клітину

$$J_{\rho_k}^{(H)} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

а елементарним дільникам (4.7) відповідає «нижня» жорданова матриця

$$J^{(H)} = \text{diag} \left(J_{\rho_1}^{(H)}, J_{\rho_2}^{(H)}, \dots, J_{\rho_j}^{(H)} \right).$$

4.2 Симетричні матриці та їх властивості

Матриця називається **симетричною**, якщо елементи, симетричні відносно головної діагоналі, рівні, тобто

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Матриця A^T називається **транспонованою** по відношенню до матриці A , якщо вона отримана з неї шляхом заміни стовпців рядками з тими ж номерами.

Для симетричних матриць має місце рівність

$$A^T = A.$$

Важливою властивістю симетричних матриць є те, що всі їх власні значення є дійсними, а елементарні дільники простими. Отже, симетрична матриця завжди може бути зведена до діагонального вигляду.

Уведемо в розгляд два вектори $\bar{U} = (U_1; U_2; \dots; U_n)$ та $\bar{V} = (V_1; V_2; \dots; V_n)$, які будемо називати **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток (сума добутків відповідних координат) дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n U_k V_k = 0.$$

Можна показати, що власні вектори симетричних матриць завжди ортогональні, тобто

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} V_{jk} = 0, i \neq k.$$

У випадку, коли власні вектори нормовані ($\sum_{j=1}^n V_{jk}^2 = 1, k = \overline{1; n}$), то вони складають **ортонормовану** систему. Використовуючи символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ 1, & i = k, \end{cases}$$

умову ортонормованості можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} V_{jk} = \delta_{ik} \quad (4.9)$$

або у матричній формі

$$V \cdot V^T = E, \quad (4.10)$$

де V – це матриця, по рядкам якої розташовано елементи V_{ik} .

Із (4.9) можна зробити висновок, що будь-які два стовпчика (рядка) матриці V взаємно ортогональні. Такі матриці називаються **ортогональними**.

Із (4.10) бачимо, що

$$V^T = V^{-1},$$

тобто, якщо матриця V ортогональна, то обернена та транспонована до неї матриці співпадають.

4.3 Зведення квадратичних форм до канонічного вигляду

Задача про зведення квадратної матриці до діагонального вигляду знаходиться у тісному зв'язку з задачею про приведення квадратичної форми до суми квадратів.

Квадратичною формою n змінних x_1, x_2, \dots, x_n називається однорідний многочлен другого степеня

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (4.11)$$

причому вважається, що $a_{ik} = a_{ki}$.

Кожній квадратичній формі ставиться у відповідність матриця її коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яка є симетричною.

З'ясуємо, як змінюється матриця A при переході від змінних x_1, x_2, \dots, x_n до нових змінних y_1, y_2, \dots, y_n за правилом

$$x_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} y_k. \quad (4.12)$$

З урахуванням (4.12) квадратична форма (4.11) приймає вигляд:

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} y_i y_k.$$

Тут

$$c_{ik} = c_{ki} = \sum_{r=1}^n b_{ri} \sum_{s=1}^n a_{rs} b_{sk}. \quad (4.13)$$

Якщо позначити $B = \{b_{ik}\}$, $C = \{c_{ik}\}$, то рівність (4.13) приймає вигляд:

$$C = B^T A B.$$

Перетворення (4.12) можна підібрати таким чином, що матриця C виявиться діагональною

$$C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

У цьому випадку квадратична форма не буде містити добутків координат або, як кажуть, буде приведена до суми квадратів

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n c_k y_k^2.$$

Перетворень (4.12) існує нескінченно багато, серед усіх цих перетворень практичний інтерес представляє ортогональне перетворення, матриця якого задовольняє умові $B^T = B^{-1}$. У цьому випадку можна записати, що

$$C = B^{-1} A B.$$

Таким чином, щоб звести квадратичну форму до суми квадратів за допомогою ортогонального перетворення, потрібно привести до головних осей її матрицю. Тоді

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2.$$

Квадратичні форми можуть бути класифіковані наступним чином:

а) якщо при всіх дійсних значеннях x_k квадратична форма залишається додатною та перетворюється на нуль лише при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, то вона називається *додатно визначеною*;

б) квадратична форма, яка приймає лише від'ємні значення, називається *від'ємно визначеною*;

в) якщо квадратична форма може приймати значення різних знаків, то вона називається *знакозмінною*.

Тип квадратичної форми легко встановити, якщо вона якимось чином зведена до суми квадратів. Так, якщо всі коефіцієнти при квадратах змінних виявилися додатними, то форма додатно визначена, якщо від'ємними – від'ємно визначена.

Таким чином, можна зробити висновок, що, якщо квадратична форма додатно визначена, то всі власні значення її матриці додатні.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке лінійний оператор?
2. Яка матриця називається невиродженою?
3. Які властивості фундаментальних векторів?
4. Що таке власні значення матриці?
5. Що є необхідною умовою для зведення матриць до головних осей?

5 ТИПИ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ

Мета: опанувати алгоритм зведення системи рівнянь до канонічного вигляду, розглянути залежність між розташуванням фазових траєкторій та видом матриці системи, відповідні типи особливих точок.

Дослідження різних випадків, які можуть виникати при інтегруванні лінійних систем, у випадку системи другого порядку (3.7) допускає геометричну інтерпретацію, яка наглядно демонструє поведінку системи у збуреному русі в околі незбуреного руху, що досліджується. Можливі декілька відмінних один від одного випадків, кожному з яких буде відповідати особливий тип розміщення фазових траєкторій в околі особливої точки – початку координат, яка зображує незбурено рівноважний стан системи. Такими типами розташування фазових траєкторій навколо початку координат і буде визначатися характер стійкості незбуреного стану лінійної системи з одним ступенем свободи.

Поділивши у системі (3.7) друге рівняння на перше, з системи виключаємо час t :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}.$$

У диференціальному рівнянні першого порядку, яке отримали

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \quad (5.1)$$

вважається, що x_1 – незалежна змінна, а x_2 – невідома функція. Права частина рівняння (5.1) визначена, неперервна та має неперервну частинну похідну за змінною x_1 на всій площині $x_1O_1x_2$, окрім точок прямої $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$.

Тепер поділивши в системі (3.7) перше рівняння на друге, отримаємо наступне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2},$$

права частина якого визначена, неперервна та має неперервну частинну похідну за x_2 всюди на площині $x_1O_1x_2$, окрім точок прямої $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$.

Таким чином, умови теореми існування та єдиності розв'язку для рівняння (5.1) виконуються всюди, окрім спільних точок прямих $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$. Оскільки $\det A = |A| \neq 0$ (тут A – матриця системи (3.7)), то розв'язком системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

будуть $x_1 = 0, x_2 = 0$, тобто прямі перетинаються у початку координат – т. $O_1(0; 0)$.

Початок координат, який зображує рівноважний стан, є ізольованою особливою точкою фазової траєкторії, оскільки для неї $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0}{0}$. Це єдина особлива точка диференціального рівняння (5.1) на площині $x_1 O_1 x_2$.

5.1 Зведення системи рівнянь до канонічного вигляду

Складемо характеристичне рівняння системи (3.7):

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (5.2)$$

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= a_{11} + a_{22}, \\ \det A &= |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

то вираз (5.2) прийме вигляд:

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + |A| = 0.$$

Зауваження 5.1 Величина $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ називається *слідом матриці* й дорівнює сумі елементів, що розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Корені рівняння (5.2)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \cdot |A|}}{2}$$

в залежності від знака дискримінанта

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \cdot |A|$$

визначають форму інтегралів рівняння (3.7), а разом з тим дають можливість судити про стійкість незбуреного руху системи.

Якщо рівняння (5.2) має прості корені або один кратний, але з простими елементарними дільниками, то система (3.7) може бути зведена до канонічного виду

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda Y_1 + Y_2, \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda Y_2. \end{cases}$$

Для спрощення побудови фазових траєкторій, система, яку представлено у векторній формі (3.8), заміною змінних $X = CY$ після перетворення

$$\begin{cases} \dot{X} = C\dot{Y}, \\ \dot{X} = AX \end{cases} \Rightarrow C\dot{Y} = AX \Rightarrow C\dot{Y} = ACY \Rightarrow \dot{Y} = C^{-1}ACY$$

зводиться до вигляду

$$\dot{Y} = JY, \quad (5.3)$$

де J – жорданова форма матриці A , причому $J = C^{-1}AC$.

5.2 Характеристичні числа та фазові портрети

У залежності від виду матриці \dot{Y} можливі шість випадків, кожному з яких відповідає особливий тип розташування фазових траєкторій в околі особливої точки – початку координат (ця точка зображує незбурений рівноважний стан системи). Цими типами фазових траєкторій і буде геометрично визначатися характер стійкості незбуреного стану лінеаризованої системи другого порядку.

Випадок 1. Власні значення матриці A дійсні, різні й одного знаку, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причому $\lambda_1 \lambda_2 > 0$; матриця J має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку система (5.3) приймає вигляд

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda_1 Y_1, \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda_2 Y_2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Зазначимо, що система (5.4) не зміниться, якщо

а) замінити Y_1 на $(-Y_1)$;

б) замінити Y_2 на $(-Y_2)$;

в) замінити одночасно Y_1 на $(-Y_1)$ та Y_2 на $(-Y_2)$, тобто фазові траєкторії вказаної системи розташовано симетрично відносно координатних осей Y_1 і Y_2 .

Тому достатньо обмежитися вивченням фазових траєкторій лише у першому квадранті площини $Y_1 O_1 Y_2$.

Розділяючи змінні у кожному з рівнянь системи (5.4), отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{Y_1} = \lambda_1 dt, \\ \frac{dY_2}{Y_2} = \lambda_2 dt. \end{cases}$$

А тоді, наприклад, для першого рівняння, можна записати:

$$\int \frac{dY_1}{Y_1} = \int \lambda_1 dt \Rightarrow \ln|Y_1| = \lambda_1 t + \ln C_1 \Rightarrow Y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Аналогічно, будемо мати, що

$$Y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Отже, остаточно можна записати, що розв'язком системи (5.4) є функції

$$\begin{cases} Y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ Y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (5.5)$$

У рівностях (5.5) постійні $C_1, C_2 \geq 0$, оскільки фазові траєкторії розглядаються у першому квадранті.

Можливі наступні граничні випадки:

а) якщо $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, то тоді

$$\begin{cases} Y_1(t) = 0, \\ Y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

що задає рівняння додатної півосі $O_1 Y_2$;

б) якщо $C_1 \neq 0, C_2 = 0$, то

$$\begin{cases} Y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ Y_2(t) = 0, \end{cases}$$

й в результаті маємо рівняння додатної півосі $O_1 Y_1$.

Таким чином, піввісі $Y_1(t) = 0, Y_2(t) = 0$ є фазовими траєкторіями.

Розглянемо випадок *від'ємних власних значень*. Нехай для визначеності $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тоді

$$Y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 (e^{\lambda_1 t})^{\lambda_2/\lambda_1} = C_2 \left(\frac{Y_1(t)}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} = \frac{C_2}{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}} \cdot Y_1(t)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

або

$$Y_2(t) = C \cdot Y_1(t)^\lambda, \quad (5.6)$$

де $C = \frac{C_2}{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}}, \lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 1$.

Відповідно до розв'язку (5.6), фазові траєкторії представляють собою параболи порядку λ (рис. 5.1 а). Оскільки всі власні значення матриці A є від'ємними ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = 0,$$

тобто зображуюча точка прагне до початку координат. У цьому випадку особлива точка $O_1(0; 0)$ називається особливою точкою типу *стійкий вузол*.

Кутові коефіцієнти дотичних до фазових траєкторій у початку координат

на площині $Y_1 O_1 Y_2$ обчислюються як $\frac{dY_2}{dY_1}$ при $Y_1 \rightarrow 0$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2}{dY_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2/dt}{dY_1/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \lambda \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

А це означає, що фазові траєкторії входять до початку координат, дотикаючись до осі $O_1 Y_1$.

Далі розглянемо випадок *додатних власних значень*. Нехай $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Й у цьому випадку фазові траєкторії задовольняють рівності (5.6), тобто є параболою. У початку координат фазові траєкторії дотикаються до осі $O_1 Y_1$, оскільки

$$\lim_{Y_1 \rightarrow 0} \frac{dY_2}{dY_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2/dt}{dY_1/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \lambda \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

Крім того, з (5.5) можна зробити висновок, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1 = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2 = \infty.$$

А це означає, що зображуюча точка віддаляється від початку координат. У цьому випадку особлива точка $O_1(0; 0)$ називається особливою точкою типу **нестійкий вузол** (рис. 5.1 б).

На рисунках 5.1 в, г наведено випадки, які відповідають умові $\lambda_2/\lambda_1 < 1$, тобто $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ та $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. По відношенню до фазових траєкторій у цьому випадку координатні осі змінюються місцями, фазові траєкторії дотикаються до осі $O_1 Y_2$ при входу до початку координат (стійкий вузол) або при виході з нього (нестійкий вузол).

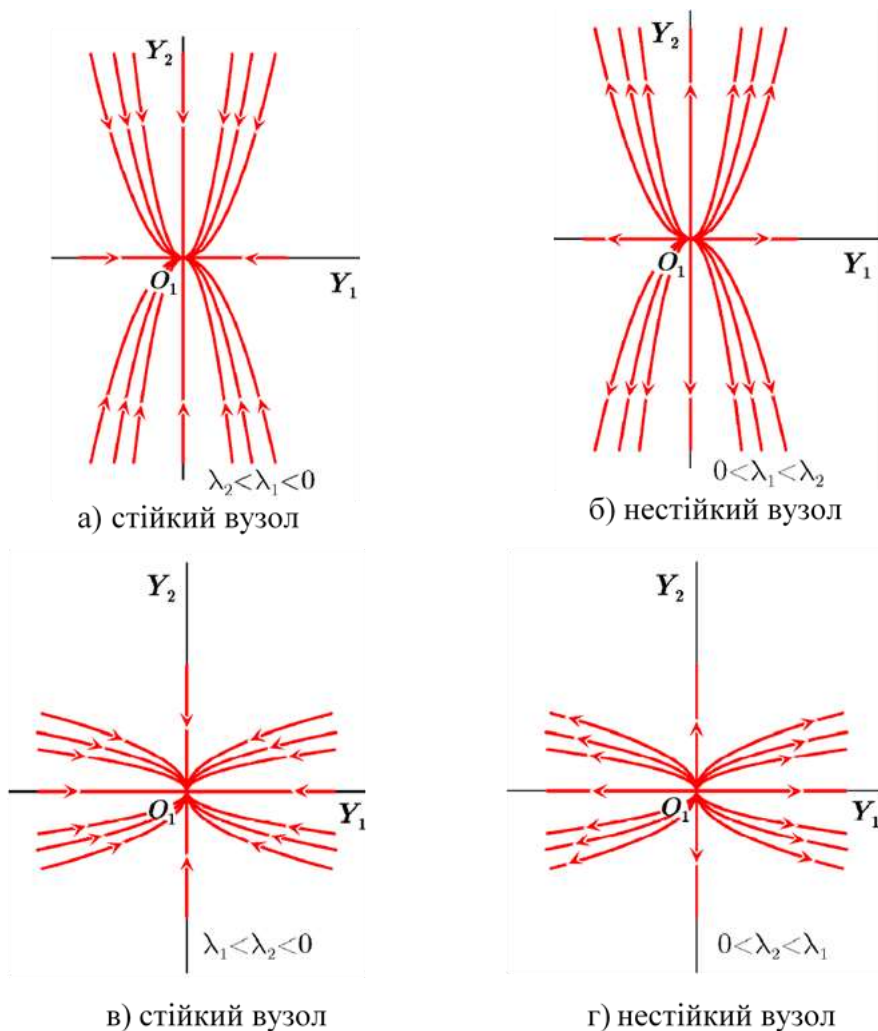


Рисунок 5.1 – Особливі точки та фазові траєкторії

Рівнянню параболи (5.6) можна надати канонічного вигляду

$$Y_1(t) = C^* \cdot Y_2(t)^{\lambda^*},$$

$$\text{де } C^* = \frac{1}{C} = \frac{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}}{C_2}, \lambda^* = \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1.$$

Випадок 2. Власні значення діагональної матриці A є рівними, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. При цьому

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

У даному випадку система (5.3) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda Y_1, \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda Y_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожне з диференціальних рівнянь зі змінними, що можна розділити, будемо мати розв'язок вказаної системи:

$$Y_1 = C_1 e^{\lambda t}, Y_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Аналогічно до попереднього випадку, півосі $O_1 Y_1$ та $O_1 Y_2$ також є фазовими траєкторіями. Виключаючи з розв'язку час t , отримаємо, що фазовими траєкторіями є прямі

$$Y_2 = \frac{C_2}{C_1} Y_1 = C Y_1,$$

які проходять через початок координат. Враховуючи симетрію отриманих фазових траєкторій відносно координатних осей, достатньо розглянути траєкторії лише в першому квадраті, де постійні C_1 та C_2 є невід'ємними.

Якщо власні значення $\lambda < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0,$$

при цьому зображуюча точка при $t \rightarrow \infty$ наближається до початку координат (див. рис. 5.2 а). Особлива точка $O_1(0; 0)$ у цьому випадку називається **стійким дикритичним вузлом**.

Якщо ж $\lambda > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \infty,$$

тобто зображуюча точка при $t \rightarrow \infty$ віддаляється від початку координат (рис. 5.2 б). Особлива точка $O_1(0; 0)$ називається у цьому випадку **нестійким дикритичним вузлом**.

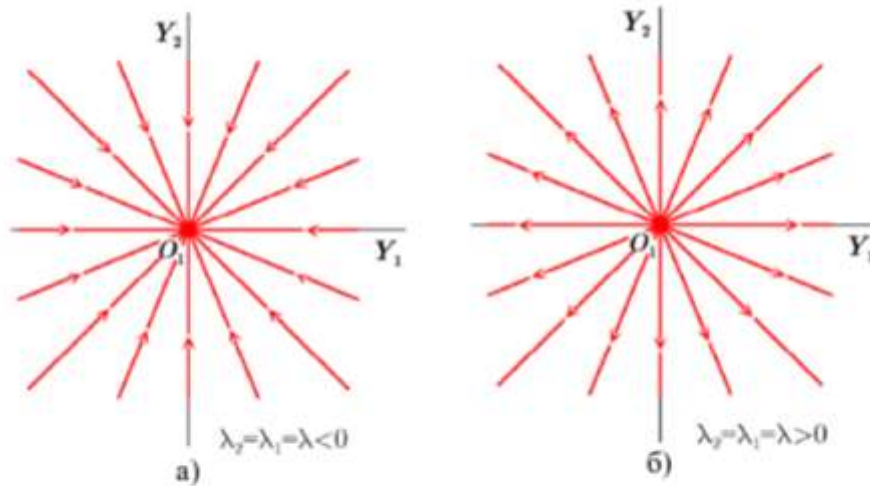


Рисунок 5.2 – Стійкий і нестійкий дикритичний вузол відповідно

Випадок 3. Власні значення недіагональної матриці A рівні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, при цьому жорданова матриця

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку система (5.3) записується наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \lambda Y_1 + Y_2, \\ \frac{dY_2}{dt} = \lambda Y_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Розв'язання другого рівняння цієї системи аналогічно до (5.4), тобто

$$Y_2(t) = C_2 e^{\lambda t},$$

а тоді перше рівняння (5.7) приймає вигляд

$$\frac{dY_1}{dt} - \lambda Y_1 = C_2 e^{\lambda t} \quad (5.8)$$

та є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Його розв'язок шукаємо за допомогою метода Бернуллі у вигляді

$$Y_1(t) = u(t)v(t),$$

тоді $\frac{dY_1(t)}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt}$. Отже, рівняння (5.8) запишеться у вигляді:

$$\frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt} - \lambda uv = C_2 e^{\lambda t} \quad \text{або} \quad \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \left(\frac{dv}{dt} - \lambda v \right) = C_2 e^{\lambda t}.$$

Розв'язання такого рівняння складається з двох етапів:

1) функції $u(t)$ та $v(t)$ підбираються так, щоб вираз, що стоїть у дужках останнього рівняння був рівним нулю:

$$\frac{dv}{dt} - \lambda v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \lambda dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \lambda \int dt \Rightarrow v(t) = e^{\lambda t};$$

2) функція $u(t)$ знаходиться з тих частин рівняння, що залишилися, тобто

$$\frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot 0 = C_2 e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{du}{dt} \cdot v = C_2 e^{\lambda t}.$$

Враховуючи, що $v = e^{\lambda t}$, тоді

$$\frac{du}{dt} \cdot e^{\lambda t} = C_2 e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{du}{dt} = C_2 \Rightarrow u(t) = C_2 t + C_1.$$

Таким чином, остаточно розв'язок диференціального рівняння (5.8) має вигляд:

$$Y_1(t) = (C_2 t + C_1) e^{\lambda t},$$

а розв'язок системи диференціальних рівнянь (5.7)

$$\begin{cases} Y_1(t) = (C_2 t + C_1) e^{\lambda t}, \\ Y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Оскільки система (5.7) не зміниться при одночасній заміні Y_1 на $(-Y_1)$ та Y_2 на $(-Y_2)$, то фазові траєкторії будуть симетричними відносно початку координат. Тобто достатньо дослідити поведінку фазових траєкторій у верхній напівплощині (при $C_2 \geq 0$) координатної площини $Y_1 O_1 Y_2$. На нижню напівплощину фазові траєкторії відображуються симетрично відносно початку координат.

Якщо в (5.9) покласти $C_1 \neq 0, C_2 = 0$, то отримаємо розв'язок

$$\begin{cases} Y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}, \\ Y_2(t) = 0. \end{cases}$$

Фазова траєкторія, що відповідає цьому розв'язку, представляє собою при $C_1 > 0$ додатну піввісь $O_1 Y_1$; а при $C_1 < 0$ – від'ємну піввісь $O_1 Y_1$.

Якщо $\lambda < 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (C_2 t + C_1) e^{\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2 t + C_1}{e^{-\lambda t}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]' = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(C_2 t + C_1)'}{(e^{-\lambda t})'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2}{-\lambda e^{-\lambda t}} = 0, \end{aligned}$$

тому зображуюча точка по довільній фазовій траєкторії прагне до початку координат, а особлива точка $O_1(0; 0)$ називається **стійким виродженим вузлом** (рис. 5.3 а).

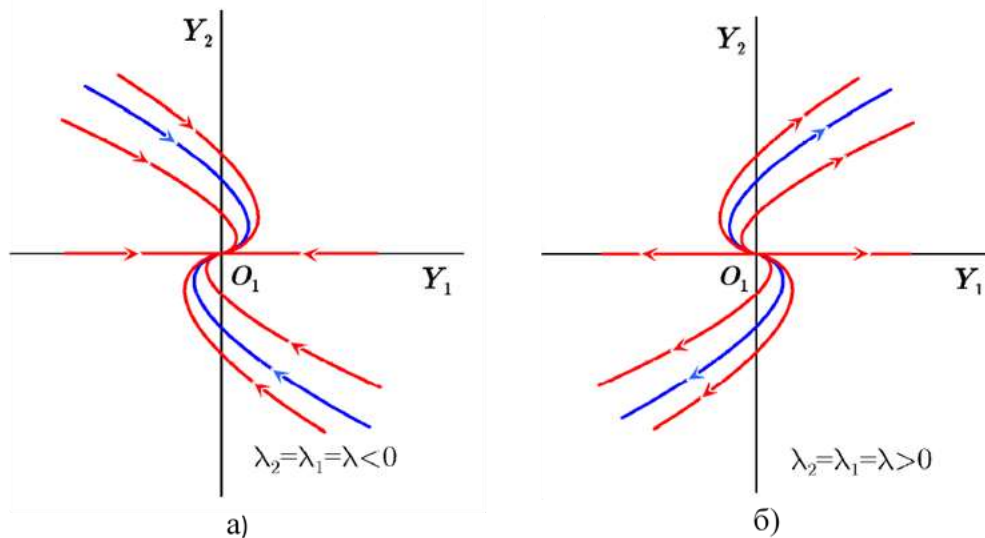


Рисунок 5.3 – Стійкий вироджений і невироджений вузол відповідно

Якщо $\lambda > 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (C_2 t + C_1) e^{\lambda t} = \infty$; $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_2 e^{\lambda t} = \infty$,

тобто зображуюча точка віддаляється від початку координат. Особлива точка $O_1(0; 0)$ у цьому випадку називається **нестійким виродженням вузлом** (фазові траєкторії, що відповідають випадку $\lambda > 0$, які зображено на рисунку 5.3 б).

Рівняння траєкторій можуть бути отримано безпосередньо з системи (5.7), якщо поділити її перше рівняння на друге: $\frac{dY_1/dt}{dY_2/dt} = \frac{\lambda Y_1 + Y_2}{\lambda Y_2}$, звідки

$$\frac{dY_1}{dY_2} = \frac{Y_1}{Y_2} + \frac{1}{\lambda}. \quad (5.10)$$

Рівняння, що отримано, є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Його розв'язок – функцію $Y_1(Y_2)$ – будемо шукати у вигляді $Y_1 = uv$. Тоді рівняння (5.10) запишеться у вигляді:

$$\frac{du}{dY_2} \cdot v + \frac{dv}{dY_2} \cdot u - \frac{uv}{Y_2} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{або} \quad \frac{du}{dY_2} \cdot v + \left(\frac{dv}{dY_2} - \frac{v}{Y_2} \right) u = \frac{1}{\lambda}.$$

Функцію $v(Y_2)$ знаходимо з рівняння $\frac{dv}{dY_2} - \frac{v}{Y_2} = 0$:

$$\frac{dv}{dY_2} = \frac{v}{Y_2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dY_2}{Y_2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dY_2}{Y_2} \Rightarrow v = Y_2;$$

а функцію $u(Y_2)$ – з рівняння $\frac{du}{dY_2} \cdot Y_2 = \frac{1}{\lambda}$:

$$du = \frac{dY_2}{\lambda Y_2} \Rightarrow u = \frac{1}{\lambda} \int \frac{dY_2}{Y_2} = \frac{\ln|Y_2|}{\lambda} + C.$$

Отже, шуканий розв'язок рівняння (5.10)

$$Y_1 = uv = \left(\frac{\ln|Y_2|}{\lambda} + C \right) Y_2 = \frac{Y_2 \ln|Y_2|}{\lambda} + CY_2. \quad (5.11)$$

При прагненні до початку координат кутовий коефіцієнт отриманих кривих дорівнює (згідно з (5.9))

$$\begin{aligned} \lim_{Y_1 \rightarrow \infty} \frac{dY_2}{dY_1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_2/dt}{dY_1/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda C_2 e^{\lambda t}}{C_2 e^{\lambda t} + \lambda(C_2 t + C_1) e^{\lambda t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda C_2}{C_2 + \lambda(C_2 t + C_1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2}{C_2/\lambda + C_2 t + C_1} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, фазові траєкторії у початку координат мають дотичну – вісь $O_1 Y_1$.

Кожна фазова траєкторія перетинає вісь $O_1 Y_2$ у точці, в якій $Y_1 = 0$, а ординати знаходяться з рівняння

$$\left(\frac{\ln|Y_2|}{\lambda} + C \right) Y_2 = 0.$$

Звідки $Y_2 = 0$, що відповідає особливій точці $O_1(0; 0)$, а також $\frac{\ln|Y_2|}{\lambda} + C = 0 \Rightarrow Y_2 = \pm e^{C\lambda}$.

З умови $\frac{dY_1}{dY_2} = 0$ знаходяться точки екстремуму функції $Y_1 = f(Y_2)$. Для

цього (5.11) диференціюємо та прирівнюємо отриманий вираз до нуля:

$$\frac{dY_1}{dY_2} = \frac{1}{\lambda} (\ln|Y_2| + 1) + C = 0,$$

звідси маємо, що $Y_2 = \pm e^{-(C\lambda+1)}$. А тоді відповідні екстремальні значення функції (5.11)

$$Y_1 = \left(\frac{\ln|Y_2|}{\lambda} + C \right) Y_2 = \pm e^{-(C\lambda+1)} \left(\frac{-(C\lambda+1)}{\lambda} + C \right) = \pm \frac{e^{-(C\lambda+1)}}{\lambda}.$$

Таким чином, для якісної побудови кожної з фазових траєкторій (рис. 5.3) маємо п'ять характерних точок кривої.

Випадок 4. Власні значення матриці A дійсні та різних знаків, для визначеності нехай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Система (5.4) та її розв'язок (5.5) у цьому випадку зберігають сенс, тобто

$$Y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, Y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Також зберігається симетрія фазових траєкторій відносно координатних осей. Тому, коли будемо проводити дослідження у першому квадранті, то довільні сталі $C_1, C_2 \geq 0$.

Якщо покласти $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, то отримаємо рівняння додатної півосі $O_1 Y_1$; якщо ж $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ – то рівняння додатної півосі $O_1 Y_2$. Отже, можна зробити висновок, що додатні півосі є фазовими траєкторіями. При $t \rightarrow \infty$ функція $Y_1 \rightarrow 0$, а функція $Y_2 \rightarrow \infty$.

Якщо вважати, що $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$, то для траєкторій, як і було показано

вище,

$$Y_2 = CY_1^\lambda,$$

де $C = \frac{C_2}{C_1^{\lambda_2/\lambda_1}}$, але $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 < 0$.

Фазові траєкторії при $\lambda < 0$ є кривими гіперболічного типу, які перетворюються на гіперболи при $\lambda = -1$.

Якщо зображуюча точка потрапить на одну зі вказаних траєкторій, то вона буде у результаті віддалятися від початку координат, що представляє собою нестійкий рівноважний стан (рис. 5.4). У цьому випадку особлива точка називається *сідлом*.

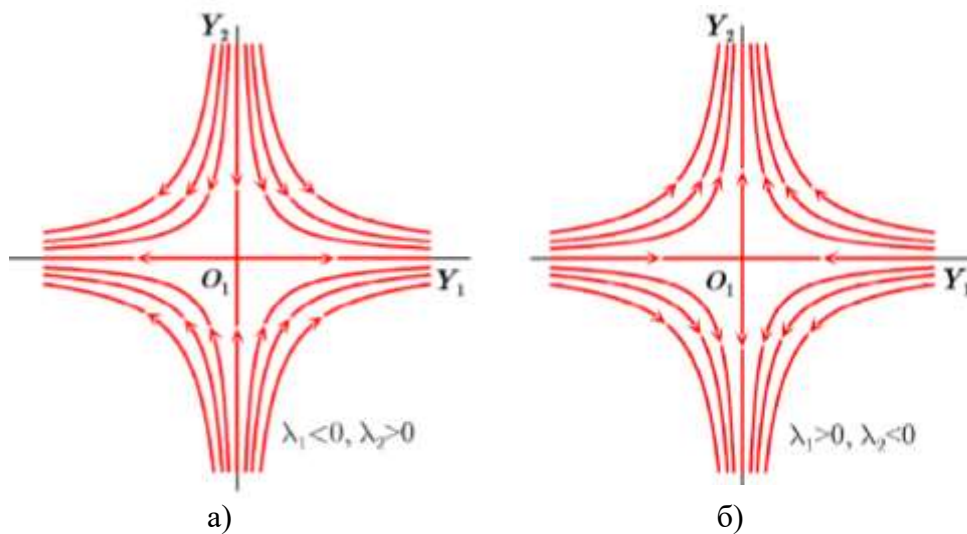


Рисунок 5.4 – Фазові траєкторії гіперболічного типу

Випадок 5. Власні значення матриці A комплексно-спряжені числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. При цьому матриця

$$J = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix}.$$

У даному випадку система (5.4) буде мати вигляд

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = (\alpha + \beta i)Y_1, \\ \frac{dY_2}{dt} = (\alpha - \beta i)Y_2; \end{cases} \quad (5.12)$$

а її розв'язок

$$\begin{cases} Y_1 = C_1 e^{(\alpha + \beta i)t} = C_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t}, \\ Y_2 = C_2 e^{(\alpha - \beta i)t} = C_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Використовуючи формули Ейлера для показникової функції уявного аргументу

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

розв'язок (5.13) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} Y_1 = C_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \\ Y_2 = C_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t). \end{cases}$$

Для отримання розв'язку у дійсній площині розглянемо лінійні комбінації

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}; \bar{Y}_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2i}.$$

Тоді у результаті будемо мати

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = e^{\alpha t} \left(\frac{C_1 + C_2}{2} \cos \beta t + \frac{C_1 - C_2}{2} i \sin \beta t \right), \\ \bar{Y}_2 = e^{\alpha t} \left(\frac{C_1 - C_2}{2i} \cos \beta t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin \beta t \right) \end{cases}$$

або, якщо ввести нові довільні сталі

$$\bar{C}_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}, \bar{C}_2 = \frac{C_2 - C_1}{2i},$$

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \cos \beta t - \bar{C}_2 i^2 \sin \beta t) = e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \cos \beta t + \bar{C}_2 \sin \beta t), \\ \bar{Y}_2 = e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \sin \beta t - \bar{C}_2 \cos \beta t). \end{cases} \quad (5.14)$$

Якщо позначити

$$\bar{C} = \sqrt{\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2}, \cos \theta = \frac{\bar{C}_1}{\bar{C}}, \sin \theta = \frac{\bar{C}_2}{\bar{C}},$$

то використовуючи формули синуса та косинуса різниці:

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta), \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta),$$

розв'язок (5.14) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = \bar{C} e^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \\ \bar{Y}_2 = \bar{C} e^{\alpha t} \sin(\beta t - \theta). \end{cases}$$

Отриманий розв'язок дуже зручно аналізувати у полярній системі координат (ПСК). Для цього введемо у розгляд полярний радіус $\rho(t)$ та полярний кут $\varphi(t)$, що є координатами зображуючої точки на фазовій траєкторії. Тоді

$$\rho(t) = \sqrt{\bar{Y}_1^2 + \bar{Y}_2^2} = \bar{C} e^{\alpha t},$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1} = \operatorname{tg}(\beta t - \theta) \text{ або } \varphi(t) = \beta t - \theta + \pi k, k \in Z.$$

З врахуванням того, що з останньої рівності $t = \frac{\varphi(t) + \theta - \pi k}{\beta}$, можна записати рівняння фазових траєкторій у полярних координатах

$$\rho(t) = \bar{C} e^{\frac{\alpha \cdot \varphi(t) + \theta - \pi k}{\beta}} = \bar{C} e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \bar{\varphi}(t)}, \quad (5.15)$$

де $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) + \theta - \pi k$.

Рівняння (5.14) представляє собою рівняння логарифмічної спіралі. При

цьому, якщо дійсна частина власного значення $\alpha < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ величина $\rho(t)$ зменшується й крива має вид, як показано на рисунку 5.5 а.

Особлива точка $O_1(0; 0)$ називається **стійким фокусом** і вона асимптотично наближається до початку координат. Якщо ж $\alpha > 0$, то при $t \rightarrow \infty$ величина $\rho(t)$ росте, а особлива точка називається **нестійким фокусом** (рис. 5.5 б).

У цьому випадку особлива точка асимптотично віддаляється від початку координат.

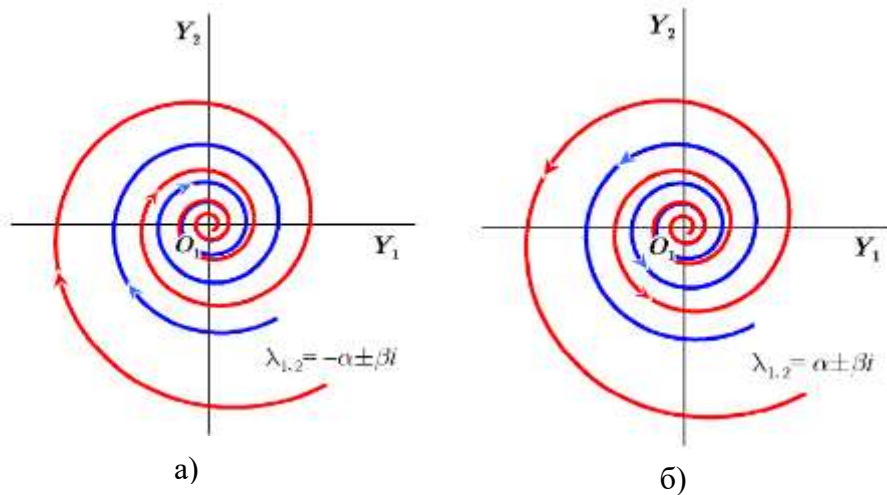


Рисунок 5.5 – Стійкий і нестійкий фокус відповідно

Випадок 6. Власні значення матриці A є чисто уявними комплексно-спряженими числами, тобто $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$. У цьому випадку

$$J = \begin{pmatrix} \beta i & 0 \\ 0 & -\beta i \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь (5.12) спрощується:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = i\beta Y_1, \\ \frac{dY_2}{dt} = -i\beta Y_2, \end{cases}$$

а рівняння траєкторій в ПСК є частинним випадком (5.15) при $\alpha = 0$, тобто

$$\rho(t) = \bar{C} e^{\frac{0}{\beta} \cdot \varphi(t)} = \bar{C}.$$

Отримане рівняння є рівнянням кола, а тому фазові траєкторії представляють собою сім'ю концентричних кіл (рис. 5.6).

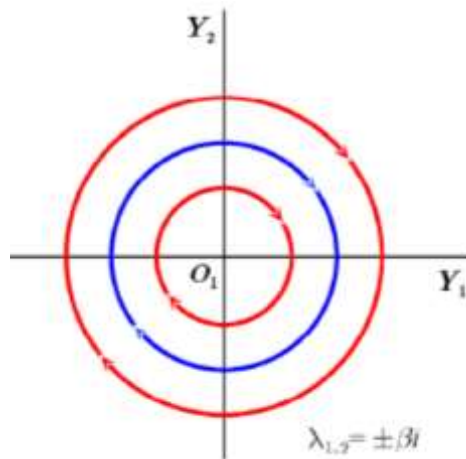


Рисунок 5.6 – Особлива точка типу центр

У цьому випадку особлива точка $O_1(0; 0)$ називається **особливою точкою типу центр**.

Динамічні системи, які мають особливу точку типу центр, називаються **консервативними**.

Запитання для самоперевірки

1. Коли особлива точка належить до типу нестійкий вузол?
2. Коли особливу точку називають стійким дикритичним вузлом?
3. За яких умов особлива точка є нестійким дикритичним вузлом?
4. Яка особлива точка називається нестійким виродженим вузлом?
5. За яких умов фазові траєкторії є кривими гіперболічного типу?
6. Який тип особливих точок відповідає фазовим траєкторіям гіперболічного типу?
7. Чим характеризується особлива точка типу сідло?

6 УМОВИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ТА СИСТЕМ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ

Мета: розглянути умови і критерії стійкості лінійних систем, геометричні інтерпретації залежності амплітуди коливань від характеру коренів характеристичного рівняння, довести необхідну й достатню умову стійкості лінійної системи, опанувати алгоритм побудови фазового портрета, класифікувати точки спокою у залежності від власних значень матриці системи.

Розв'язок характеристичного рівняння степеня n

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (6.1)$$

автономної системи (3.3) містить n коренів, які можуть бути дійсними, комплексними попарно спряженими, уявними попарно спряженими, дорівнювати нулю.

На рисунку 6.1 наведено усі можливі положення коренів рівняння (6.1) у комплексній площині коренів λ при $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, $\lambda_3 = \alpha_2 - \beta_2 i$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = -\alpha_5$, $\lambda_6 = -\alpha_6 + \beta_6 i$, $\lambda_7 = -\alpha_6 - \beta_6 i$.

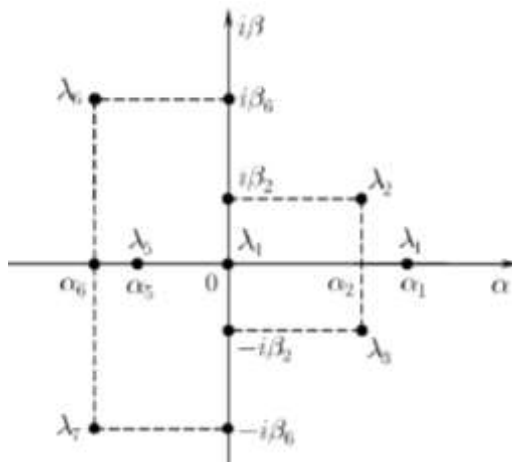


Рисунок 6.1 – Можливі розташування коренів рівняння (6.1)

Якщо всі корені рівняння (6.1) різні, то вони називаються **простими**; якщо серед коренів є рівні, то вони називаються **кратними**.

Зауваження 6.1 Зазвичай корені з від'ємними дійсними частинами прийнято називати **лівими коренями**, оскільки у комплексній площині коренів вони розташовані зліва від уявної вісі; а корені з додатною дійсною частиною – **правими**.

Умова стійкості лінійної системи: для того, щоб лінійна система була асимптотично стійкою, необхідно й достатньо, щоб всі корені її характеристичного рівняння були лівими.

Сформульована властивість легко пояснюється, якщо розглянути розв'язки автономної системи, які за умови кратності коренів мають вигляд:

$$x_j(t) = C_j e^{\lambda_j t},$$

де λ_j – корені характеристичного рівняння (6.1), C_j – постійні інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Зазначимо, що корені λ_j характеристичного рівняння (6.1) залежать лише від виду лівої частини системи (3.3). Постійні інтегрування залежать і від виду її правої частини, а тому швидкість загасання та форма перехідного процесу визначаються як лівою, так і правою частинами вихідної системи диференціальних рівнянь. Але, оскільки д поняття стійкості входить лише факт наявності або відсутності загасання перехідного процесу, то стійкість лінійної системи не залежить від вигляду правої частини та визначається лише характеристичним рівнянням (6.1). З того, що характер перехідного процесу в лінійній системі визначається лише за видом лівої частини (3.3), то для визначення якісної картини перехідних процесів практично байдуже чи записувати вихідну систему диференціальних рівнянь, чи систему відносно збурень.

Дійсним кореням $\lambda_j = \alpha_j$ в (6.1) відповідає розв'язок виду $C_j e^{\alpha_j t}$. Очевидно, що від'ємним (лівим) кореням $\alpha_j < 0$ відповідає загасання експоненти (рис. 6.2 а), додатним (правим) кореням $\alpha_j > 0$ – зростання експоненти (рис. 6.2 б); при нульових коренях $\alpha_j = 0$ доданки представляють собою прями, що паралельні осі часу (рис. 6.2 в).

Комплексні корені характеристичного рівняння завжди попарно спряжені, тобто якщо значення $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$ є коренем, то й $\lambda_{j+1} = \alpha_j - \beta_j i$ є також коренем. Розв'язки, що визначаються цими коренями, при використанні формули Ейлера $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$ можуть бути представлені у вигляді

$$C_j e^{(\alpha_j + \beta_j i)t} + C_{j+1} e^{(\alpha_j - \beta_j i)t} = A_j e^{\alpha_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j),$$

де A_j – амплітуда коливань, φ_j – початкова фаза.

В цьому випадку при $\alpha_j < 0$ маємо загасаючі коливання (рис. 6.2 г), при $\alpha_j > 0$ – розбіжні коливання (рис. 6.2 д) та при $\alpha_j = 0$ – незгасаючі коливання (рис. 6.2 е). Зрозуміло, що для стійкості й у випадку комплексних коренів необхідне виконання умови $\alpha_j < 0$.

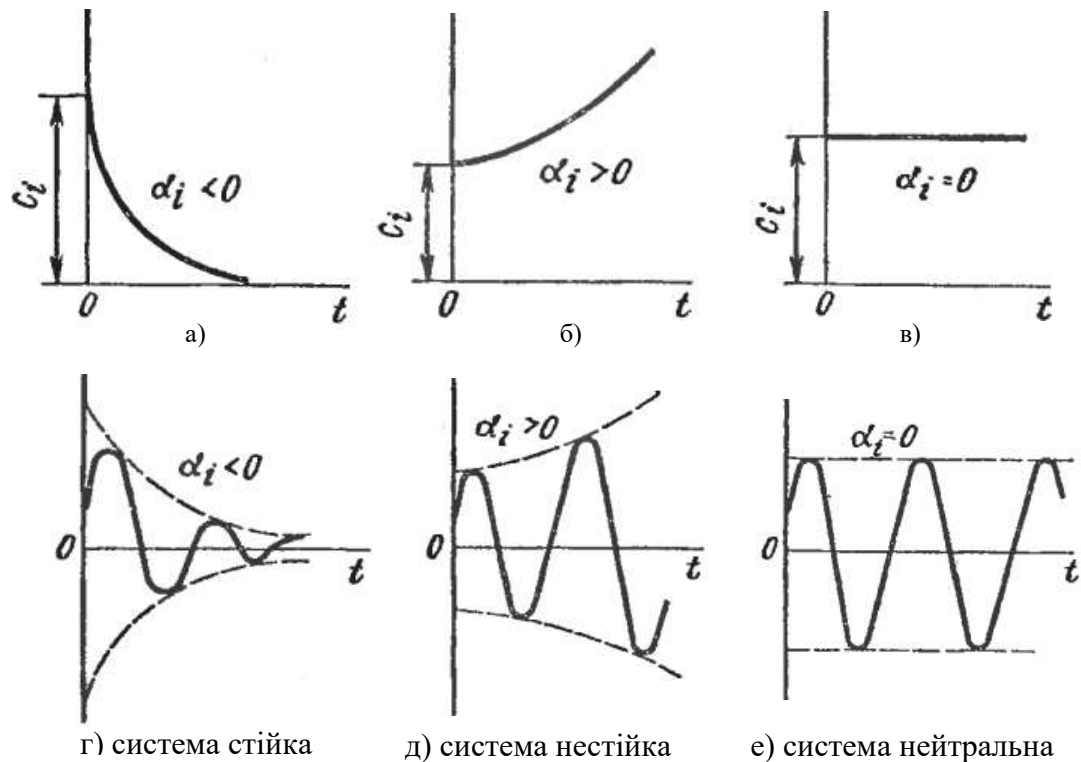


Рисунок 6.2 – Амплітуда коливань

У загальному випадку серед коренів характеристичного рівняння (6.1) можуть бути кратні. Якщо є r кратних коренів, то у розв'язку з'являється доданок виду $(C_{j,r-1}t^{r-1} + \dots + C_{j1}t + C_{j0})e^{\lambda_j t}$. При цьому, якщо корінь $\lambda_j = \alpha_j \pm \beta_j i$ має від'ємну дійсну частину: $\alpha_j < 0$, то множник $e^{\lambda_j t}$ буде з часом зменшуватися. При цьому множник, що стоїть у дужках, необмежено зростає, тому маємо невизначеність типу $[\infty \cdot 0]$. Проте відомо, що показникова функція $e^{-|\alpha_j|t}$ швидше прагне до нуля, ніж степенева $C_{j,r-1}t^{r-1}$, тому при $\alpha_j < 0$ ця група доданків з часом також прагне до нуля.

Таким чином, можна зробити висновок, що для стійкості лінійної системи необхідно та достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння (6.1) були лівими.

Знаходження коренів є достатньо простою процедурою лише у випадку, коли маємо характеристичне рівняння другого або третього степеня. Існують загальні вирази для коренів четвертого степеня, але вони є достатньо громіздкими й практично малоприматними для їх використання. Для рівнянь більш високого степеня записати аналітичні вирази для коренів, які будуть залежати від коефіцієнтів характеристичного рівняння, неможливо. Тому важливе значення набувають правила (критерії стійкості), які дозволяють встановити стійкість системи без обчислення коренів її характеристичного

рівняння. За їх допомогою можна не лише визначити стійкість системи, але й з'ясувати, як впливають на стійкість ті чи інші параметри та структурні зміни у системі.

Критерії стійкості можна розділити на *алгебраїчні* та *частотні*. Вдалий вибір того чи іншого критерію при розв'язанні конкретної задачі дозволяє провести більш раціональне та просте дослідження. Коли всі корені характеристичного рівняння є лівими, то многочлен, що відповідає визначнику характеристичного рівняння, називається **стійким поліномом**.

Вирішити питання про стійкість полінома можна без попереднього обчислення його коренів за допомогою спеціальних критеріїв, які були запропоновані Раусом, Гурвіцем, Найквістом, Михайловим тощо. Деякі з цих критеріїв, як вже зазначалось вище, дають можливість не лише встановити розподіл коренів полінома на комплексній площині, але й також визначити необхідні зміни параметрів системи, для того, щоб забезпечити стійкість її руху.

6.1 Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії стійкості дають можливість робити висновок про стійкість системи за коефіцієнтами характеристичного рівняння (6.1).

Необхідна умова стійкості: для того, щоб система довільного порядку була стійкою, необхідно, щоб усі коефіцієнти характеристичного рівняння були додатними:

$$a_i > 0, \forall i = \overline{0; n}.$$

Дійсно, згідно з теоремою Безу, рівняння (6.1) можна представити у вигляді добутку множників, які містять корені $\lambda_i, i = \overline{1; n}$, наступним чином:

$$a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0. \quad (6.2)$$

Якщо всі корені характеристичного рівняння від'ємні, то всі множники в (6.2) будуть мати вигляд

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_2|) \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0, \quad (6.3)$$

де $\lambda_j = -|\alpha_j|$ – значення коренів. Розкривши дужки у (6.3), отримаємо рівняння (6.1), в якому всі коефіцієнти будуть визначатися додатними величинами $|\alpha_j|$, а тобто будуть додатними.

Якщо характеристичне рівняння (6.1) має комплексні корені з від'ємними дійсними частинами, то воно може бути представлено у такому вигляді:

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_2| - \beta_2 i)(\lambda + |\alpha_2| + \beta_2 i) \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0$$

або

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|) \left[(\lambda + |\alpha_2|)^2 + \beta_2^2 \right] \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0.$$

Це рівняння також зводиться до рівняння (6.1) з додатними коефіцієнтами.

Зауваження 6.2 Для систем першого та другого порядків необхідна умова стійкості є також й достатньою, оскільки у цьому випадку при додатних

коефіцієнтах характеристичного рівняння всі його корені ліві. Проте для систем третього та більш високих порядків додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння є лише необхідною умовою, оскільки усі дійсні корені характеристичного рівняння (якщо вони є) ліві, а комплексні можуть бути й правими.

6.1.1 Критерій стійкості Рауса

Цей критерій стійкості було запропоновано у 1877 році англійським математиком та механіком, членом Лондонського королівського товариства Едвардом Джоном Раусом (1831-1907) у вигляді деякого алгоритму, який ілюструє таблиця 6.1.

У перший рядок цієї таблиці у порядку зростання індексів записуються коефіцієнти характеристичного рівняння (6.1) з парними номерами: a_0, a_2, a_4, \dots ; у другий рядок – коефіцієнти з непарними індексами: a_1, a_3, a_5, \dots . Будь-який інший елемент зазначеної таблиці визначається за формулою:

$$c_{ki} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1},$$

де $r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$, число k – індекс, який відповідає номеру стовпчика, а i – номер рядка в таблиці 6.1.

Зауваження 6.3 Число рядків таблиці Рауса на одиницю більше степеня характеристичного рівняння, тобто дорівнює $(n + 1)$.

Після того, як таблиця Рауса заповнена, за нею можна робити висновок про стійкість системи.

Критерій стійкості Рауса: для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпчика таблиці Рауса були одного знаку, тобто при $a_0 > 0$ були додатними:

$$c_{11} = a_0 > 0, c_{12} = a_1 > 0, c_{13} > 0, \dots, c_{1,n+1} > 0.$$

Якщо не всі коефіцієнти першого стовпчика додатні, то система нестійка, а число правих коренів характеристичного рівняння дорівнює числу зміни знаків у цьому стовпчику.

Таблиця 6.1 – Таблиця Рауса

Коефіцієнт r_i	Рядок (i)	Стовпчик (k)			
		1	2	3	4
–	1	$a_0 = c_{11}$	$a_2 = c_{21}$	$a_4 = c_{31}$...
–	2	$a_1 = c_{12}$	$a_3 = c_{22}$	$a_5 = c_{32}$...
$r_3 = a_0/a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_3 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_3 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_3 a_7$...
$r_4 = a_1/c_{13}$	4	$c_{14} = a_3 - r_4 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_4 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_4 c_{43}$...
$r_5 = c_{13}/c_{14}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44}$...
...
$r_5 = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$	i	$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_i c_{4,i-1}$...
...

Критерій Рауса особливо зручний, коли відомі числові значення коефіцієнтів характеристичного рівняння (6.1). У цьому випадку дослідження на стійкість можна виконати достатньо швидко навіть для характеристичних рівнянь вищих степенів.

6.1.2 Критерій стійкості Гурвиця

У 1895 році німецьким математиком Адольфом Гурвицем (1859-1919) було розроблено алгебраїчний критерій стійкості у формі визначників, які складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння (6.1) n -го порядку.

Спочатку будується *головний визначник Гурвиця* за наступним правилом: на головній діагоналі цього визначника зліва направо розташовують усі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n в порядку зростання індексів. Стовпчики вгору від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами характеристичного з послідовно зростаючими індексами, а стовпчики вниз – з послідовно спадними індексами. На місці з індексами більшими, ніж n та меншими від нуля, записують нулі. В результаті отримають наступний визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Запишемо головні діагональні мінори визначника Гурвиця:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \dots,$$

де номер визначника Гурвиця визначає номер коефіцієнта на головній діагоналі, для якого складено цей визначник.

Критерій стійкості Гурвиця: для того, щоб автономна система диференціальних рівнянь була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі визначники Гурвіца були додатними:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Розкриваючи, наприклад, визначники Гурвиця для характеристичних рівнянь першого, другого, третього та четвертого порядків, можна отримати наступні умови стійкості:

1) для характеристичного рівняння першого порядку ($n = 1$) $a_0\lambda + a_1 = 0$ умова стійкості $a_0 > 0, a_1 > 0$;

2) для рівняння другого порядку ($n=2$) $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ умова стійкості $a_i > 0, i = \overline{0; 2}$;

3) для характеристичного рівняння третього порядку ($n=3$) $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ умова стійкості

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0; \quad (6.4)$$

4) для рівняння четвертого порядку ($n=4$)

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

умова стійкості

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0. \quad (6.5)$$

Таким чином, для систем третього та четвертого порядків окрім умови додатності коефіцієнтів у якості необхідної та достатньої умов стійкості необхідна відповідність додатковим нерівностям (6.4) або (6.5).

При $n \geq 5$ число подібних додаткових нерівностей зростає, процес розкриття визначників стає доволі трудомістким. А тому критерій Гурвиця зазвичай застосовують у випадку $n \leq 4$.

У останньому стовпчику головного визначника Гурвиця відмінний від нуля лише один коефіцієнт a_n , а тому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Звідси можна зробити висновок, що при $a_n > 0$ для перевірки стійкості системи достатньо обчислити лише перших $(n-1)$ визначників Гурвиця. Якщо всі визначники нижчого порядку додатні, то система знаходиться на границі стійкості, коли головний визначник $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ дорівнює нулю. Останнє можливо лише у двох випадках: $a_n = 0$ або $\Delta_{n-1} = 0$. У першому випадку система знаходиться на межі аперіодичної стійкості (тобто один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю); у другому випадку – на межі коливальної стійкості (тобто два комплексно-спряжених кореня характеристичного рівняння лежать на уявній осі). Використовуючи критерій Гурвиця, можна при заданих параметрах системи прийняти за невідоме будь-який з параметрів та визначити його граничне (критичне) значення, при якому система буде знаходитися на границі стійкості.

Зауваження 6.4 Критерій Гурвиця можна отримати з критерію стійкості Рауса, а тому достатньо часто називають критерієм стійкості Рауса-Гурвиця.

6.1.3 Критерій стійкості Л'єнара-Шипара

Для дослідження стійкості систем, степінь характеристичних рівнянь яких $n \geq 5$, зручно застосовувати одну з модифікацій алгебраїчного критерію стійкості Гурвиця (див. п.п. 6.1.2), яка була запропонована у 1914 р. французьким фізиком та інженером Альфредом-Марі Л'єнаром (А.-М. Lienard, 1869-1958) та французьким математиком М. Шипаром (М.Н. Chipart).

Доведено, що у тому випадку, коли всі коефіцієнти характеристичного рівняння (6.1) додатні, то з того факту, що додатними є всі визначники з

непарними індексами $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots$, витікає і додатність визначників Гурвиця з парними індексами $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots$ і навпаки.

Тому у тих випадках, коли виконуються необхідні умови стійкості, тобто $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, необхідні й достатні умови стійкості зводяться до того, що серед визначників Гурвиця $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ були додатними усі визначники з парними (або непарними) номерами.

Критерій стійкості Л'єнара-Шипара: для того, щоб система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб були додатними усі коефіцієнти характеристичного рівняння (6.1) та визначники Гурвиця з непарними індексами:

$$\begin{cases} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots; \end{cases}$$

або з парними індексами:

$$\begin{cases} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots \end{cases}$$

Зауваження 6.5 Легко бачити, що потрібно розкривати меншу кількість визначників у порівняння з критерієм Гурвиця, а тому критерій Л'єнара-Шипара зручно використовувати при дослідженні стійкості динамічних систем високого порядку.

6.2 Частотні критерії стійкості. Принцип аргументу

Частотні критерії стійкості дозволяють робити висновок про стійкість систем за виглядом їх частотних характеристик. Ці критерії є графоаналітичними та отримали широке розповсюдження, оскільки дозволяють достатньо легко дослідити стійкість систем високого порядку, а також мають достатньо просту геометричну інтерпретацію.

В основі зазначених критеріїв стійкості лежить наслідок з відомого в теорії комплексної змінної *принципу аргументу*, суть якого коротко наведено нижче.

Нехай задано деякий многочлен n -го степеня виду (6.1). Згідно з теоремою Безу, його можна представити у вигляді

$$D(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

де $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ – це корені рівняння $D(\lambda) = 0$. На комплексній площині кожний такий корінь геометрично можна зобразити за допомогою вектора, який проведено з початку координат до точки λ_j (рис. 6.3 а). Модуль цього вектора дорівнює модулю комплексного числа λ_j , тобто $|\lambda_j|$, а кут, який

утворено зазначеним вектором з додатним напрямком дійсної осі, – аргументу або фазі цього ж комплексного числа λ_j , тобто $\text{Arg } \lambda_j$.

Величинам $(\lambda - \lambda_j)$ геометрично відповідають вектори, які проведено з точки λ_j до довільної точки λ (рис. 6.3 б). У частинному випадку при $\lambda = \beta i$ будемо мати

$$D(\lambda) = D(\beta i) = a_0(\beta i - \lambda_1)(\beta i - \lambda_2) \dots (\beta i - \lambda_n). \quad (6.6)$$

Кінці елементарних векторів $(\beta i - \lambda_j)$ будуть знаходитися на уявній осі в точці $\lambda = i\omega$ (рис. 6.3 в), а вираз $D(\beta i)$ в (6.6) представляє собою вектор, який дорівнює добутку елементарних векторів $(\beta i - \lambda_j)$ на дійсне число a_0 . А тому довжина цього вектора дорівнює добутку модулів елементарних векторів $(\beta i - \lambda_j)$ та старшого коефіцієнта a_0 :

$$|D(\beta i)| = a_0 |\beta i - \lambda_1| \cdot |\beta i - \lambda_2| \cdot \dots \cdot |\beta i - \lambda_n|;$$

та аргумент (або фаза) дорівнює сумі аргументів елементарних векторів

$$\text{Arg } D(\beta i) = \text{Arg}(\beta i - \lambda_1) + \text{Arg}(\beta i - \lambda_2) + \dots + \text{Arg}(\beta i - \lambda_n). \quad (6.7)$$

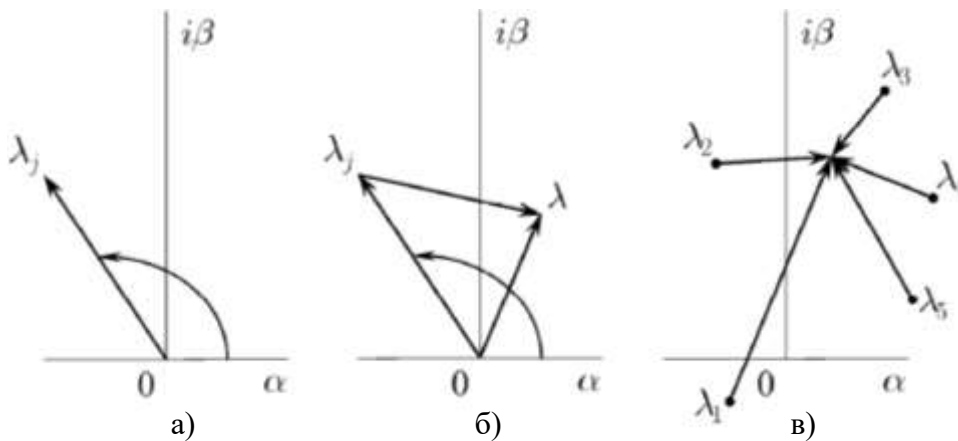


Рисунок 6.3 – Геометричне зображення комплексного кореня

Будемо вважати обертання проти руху годинникової стрілки додатним. Тоді при зміні β від $-\infty$ до $+\infty$ кожний елементарний вектор обернеться на кут π , якщо його початок, тобто точка-корінь λ_j , розташований зліва від уявної вісі; й на кут $(-\pi)$ – якщо справа від цієї осі (рис. 6.4).

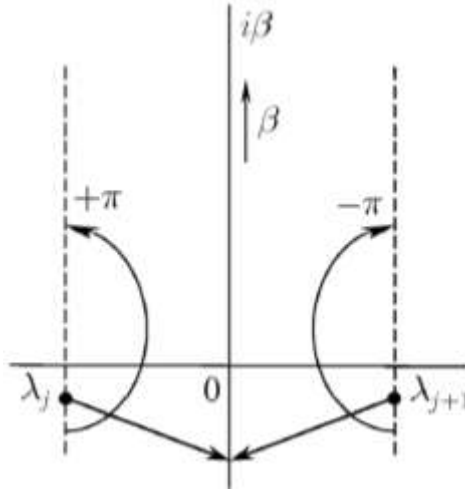


Рисунок 6.4 – Точка корінь розташована справа або зліва від уявної вісі

Припустимо, що поліном $D(\lambda)$ має m правих та $(n - m)$ лівих коренів. Тоді при зміні λ від $-\infty$ до $+\infty$ зміна (приріст) аргументу вектора $D(\beta i)$, яка дорівнює сумі кутів обертання векторів $(\beta i - \lambda_j)$, дорівнює

$$\Delta \text{Arg } D(\beta i) \Big|_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (6.8)$$

Звідси можна зробити висновок, що *приріст аргументу вектора $D(\beta i)$ при зміні частоти β від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює різниці між числом лівих та правих коренів рівняння $D(\lambda) = 0$, що помножена на π .*

Формула (6.8) називається **формулою Ерміта-Михайлова**.

Очевидно, що при зміні β від 0 до $+\infty$ зміна аргументу вектора $D(\beta i)$ буде вдвічі меншою:

$$\Delta \text{Arg } D(\beta i) \Big|_{\beta=0}^{\beta=+\infty} = \frac{\pi(n - 2m)}{2}. \quad (6.9)$$

Кожний з векторів $(\beta i - \lambda_j)$, що відповідає дійсним кореням, обернеться на кут $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ або $\frac{\pi}{2}$. Вектори $\beta i - (\alpha_j + i\beta_j)$, $\beta i + (\alpha_j + i\beta_j)$, які складають пару відповідну, наприклад, двом комплексно-спряженим кореням, обернуться один на кут $\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$, а другий $-\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, де γ – кут, що утворив вектор, проведений від кореня у початок координат, з віссю абсцис (рис. 6.5).

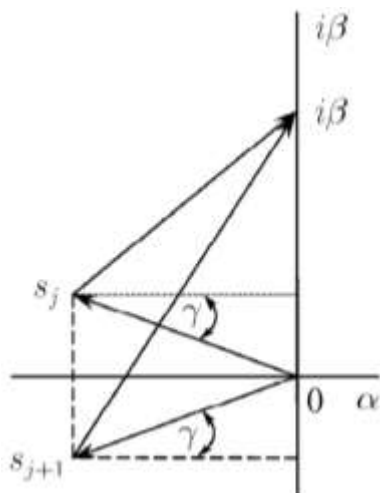


Рисунок 6.5 – Кути, які утворено векторами

Загальний приріст аргументу добутку вказаних векторів при зміні β від 0 до $+\infty$ дорівнює

$$\frac{\pi}{2} + \gamma + \frac{\pi}{2} - \gamma = \pi.$$

В основу всіх частотних критеріїв стійкості покладено рівняння (6.8), яке визначає приріст аргументу вектора $D(\beta i)$ при зміні частоти β від $-\infty$ до $+\infty$; або (6.9) – при зміні β від 0 до $+\infty$.

6.2.1 Частотний критерій стійкості Михайлова

Цей критерій було сформульовано у 1936 р. та опубліковано у 1938 р. радянським інженером А.В. Михайловим.

Нехай задано характеристичне рівняння (6.1) деякої системи. Якщо підставити в ліву частину $D(\lambda)$ цього рівняння значення $\lambda = \beta i$, то отримаємо комплексний многочлен

$$D(\beta i) = a_0(\beta i)^n + a_1(\beta i)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\beta i) + a_n = X(\beta) + iY(\beta) = D(\beta)e^{i\psi(\beta)}.$$

Тут функції

$$\begin{cases} X(\beta) = a_n - a_{n-2}\beta^2 + a_{n-4}\beta^4 - \dots, \\ Y(\beta) = \beta(a_{n-1} - a_{n-3}\beta^2 + a_{n-5}\beta^4 - \dots) \end{cases} \quad (6.10)$$

називаються **дійсною** та **уявною частинами функції Михайлова** відповідно; функції $D(\beta)$ та $\psi(\beta)$ представляють собою модуль та фазу (аргумент) вектора $D(\beta i)$.

При зміні частоти β вектор $D(\beta i)$, який змінюється за величиною та напрямком, буде описувати своїм кінцем в комплексній площині деяку криву, яка називається **годографом (кривою) Михайлова**.

Відповідно до (6.9) кут повороту $D(\beta i)$ навколо початку координат при зміні частоти β від 0 до $+\infty$ дорівнює $\Delta \text{Arg } D(\beta i) \Big|_{\beta=0}^{\beta=+\infty} = \frac{\pi(n-2m)}{2}$. Звідси

число правих коренів поліному $D(\lambda)$ дорівнює

$$m = \frac{\pi n}{2} - \Delta \operatorname{Arg} D(\beta i) \Big|_{\beta=0}^{\beta=+\infty}. \quad (6.11)$$

Тоді з (6.11) отримаємо умову, що коли число правих коренів m дорівнює нулю, то

$$\Delta \operatorname{Arg} D(\beta i) \Big|_{\beta=0}^{\beta=+\infty} = \frac{\pi n}{2}. \quad (6.12)$$

Ця умова є необхідною, але не достатньою умовою стійкості. Для того, щоб система була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі n коренів характеристичного рівняння були лівими. Інакше кажучи, серед них не повинно бути таких, що лежать на уявній осі та перетворюють на нуль комплексний многочлен $D(\beta i)$. Отже, повинна виконуватися ще одна умова

$$D(\beta i) \neq 0. \quad (6.13)$$

Зауваження 6.6 Формули (6.12), (6.13) є математичним записом критерію стійкості Михайлова.

Зауважимо, що для стійких систем крива Михайлова починається при $\beta = 0$ на дійсній півосі, оскільки при $a_0 > 0$ усі коефіцієнти характеристичного рівняння (6.1) додатні та $D(0) = a_n > 0$. Крім того, для стійких систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, фаза $\psi(\beta)$ зі збільшенням частоти β повинна зростати монотонно, тобто вектор $D(\beta i)$ повинен повертатися лише проти годинникової стрілки. Це пояснюється тим, що з ростом частоти монотонно зростають фази елементарних векторів $(\beta i - \lambda_j)$, які мають однакові (додатні) знаки (названі величини входять доданками в фазу вектора $D(\beta i)$ (6.7)).

Критерій стійкості Михайлова: для того, щоб динамічна система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб годограф Михайлова при зміні частоти β від 0 до $+\infty$ починався при $\beta = 0$ на дійсній додатній півосі та обходив лише проти руху годинникової стрілки послідовно n квадрантів координатної площини (тут, як і зазначалось вище, n – порядок характеристичного рівняння системи).

6.2.2 Криві Михайлова для стійких та нестійких систем

Крива Михайлова для стійких систем завжди має плавну форму у вигляді спіралі, причому її кінець ухоче в нескінченність у тому квадранті координатної площини, номер якого співпадає зі степенем характеристичного рівняння системи.

На рисунку 6.6 зображені типові криві Михайлова для стійких систем, які описуються рівняннями степеня від $n=1$ до $n=5$. Для зручності порівняння вільні коефіцієнти a_n у всіх випадках однакові.

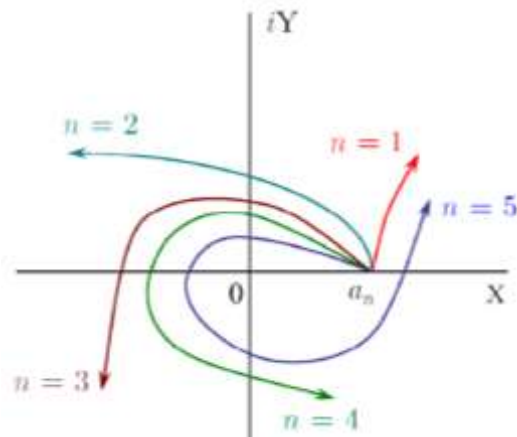


Рисунок 6.6 – Криві Михайлова для стійких систем

Ознакою нестійкості системи є порушення числа й послідовності пройдених кривою Михайлова квадрантів координатної площини, в наслідок чого кут повороту вектора $D(\beta i)$ виявиться меншим, ніж $\frac{\pi n}{2}$. Кількість прямих коренів нестійкої системи можна визначити за формулою (6.11).

На рисунку 6.7 наведені криві Михайлова для нестійких і нейтральних систем. На рисунку 6.7 а при $\beta=0$ крива починається на від'ємній дійсній півосі; система нестійка. На рисунку 6.7 б крива Михайлова відповідає порядку рівняння $n=5$ та повністю лежить у одному квадранті (цей випадку описує характеристичне рівняння $D(\lambda) = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2 = 0$); система нестійка. Рисунок 6.7 в – порушена послідовність проходу квадрантів; система нестійка. Рисунок 6.7 г – крива Михайлова починається в початку координат, тобто характеристичне рівняння має принаймні один нульовий корінь; система знаходиться на межі аперіодичної стійкості. Якщо цю криву Михайлова дещо деформувати (на рисунку – пунктирна лінія), то система стає стійкою. На рисунку 6.7 д крива Михайлова проходить при деякому значенні частоти β_k через початок координат, тобто коренями характеристичного рівняння є чисто уявні числа $\pm i\beta_k$; система знаходиться на границі коливальної стійкості; невелика деформація кривої (пунктирна лінія) призводить до стійкості системи. Рисунок 6.7 е – крива Михайлова проходить через початок координат, але її незначна деформація не задовольнить умовам стійкості; система нестійка.

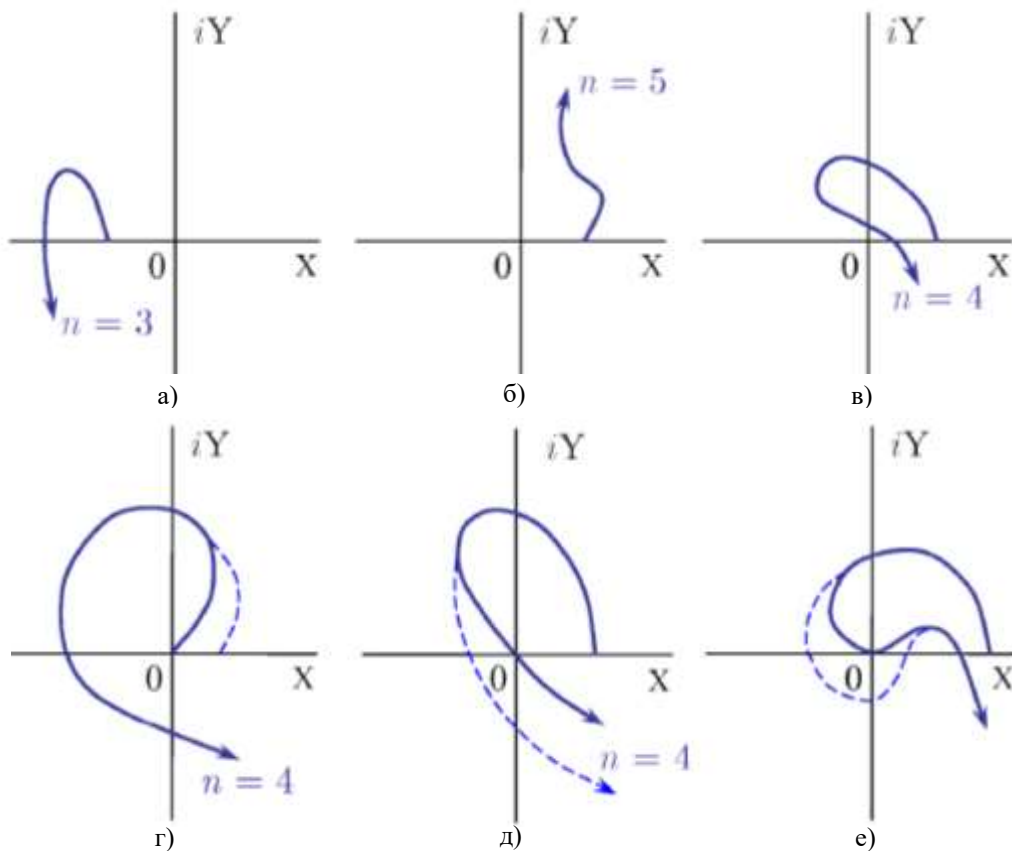


Рисунок 6.7 – Криві Михайлова для нестійких і нейтральних систем

Побудова кривої Михайлова практично може бути виконана методом контрольних точок, коли визначається ряд точок кривої, що відповідають фіксованим значенням частоти β з врахуванням частот точок перетину кривої з осями координат. Ці частоти точок перетину є розв'язками рівнянь

$$X(\beta) = 0, Y(\beta) = 0. \quad (6.14)$$

6.2.3 Наслідок з критерію стійкості Михайлова

Якщо проаналізувати годограф Михайлова, то можна встановити наступне.

Наслідок з критерію стійкості Михайлова: при послідовному проходженні кривої Михайлова квадрантів координатної площини дійсної та уявної вісі ця крива перетинає по черзі. В точках перетину з дійсною віссю дорівнює нулю уявна частина функції Михайлова $Y(\beta)$; а у точках перетину кривої з уявною віссю – її дійсна частина $X(\beta)$. Значення частот, при яких відбувається перетин кривої з вказаними координатними осями, знаходяться з рівнянь (6.14).

Функції Михайлова $X(\beta), Y(\beta)$ можна представити графічно у вигляді кривих як це показано на рисунку 6.8. Точки перетину цих кривих з віссю абсцис дають значення коренів рівнянь (6.14). Якщо значення $\beta_0, \beta_2, \beta_4, \dots$ – це

корені (6.10), а $\beta_1, \beta_3, \beta_5, \dots$ – корені рівняння (6.11), причому $\beta_0 < \beta_2 < \beta_4 < \dots$; $\beta_1 < \beta_3 < \beta_5 < \dots$, то для стійкості системи обов'язкове дотримання нерівностей

$$\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 \dots$$

Зауваження 6.7 У зв'язку з наведеним наслідком можна навести *альтернативне формулювання* критерію стійкості Михайлова: динамічна система буде стійкою тоді й лише тоді, коли дійсна $X(\beta)$ та уявна $Y(\beta)$ частини функції Михайлова мають лише дійсні корені, що чергуються; причому кількість цих коренів дорівнює порядку n характеристичного рівняння системи, а також при $\beta = 0$ мають місце умови $X(0) > 0, Y'(0) > 0$.

На рисунку 6.8 а, б наведено приклади графіків для стійкої та нестійкої систем відповідно.

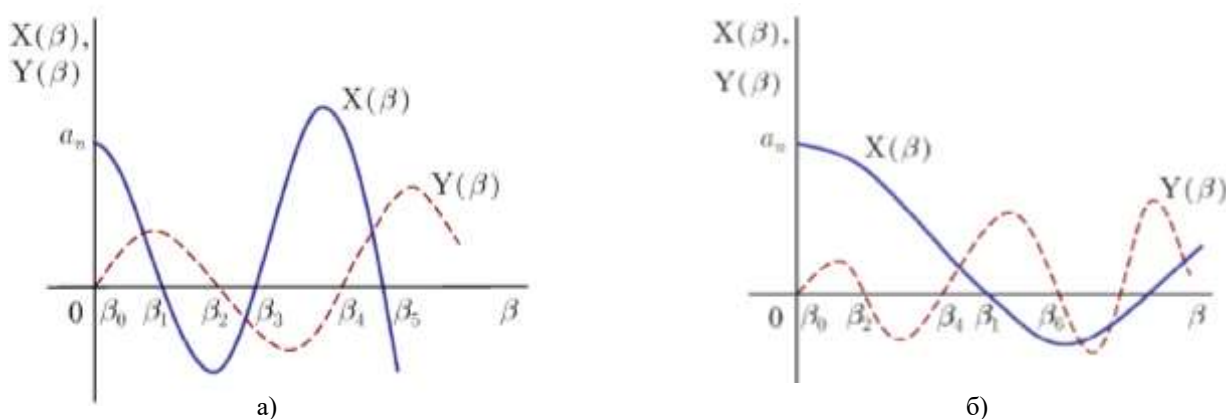


Рисунок 6.8 – Графіки стійкої та нестійкої систем відповідно

Для рівняння до шостого степеня включно умова чергування коренів дає можливість достатньо легко провести дослідження на стійкість, при цьому не потрібно зображувати криву Михайлова. Достатньо лише визначити корені рівняння $Y(\beta) = 0$, тоді чергування коренів рівнянь (6.14) можна перевірити підстановкою в $X(\beta)$ знайдених коренів рівняння $Y(\beta) = 0$. Як можна побачити з рисунка 6.8 а, знаки $X(\beta)$ при підстановці зростаючих за абсолютною величиною коренів повинні чергуватися.

Приклад 6.1 Дослідити на стійкість систему, характеристичне рівняння якої $D(\lambda) = \lambda^6 + 6\lambda^5 + 15\lambda^4 + 20\lambda^3 + 15\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$.

Розв'язання. Замінімо у заданому рівнянні λ на βi та після спрощень випишемо дійсну та уявну частини функції Михайлова:

$$X(\beta) = -\beta^6 + 15\beta^4 - 15\beta^2 + 1 = 0,$$

$$Y(\beta) = \beta(6\beta^4 - 20\beta^2 + 6) = 0.$$

Знаходимо корені останнього рівняння: $\beta_0 = 0, \beta^4 - \frac{10}{3}\beta^2 + 1 = 0$ або, розв'язуючи це бікватратне рівняння,

$$\beta_{2,4}^2 = \frac{10/3 \pm \sqrt{(10/3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{10}{6} \pm \frac{8}{6} \Rightarrow \beta_2^2 = \frac{1}{3}; \beta_4^2 = 3.$$

Зауваження 6.8 Знаходити самі значення β_2, β_4 не потрібно, оскільки якщо чергуються корені, то чергуються й їх квадрати.

Перевіримо тепер, чи чергуються знаки $X(\beta)$ при підстановці знайдених значень β_2^2, β_4^2 :

$$X(\beta_2) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \frac{1}{3} + 1 = -\frac{64}{27} < 0,$$

$$X(\beta_4) = -3^3 + 15 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 + 1 = 64 > 0.$$

Оскільки корені $Y(\beta)$ дійсні, а знаки ординат $X(\beta)$, що відповідають цим кореням, чергуються, то система є стійкою.

Відповідь. Система стійка.

6.3 Алгоритм побудови фазового портрета та аналізу стійкості лінійних автономних динамічних систем другого порядку

При дослідженні на стійкість та побудові фазового портрету автономної динамічної системи другого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

необхідно дотримуватися наступного алгоритму:

1) виписати матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ заданої системи, яка складається з

коефіцієнтів при невідомих в правих частинах рівнянь системи;

2) визначити точку спокою системи, для цього потрібно праві частини заданої системи прирівняти до нуля, тобто треба розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0. \end{cases}$$

Зауваження 6.9 Якщо отриманий розв'язок не нульовий, тобто у якості точки спокою маємо не початок координат $O(0; 0)$, а, наприклад, точку

$O(c_1; c_2)$, то за допомогою формул паралельного перенесення $\begin{cases} x_1 = x - c_1, \\ y_1 = y - c_2 \end{cases}$

потрібно початок координат перенести у цю точку спокою. При цьому, якщо

врахувати, що $\begin{cases} x = x_1 + c_1, \\ y = y_1 + c_2 \end{cases}$ та $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt}, \end{cases}$ то вихідну систему можна записати у

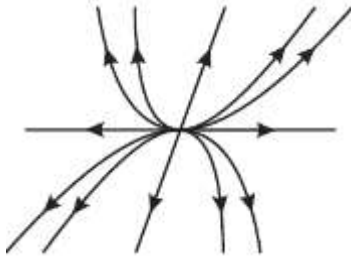
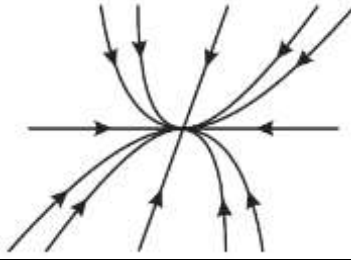
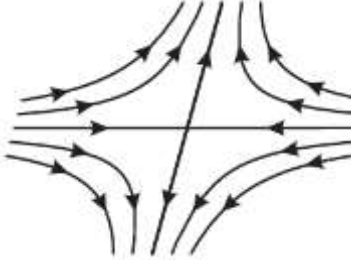
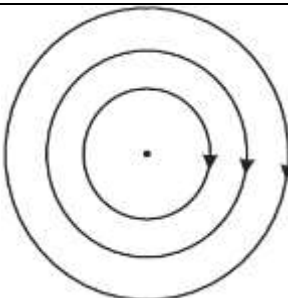
вигляді:

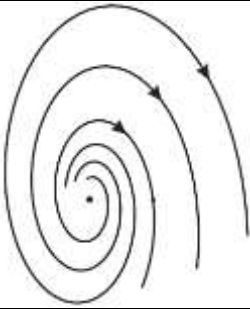
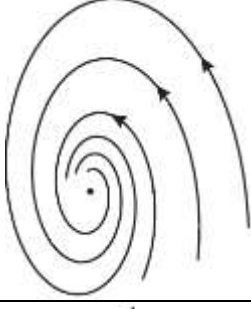
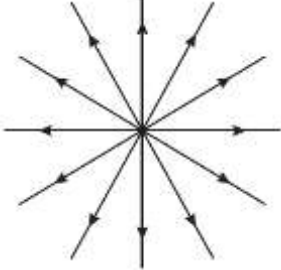
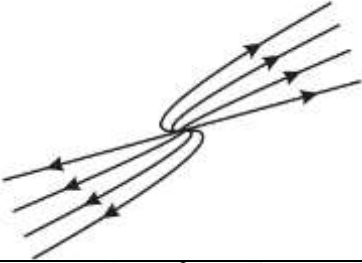
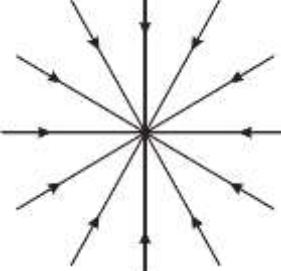
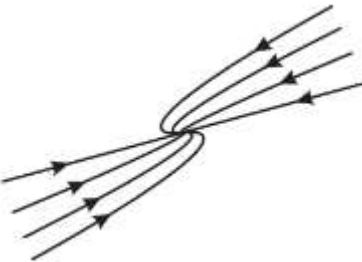
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}y_1; \end{cases}$$

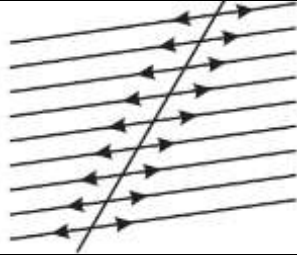
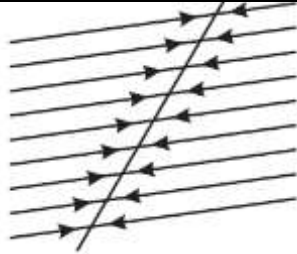
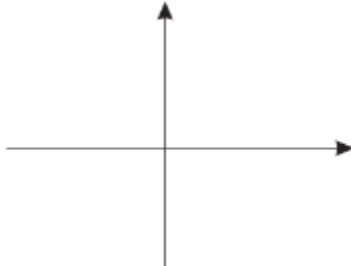
3) знайти власні значення λ_1, λ_2 матриці A як розв'язки характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$;

4) за нижче наведено таблицею 6.2 визначити тип точки спокою та зробити висновок про стійкість тривіального розв'язку;

Таблиця 6.2 – Класифікація точок спокою у залежності від власних значень матриці системи

Власні значення	Точка спокою	Фазовий портрет	Стійкість/ нестійкість тривіального розв'язку
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	нестійкий вузол		нестійкий
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	стійкий вузол		асимптотично стійкий
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	сідло		нестійкий
$\lambda_{1,2} = \pm \beta i$	центр		стійкий за Ляпуновим

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\alpha > 0$	нестійкий фокус		нестійкий
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\alpha < 0$	стійкий фокус		асимптотично стійкий
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda > 0$ матриця системи діагональна: $a_{11} = a_{22} = \lambda$ $a_{12} = a_{21} = 0$	дикритичний нестійкий вузол		нестійкий
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda > 0$ матриця системи недіагональна: $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$	вироджений нестійкий вузол		нестійкий
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda < 0$ матриця системи діагональна: $a_{11} = a_{22} = \lambda$ $a_{12} = a_{21} = 0$	дикритичний стійкий вузол		асимптотично стійкий
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda < 0$ матриця системи недіагональна: $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$	вироджений стійкий вузол		асимптотично стійкий

$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$	пряма		нестійкий
$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	пряма		стійкий за Ляпуновим
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	уся фазова площина		стійкий за Ляпуновим

5) побудувати фазовий портрет:

5.1) якщо точка спокою є *вузлом* або *сідлом*, то потрібно знайти власні вектори \bar{x}_1 та \bar{x}_2 матриці A та побудувати прямі, що визначаються цими векторами, на фазовій площині. Далі будуємо фазовий портрет, при цьому потрібно врахувати, що якщо точка спокою – вузол, то фазові траєкторії дотикаються до тієї прямої, що відповідає найменшому за абсолютною величиною власному значенню.

Зауваження 6.10 Прямі, що направлені вздовж власних векторів, називаються *сепаратрисами*.

5.2) якщо точка спокою – *центр* або *фокус*, то сім'ю фазових траєкторій можна отримати за допомогою методу ізоклін, якщо застосувати його до рівняння виду (5.1) (врахувавши в ньому, що $x_1 = x$, $x_2 = y$), або розв'язати це рівняння аналітично;

5.3) якщо множина точок спокою – *пряма*, то необхідно виписати рівняння цієї прямої, яке є розв'язком одного з рівнянь

$$a_{11}x + a_{12}y = 0 \text{ або } a_{21}x + a_{22}y = 0.$$

Рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$ сім'ї фазових траєкторій, що є прямими, в даному

випадку розв'язуються аналітично достатньо легко. В результаті чого множина точок спокою та фазові траєкторії будуються на фазовій площині;

5.4) у випадку *дискретичного вузла* або *фазової площини* фазовий портрет будується безпосередньо;

б) визначити напрямки руху фазовими траєкторіями та зобразити його за допомогою стрілок на фазовому портреті.

Зауваження 6.11 Для усіх типів точок спокою, окрім сідла та центру, визначення напрямку відбувається безпосередньо, оскільки напрямок руху однозначно визначається стійкістю (до початку координат) або нестійкістю (від початку координат) тривіального розв'язку.

Якщо ж точка спокою є *сідлом*, то спочатку потрібно вказати напрямок руху сепаратрисами, при цьому потрібно врахувати, що напрямок руху прямою, яка відповідає від'ємному власному значенню, відбувається до початку координат, а прямою, яка відповідає додатному власному значенню, – від початку координат. Іншими фазовими траєкторіями рух відбувається в сторону початку координат по вітках, які прилягають до сепаратриси від'ємного власного значення, й від початку координат по вітках, що прилягають до сепаратриси додатного власного значення.

Якщо точка спокою – це *центр*, то необхідно виписати деякий частинний розв'язок системи, проаналізувати характер зміни змінних x та y в залежності від значень часу t та визначити характер руху при цьому: за чи проти ходу годинникової стрілки.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає умова стійкості лінійної системи?
2. За яких умов зручно застосовувати критерій стійкості Рауса?
3. Яким чином можна отримати критерій стійкості Гурвиця з критерія Рауса?
4. Як формулюється критерій стійкості Л'єнара-Шипара?
5. Що таке принцип аргументу?
6. Як записується формула Ерміта-Михайлова?
7. Який вигляд має математичний запис критерію стійкості Михайлова?
8. Який важливий наслідок з критерію стійкості Михайлова?
9. Які основні етапи алгоритму побудови фазового портрета лінійної автономної динамічної системи другого порядку?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск : Ижевская республиканская типография, 2000. 368 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. 560 с.
3. Воронов А. А. Теория автоматического управления: учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». Москва : Высшая школа, 1986. 504 с.
4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва : ГИТТЛ, 1956. 600 с.
5. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Москва : Мир, 1984. 350 с.
6. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учеб. для студ. физ. спец. ун-тов. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 424 с.

Додаткова:

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Москва : Прогресс, 1975. 606 с.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва : Наука, 1969. 378 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Москва : Гостехтеориздат, 1945. 468 с.
4. Томпсон Д. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Москва : Мир, 1985. 254 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Ткаченко Ірина Григорівна
Кудін Олексій Володимирович
Гребенюк Сергій Миколайович
Кривохата Анастасія Григорівна

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»

Рецензент *М.І. Клименко*
Відповідальний за випуск *А.О. Лісняк*
Коректор *І.Г. Ткаченко*