Лекція 2 ЕЛЕМЕНТИ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ ТА ПРЕДИКАТІВ

2.1 Прості і складені висловлювання. Логічні закони

Під висловлюванням розуміють розповідне речення, про яке можна однозначно сказати: істинне воно чи хибне. Висловлювання позначають буквами латинського алфавіту *A, B, C*…. Якщо висловлювання A істинне, то пишуть $A=1$, якщо хибне, то $A=0$.

Приклади. 1) $A: 2\cdot 2=4$, отже, $A=1$; 2) $B: 2\cdot 2=5$, отже, $B=0$.

Висловлювання, подібні до A і B з прикладів, є простими або елементарними висловлюваннями, з них за допомогою логічних операцій отримують складені висловлювання.

Символи й терміни логічних операцій (список дано за ознакою пріоритетності):

1) « $\overline{}$ » – заперечення; читаємо «не»
2) «$\wedge$» або « $\cdot$ » – кон’юнкція; читаємо «і»
3) «$\vee$» – диз`юнкція; читаємо «або»
4) «$\Rightarrow$» або «$\rightarrow$» – імплікація; читаємо «якщо…, то…»
5) «$\Leftrightarrow$» або «$\leftrightarrow$» – еквіваленція читаємо «тоді і тільки тоді»

Якщо треба змінити порядок виконання логічних операцій, то користуються дужками.

Означення логічних операцій дамо за допомогою таблиць істинності:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \cdot B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Означення. *Формулою* в логіці висловлювань називається:

а) будь-яке елементарне висловлювання;

б) якщо A і B – формули, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ – також є формулами;

в) інших формул немає.

Означення. Дві формули A і B називаються *рівносильними*, якщо вони приймають однакові значення на всіх наборах значень істинності елементарних висловлювань, що входять у них. Позначають $A = B$.

Очевидно, що таблиці істинності рівносильних формул співпадають.

Приклади. 1) Формули $A = X \Rightarrow Y$ і $B = \overline{X} \vee Y$ рівносильні.

2) Формули $F = A \wedge B \vee C$ і $F' = A \wedge (B \vee C)$ нерівносильні.

Означення. Формула A в логіці висловлювань називається *тотожно істинною* (або *тавтологією*, або *логічним законом*), якщо вона приймає значення 1 (істина) при всіх допустимих наборах значень істинності простих висловлювань, які входять до неї.

Приклади. Формули 1) $A \vee \overline{A}$, 2) $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ – тотожно істинні.

Теорема 1.2. Формули A і B рівносильні (тобто $A = B$) тоді і тільки тоді, коли формула $A \Leftrightarrow B$ є тотожно істинною.

Зауваження. Попередня теорема дозволяє запис $A = B$ називати логічним законом. Наприклад, доведена вище рівносильність формул $A = X \Rightarrow Y$ і $B = \overline{X} \vee Y$ дає наступний логічний закон: $X \Rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$.

Приклади. 1) Формула $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$ є логічним законом.

2) Формула $a \Leftrightarrow b = \left(\overline{a} \vee b\right) \wedge \left(a \vee \overline{b}\right)$ є логічним законом.

Основні логічні закони

1. закони комутативності:
   $x \vee y = y \vee x$,
   $x \wedge y = y \wedge x$.
2. закони асоціативності:
   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
   $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
3. закони дистрибутивності:
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
4. закон подвійного заперечення:
   $\overline{\overline{x}} = x$.
5. закони де Моргана:
   $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$,
   $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.
6. закони ідемпотентності:
   $x \vee x = x$,
   $x \wedge x = x$.
7. закони поглинання:
   $x \vee (x \wedge y) = x$,
   $x \wedge (x \vee y) = x$.
8. закони протиріччя та виключеного третього:
   $\overline{x} \wedge x = 0$,
   $\overline{x} \vee x = 1$.
9. закони нуля та одиниці:
   $0 \vee x = x$,
   $0 \wedge x = 0$,
   $1 \vee x = 1$,
   $1 \wedge x = x$.
10. закони для імплікації:
    $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
    $\overline{x \Rightarrow y} = x \wedge \overline{y}$;
    $x \Rightarrow y = \overline{y} \Rightarrow \overline{x}$
11. закони для еквіваленції:

$$x \Leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y});$$
$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$$
$$x \Leftrightarrow y = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$$

Зауважимо, що доведення логічних законів зводиться до побудови таблиць істинності. Іншим способом доведення логічних законів є застосування основних логічних законів або раніше доведених логічних законів. Наприклад, для формули $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$ доведення виконується наступним чином:

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y) \vee (\bar{y} \vee x) = \bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee x = 1.$$

Означення. Формула A логіки висловлювань називається *тотожно хибною* (або *суперечливою*), якщо вона приймає значення 0 на кожному з наборів значень простих висловлювань, які входять до неї.

Очевидно, що коли A тотожно істинна формула, то $\bar{A}$ – тотожно хибна формула, і навпаки.

Означення. Формула A називається *нейтральною*, якщо вона ні тотожно істинна, ні тотожно хибна.

Наприклад, формула $a \Rightarrow \overline{b \wedge a}$ є нейтральною.

Означення. *Заперечення*, яке відноситься до елементарного висловлювання, називається *простим*, у противному випадку заперечення називається *складним*.

Означення. Формула логіки висловлювань називається *зведеною*, якщо вона побудована тільки за допомогою операцій диз’юнкції, кон’юнкції і простого заперечення.

Теорема 2.1 Кожну формулу логіки висловлювань можна замінити рівносильною їй зведеною формулою.

2.2 Види теорем. Методи доведення теорем. Необхідні й достатні умови

Розглянемо імплікацію $A \Rightarrow B$, де A та B – деякі висловлювання. Якщо з істинності A випливає істинність B, то B називають логічним наслідком A. Далі будемо розглядати тільки такий випадок.

Будь-яку теорему можна представити у вигляді імплікації $A \Rightarrow B$.

Приклади.

1) Сума кутів трикутника дорівнює π.

Позначимо через A висловлювання: «α, β, γ – кути трикутника», а через B висловлювання: «$\alpha + \beta + \gamma = \pi$». Тоді теорему можна сформулювати так: якщо α, β, γ – кути трикутника, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

2) Не існує найбільшого простого числа.

Позначимо: через A висловлювання «p – просте число», через B - «існує просте число p', більше числа p». Тоді теорему можна сформулювати так: якщо p – просте число, то існує більше за p просте число p'.

Зауваження. Висловлювання A в імплікації $A \Rightarrow B$ може бути складним. Наприклад, розглянемо теорему: «Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні або попарно паралельні, то такий чотирикутник є паралелограмом». Позначимо A_1 : протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, A_2 : протилежні сторони чотирикутника попарно паралельні, B : чотирикутник є паралелограмом. Тоді теорема запишеться так: $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$.

Означення. Нехай дано теорему $A \Rightarrow B$. Будемо називати її *прямою теоремою*. Теорема $B \Rightarrow A$ називається *оберненою* до даної теореми, теорема $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – *протилежною*, теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – *оберненою до протилежної* (або *протилежною до оберненої*).

Теорема 2.2 $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Ця теорема є логічним обґрунтуванням *методу доведення від супротивного*. Наведемо й інші схеми доведення від супротивного, які випливають з попередньої теореми:

1) $(A \Rightarrow B) = \left(\overline{A \Rightarrow B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right)$,

2) $(A \Rightarrow B) = (A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A})$,

3) $(A \Rightarrow B) = (A \wedge \overline{B} \Rightarrow B)$.

Означення. Якщо має місце теорема $A \Rightarrow B$, то умова B називається *необхідною* для A, а умова A *достатньою* для B. Якщо ж поряд з теоремою $A \Rightarrow B$ має місце і обернена теорема $B \Rightarrow A$, то кожна з умов A та B буде одночасно *необхідною і достатньою* для іншої. У цьому випадку пишуть $A \Leftrightarrow B$ і називають теорему критерієм або ознакою та при її формулюванні використовують зв'язку «необхідно і достатньо» або «тоді і тільки тоді», або «якщо і тільки якщо».

Приклади. 1) В теоремі «Якщо трикутник рівнобедрений (A), то кути при його основі рівні між собою (B)» умова A є достатньою для умови B, а умова B – необхідною для A. Зауважимо, що має місце теорема «Якщо в трикутнику два кути рівні між собою (B), то цей трикутник рівнобедрений (A)», тобто теорема, обернена до даної. Отже, кожна з умов A та B є необхідною та достатньою для іншої.

2) В теоремі «Якщо число a ділиться на чотири (A), то a є парним (B)» умова A є достатньою для B, а B – необхідною для A. Обернена до цієї теорема не має місця.

В задачах та теоремах дискретної математики часто використовують *доведення перебором можливих випадків.* Наведемо для демонстрації цього методу доведення такої теореми.

Теорема 2.3 Нехай n - ціле число. Тоді $n^2 \geq 0$.

Доведення. Оскільки n - ціле число, то воно або додатне, або від’ємне, або дорівнює 0. Якщо n додатне, то $n^2 \geq 0$. Якщо n від’ємне, то $n = -m$ для деякого додатного цілого числа m. Тому $n^2 = (-m) \cdot (-m) = m^2$ знову є додатним. Якщо $n = 0$, то $n^2 = 0$, так. Отже, при будь-якому цілому n маємо $n^2 \geq 0$.

Практичне заняття 2

Задача 1. Чи вірні висловлювання:

1) множина $A = \{x \in I : x^2 + 1 \in Q\}$ є порожньою;

2) множина $A = \{x \in N : x^2 = 9\}$ складається з одного елемента;

3) булеан множини $A = \{x \in Z : x^2 = 9\}$ складається з 4 елементів?

Розв'язання. 1) Покладемо $x = \sqrt{2} \in I$, тоді $x^2 + 1 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3 \in Q$. Отже, множина A не порожня. Не складно довести, що кількість її елементів нескінченна. Висловлювання хибне.

2) Дійсно, коренями рівняння $x^2 = 9$ є два числа ± 3, але елементами множини A є тільки натуральні числа. Отже, $A = \{3\}$.

3) Вірно, оскільки $A = \{-3,3\}$, тоді $P(A) = \{\{-3\},\{3\},\{-3,3\},\varnothing\}$.

Задача 2. Довести логічні закони: а) $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$, б) $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

Розв'язання. а) Доведення полягає в складанні таблиці істинності.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	**1**	1	**1**
0	1	**1**	1	**1**
1	0	**0**	0	**0**
1	1	**1**	0	**1**

Третій та п’ятий стовпці таблиці однакові, тому формула є логічним законом.

Аналогічне доведення для формули б).

Задача 3. Довести рівність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ для множин *A,B,C.*

Доведення.

$(\forall a)\ a \in (A \setminus B) \setminus C \ \Rightarrow\ a \in (A \setminus B) \wedge a \notin C \ \Rightarrow\ (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C \Rightarrow$
$\Rightarrow (a \in A \wedge a \notin C) \wedge a \notin B \Rightarrow a \in A \setminus C \wedge a \notin B \setminus C \Rightarrow a \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$

Значить $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$**.**

Нехай тепер $a \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. Тоді $a \in (A \setminus C) \wedge a \notin (B \setminus C)$, звідки $a \in A \wedge a \notin C \wedge a \notin B$. З цього випливає $a \in A \setminus B \wedge a \notin C \Rightarrow a \in (A \setminus B) \setminus C$. **Доведено, що** $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$**.**

Рівність множин випливає з третьої властивості відношення $\subseteq$.

Задача 4. Довести рівності: а) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$,

б) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Доведення.

а) $(\forall a)\ a \in (A \cup B) \setminus B \ \Rightarrow\ a \in (A \cup B) \wedge a \notin B \ \Rightarrow\ (a \in A \vee a \in B) \wedge a \notin B$.

Далі скористаємось логічним законом $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, одержимо $(a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \in B \wedge a \notin B) \ \Rightarrow\ a \in A \setminus B \vee a \in \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow\ a \in (A \setminus B) \cup \varnothing \Rightarrow a \in (A \setminus B)$. Доведено включення $(A \cup B) \setminus B \subseteq A \setminus B$.

Нехай тепер $a \in (A \setminus B)$. Тоді $a \in A \wedge a \notin B \ \Rightarrow\ a \in A \cup B \wedge a \notin B \ \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in (A \cup B) \setminus B$, тобто $A \setminus B \subseteq (A \cup B) \setminus B$. Рівність а) доведено.

б) довести самостійно.

Задача 5. Довести, що формула $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ є тотожно істинною**.**

Доведення. Дійсно,

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = \overline{(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}} \vee \overline{A} = \overline{A \Rightarrow B} \vee B \vee \overline{A} = A \wedge \overline{B} \vee \left(B \vee \overline{A}\right) =$$
$$= \left(B \vee \overline{A} \vee A\right)\left(B \vee \overline{A} \vee \overline{B}\right) = 1$$

.

Задача 6. Дано теорему: «В рівних трикутниках навпроти рівних кутів лежать рівні сторони». Сформулювати обернену теорему.

(*Вказівка*. Переформулювати теорему у вигляді: «Якщо два трикутники рівні (*A*), то з рівності двох кутів цих трикутників (*B*) випливає рівність протилежних до них сторін». Тоді символічний запис теореми має вигляд $A \to (B \to C)$. Показати, що ця формула рівносильна формулі $B \to (A \to C)$ або формулі $A \wedge B \to C$. Для кожного з цих варіантів сформулювати обернену теорему.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Довести, що формула $(p \vee q)(p \to r)(q \to r) \to r$ є тавтологією.
2. Спростити формулу $\overline{A \vee B \vee C} \cdot A \cdot \left(B \vee \overline{C}\right) \cdot \overline{B}$.
3. Виразити всі основні операції через імплікацію і заперечення.
4. Дано теорему: «У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою». Сформулювати всі види теорем для цієї теореми. З'ясувати питання про необхідні і достатні умови.
5. Дослідити структуру теореми про три перпендикуляри та сформулювати обернену до неї.
6. Довести теорему: «Якщо n парне, то n^2 також парне». Застосувати метод від супротивного для доведення оберненої теореми.
7. Застосувати метод перебору для доведення теореми: «$a^2 \geq a$» для будь-якого цілого числа *a*.

8. Якщо a,b,c - цілі числа, то які зі слів «необхідно», «достатньо», «необхідно та достатньо» треба вставити замість крапок, щоб отримати вірне твердження:

1) Для того, щоб $a = 0$, …, щоб $ab = 0$;
2) Для того, щоб ab ділилось на 5, …, щоб a або b ділилось на 5;
3) Для того, щоб ab ділилось на 6, …, щоб a або b ділилось на 6;
4) Для того, щоб ab ділилось на деяке число, …, щоб a або b ділилось на це число;
5) Для того, щоб $a + b$ було непарним, …, щоб a або b було непарним.