Лекція 3 Предикати. Квантори

Означення. Твердження, яке залежить від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і перетворюється у висловлювання в результаті заміни всіх змінних їхніми значеннями з деякої множини M, називається n – *місним предикатом, заданим на множині* M. Позначається $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Підмножина впорядкованих наборів з n елементів множини M, при яких предикат перетворюється в істинне висловлювання, називається *областю істинності предиката*. Позначається $I(P)$.

Приклади.

1) $M = R, P(x): "x < 5"$ – одномісний предикат на множині дійсних чисел. $P(1): "1 < 5"$ – істинне висловлювання, $P(7): "7 < 5"$ хибне висловлювання. Областю істинності предиката є множина $I(P(x)) = \{x \in R : x \in (-\infty; 5)\}$.

2) $M = R, P(x, y): "y = sin\, x"$ – двомісний предикат на множині дійсних чисел. $P(0,0)$: $"0 = sin\, 0"$ – істинне висловлювання, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $"\frac{1}{2} = sin \frac{1}{2}"$ – хибне висловлювання. Областю істинності предиката є множина $\mathrm{I}(P(x, y)) = \{(x, y) : y = \sin x\}$.

3) $M = N, P(x, y): "x \vdots y"$ – двомісний предикат на множині натуральних чисел. $P(2,1): "2 \vdots 1"$ – істинне висловлювання, $P(2,3): "2 \vdots 3"$ – хибне висловлювання.

4) $P(x, y, z): "x + y + 2z = 1"$ – тримісний предикат, заданий на множині цілих чисел.

Зауваження. Якщо зафіксувати одну зі змінних в n – місному предикаті, то одержимо $(n-1)$ – місний предикат.

Приклад. $P(x, y): "x < y"$ – двомісний предикат, заданий на множині дійсних чисел. Покладемо $y = 5$, тоді $P(x,5) = P(x): "x < 5"$ – одномісний предикат.

Так як значення предикатів є висловлюваннями, то над ними можна виконувати ті ж логічні операції, що і над висловлюваннями. Наприклад, якщо $P(x)$ та $Q(x)$ – одномісні предикати, то $P(x) \vee Q(x)$ – диз'юнкція, $P(x) \wedge Q(x)$ – кон'юнкція цих предикатів, а $\overline{P(x)}$ – заперечення предиката $P(x)$.

Приклади.

1) Запереченням предиката $P(x): "x < 5"$, заданого на множині дійсних чисел, є предикат $\overline{P(x)}: "x \geq 5"$.

2) Кон'юнкцією предикатів $P(x): "x < 3"$ і $Q(x): "x \vdots 2"$, заданих на множині N, є предикат $P(x) \wedge Q(x)" x < 3 \wedge x \vdots 2"$.

Логічним операціям над предикатами відповідають операції над множинами, що є їхніми областями істинності. Наприклад, область істинності кон'юнкції предикатів дорівнює перетину областей істинності цих предикатів. У попередньому прикладі маємо $I(P(x) \wedge Q(x)) = I(P(x)) \cap I(Q(x)) = = \{1,2\} \cap \{x \in N \mid x \vdots 2\} = \{2\}$.

Крім зазначених логічних операцій над предикатами, використовується ще операція приписування кванторів до предиката, яку називають *зв'язуванням змінних* або *квантифікацією*. Найчастіше використовують квантори двох видів: *квантор загальності* (позначається символом $\forall$. Читається «для всіх…», «для кожного…», «для будь-якого…» або «кожний…», «будь-який…»), *квантор існування* (позначається символом $\exists$. Читається: «існує…» або «знайдеться…»).

Ми вже знаємо, що із предиката від n змінних можна одержати предикат від $n-1$ змінної, якщо зафіксувати одну зі змінних. Є й інший спосіб – приписати квантор. Наприклад, із предиката $P(x,y)$ від двох змінних одержуємо предикат $(\forall x \in M)\, P(x,y)$ від однієї змінної y, із предиката $P(x)$ від однієї змінної одержуємо висловлювання $(\exists x)\, P(x)$.

Побудова заперечень математичних тверджень, що містять квантори, відбувається за наступними правилами:

$$\overline{(\forall x)P(x)} = (\exists x)\overline{P(x)}, \quad \overline{(\exists x)P(x)} = (\forall x)\overline{P(x)}.$$

Приклади.

1) Запереченням твердження «Кожне натуральне число – парне» є твердження «Існують натуральні числа, які не є парними».

2) Для твердження «$(\forall x \in N)(\exists y \in N)\ x \vdots y$» заперечення має вигляд «$(\exists x \in N)(\forall y \in N)\ \overline{x \vdots y}$».

Питання для самоконтролю

1. *Означення та приклади висловлювань.*
2. *Предикати. Приклади.*
3. *Висловлювання, що містять квантори.*
4. *Означення операцій над висловлюваннями.*
5. *Властивості операцій над висловлюваннями.*
6. *Побудова заперечення висловлювання, що містить квантори. Приклади.*
7. *Закони алгебри логіки.*
8. *Поняття теореми. Форми запису теореми.*
9. *Види теорем. Приклади прямих, обернених теорем.*
10. *Логічне обґрунтування методу доведення «від супротивного».*

Практичне заняття 3 Предикати

Задача 1. Знайти область істинності предикатів:

а) $P(x):"27\vdots x"$; б) $P(x,y):"\ y=\sqrt{x}"$, заданих на множині N .

Розв'язання.

а) $I(P(x))=\{1,3,9,27\}$. б) $I(P(x,y))=\{(x,y): x\in N, y\in N, y=\sqrt{x}\}$, тобто область істинності предиката $P(x,y)$ є множина всіх точок графіка функції $y=\sqrt{x}$, обидві координати яких є натуральними числами.

Задача 2. Задати таблицею двомісний предикат $P(x,y):"\ x\vdots(2y)"$ на множині $M=\{1,2,3,4,5\}$ і знайти його область істинності.

Розв'язання.

x\y	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Таблиця 2.1 – Табличне задання двомісного предиката.

Множина істинності предиката $I(P(x,y))$ – множина пар, яким відповідає одиниця в таблиці.

Задача 3. Записати твердження символічно, використовуючи квантори, причому предикат записати у вигляді кон’юнкцій або диз’юнкцій: а) «Кожний доданок суми $a+b+c$ парний», б) «існує натуральний корінь рівняння $2x=p$, який не перевищує 4», в) «Серед чисел, більших 1758 та менших 1963, знайдеться просте число», г) «Множині M належать всі літери слова «цирк».

Розв'язання.

а) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ a\vdots 2\wedge b\vdots 2\wedge c\vdots 2$,

б) $(\exists x)\quad x\in N\wedge x\leq 4\wedge 2x=p$ або $(\exists x\in N)\quad x\leq 4\wedge 2x=p$

в) $(\exists x)\quad x>1758\wedge x<1963\wedge x-\textit{просте}$

г) $\{ц,и,р,к\}\subseteq M$ або $(\forall x)\quad x\in\{ц,и,р,к\}\Rightarrow x\in M$

Задача 4. Записати за допомогою кванторів висловлювання: «Не існує найбільшого дійсного числа», «Добуток будь-яких двох дійсних чисел дорівнює 0 тоді й тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює 0».

Розв'язання.

Перше висловлювання: $(\forall x \in R)(\exists y \in R)\ y > x$.

Друге висловлювання: $(\forall x, y \in R)(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

Задача 5. Зобразити на числовій прямій елементи множини $A = \{x \in R : \exists y \in R \quad x^2 + y^2 = 1\}$

Розв'язання.

Зрозуміло, що коли $|x| > 1$, то $x^2 + y^2 > 1$. Якщо $x \in [-1,1]$, то знайдеться таке дійсне число y, що $x^2 + y^2 = 1$. Отже, $A = [-1,1]$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Предикат $P(x, y, z) : "x + y + 2z = 4"$ задано на множині N. Знайти його область істинності. Отримати з нього двомісний предикат з непорожньою областю істинності. Побудувати заперечення отриманого предиката.

2. Предикат $P(x) : "x \vdots 3"$ задано на множині Z. Побудувати з нього висловлювання двома способами та побудувати заперечення цих висловлювань.

3. З даних предикатів $P(x) : "x \vdots 3"$ і $Q(x) : "x < 3"$, заданих на множині натуральних чисел, отримати складні предикати та знайти їх області істинності.

4. Знайдіть множину істинності таких предикатів: а) «x ділиться на 3» на множині $M_x = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; б) «$x$ ділиться на 3» на множині $M_x = \{3;6;9;12\}$; в) «x ділиться на 3» на множині $M_x = \{2;5;7\}$; г) «$y^2 + 3y + 2 = 0$» на множині $M_y = R$; д) «$y^2 + 1 \geq 0$» на множині $M_y = R$; е)

«$\sin y > 2$» на множині $M_y = R$; є) «$x^2 + y^2 = 0$» на множині $M_x = M_y = R$; ж) «$x^2 + y^2 < 0$» на множині $M_x = M_y = R$; з) «$x < y$» на множинах $M_x = \{1;2;3;4\}, M_y = \{3;4;5\}$; и) «$y_1$ ділить y_2» на множині $M_1 = M_2 = \{2;3;4;6\}$.

5. Зобразити на координатній площині множини істинності таких предикатів (змінні приймають значення з множини R): а) $x = y$; б) $x = 2y$; в) $x^2 + y^2 = 1$; г) $y = |x|$; д) $y \geq x^2$; е) $y = \frac{1}{x}$; є) $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$.

6. Зобразити на координатній площині множини істинності предикатів, що задані на множині R:

$$\text{а)} \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x > 0, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

7. Зобразити на координатній прямій множини істинності предикатів, що задані на R: а) $(x < 5) \Rightarrow (x > 1)$; б) $(x > 5) \Rightarrow (x > 1)$; в) $(x > 1) \Rightarrow (x < 5)$.

8. Зв'язати змінну предикатом так, щоб вийшло істинне висловлювання (якщо можливо, зробіть це двома способами): а) «$4x + 5$ - просте число»; б) $\cos y \neq 2$; в) «У чотирикутнику z всі кути прямі»; г) «Просте число p – натуральне»; д) «Просте число p – парне »; е) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; є) $|x| = -|x|$; ж) $\lg x^2 = 2\lg x$; з) $x/x = 1$.

9. Знайти значення істинності висловлювання $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$, якщо предикат $x \leq y$ задано 1) на множині N, 2) на множині Z.

10. Записати символічно твердження «для будь-яких двох натуральних чисел існує не більше одного натурального числа, що дорівнює їх сумі».

11. Запишіть словами задане висловлювання та знайдіть його значення істинності. Всі змінні набувають дійсних значень.

1) $(\forall x)(\exists y)\ (x + y = 7)$;

2) $(\forall y)(\exists x)\ (x + y = 7)$;

3) $(\exists x)(\forall y)\ (x+y=7)$;

4) $(\forall x)(\forall y)\ (x+y=7)$;

5) $(\forall b)(\exists a)\Big((\forall x)\big(x^2+ax+b>0\big)\Big)$;

6) $(\exists b)(\forall a)\ \Big((\exists x)\big(x^2+ax+b=0\big)\Big)$.

12. Записати використовуючи квантори такі твердження:

а) $A \setminus B \neq \varnothing$;

б) $A \setminus B = \varnothing$.