

Лекція. ВІДНОШЕННЯ. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

3.1 Декартовий добуток множин. Означення відношення

Означення. Нехай дано множини $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \geq 1$. *Декартовим* (або *прямим*) *добутком* множин $X_1, X_2, \dots, X_n$ називається сукупність усіх упорядкованих наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таких, що $x_i \in X_i$. Позначається $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Якщо $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, тобто всі множини рівні, то їх декартовий добуток позначається X^n та називається n – *им степенем множини X* .

Приклади.

1) Для множин $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{m\}$ маємо $A \times B = \{(a, b), (a, c)\}$, $B \times A = \{(b, a), (c, a)\} \neq A \times B$, декартовий квадрат другої множини $B^2 = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$, декартовий добуток $A \times B \times C = \{(a, b, m), (a, c, m)\}$.

2) Декартовий квадрат множини дійсних чисел $R \times R = R^2$ називають *числовою площиною*.

Властивості декартового добутку множин:

- 1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
- 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- 3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
- 4) якщо $A \subseteq B$, то $A \times C \subseteq B \times C$;
- 5) якщо $A \neq B, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, то $A \times B \neq B \times A$

Теорема 3.1 Нехай дано **скінченні** непорожні множини $A_1, A_2, \dots, A_n$, тоді

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

де $|A|$ - кількість елементів в множині A .

Означення. Будь-яка підмножина декартового добутку

$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ називається n -арним відношенням ρ на множинах $X_1, X_2, \dots, X_n$, тобто $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Якщо $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho$, то кажуть, що елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$ перебувають у відношенні ρ . При $n=1$ відношення ρ називається унарним ($\rho \subseteq X$), при $n=2$ – бінарним ($\rho \subseteq X_1 \times X_2$), при $n=3$ – тернарним ($\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$). У випадку $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ кажуть про n -арне відношення на множині X .

Приклади. Для множин із попереднього прикладу:

- 1) $\rho_1 = \{c\} \subseteq B$ – унарне відношення на множині B ;
- 2) $\rho_2 = \{(a, b)\} \subseteq A \times B$ – бінарне відношення на множинах A, B ;
- 3) $\rho_3 = \{(b, b), (c, b)\} \subseteq B^2$ – бінарне відношення на множині B .

Зауваження. Будь-яке n -арне відношення можна розглядати як послідовність бінарних відношень, які послідовно конструюються. Тому далі зупинимося на бінарних відношеннях.

3.2 Бінарні відношення та їх властивості

Означення. Нехай ρ – бінарне відношення на множинах A та B . Множина $D(\rho) = \{x \in A; (x, y) \in \rho\}$ називається *областю визначення бінарного відношення ρ* . Множина $E(\rho) = \{y \in B; (x, y) \in \rho\}$ називається *множиною значень бінарного відношення ρ* (іноді область визначення і множину значень називають відповідно *першою* та *другою проекціями бінарного відношення*).

З останнього означення зрозуміло, що $D(\rho) \subset A$, $E(\rho) \subset B$. В попередньому прикладі $D(\rho_2) = \{a\}$, $E(\rho_2) = \{b\}$.

Бінарні відношення можна задавати різними способами:

- 1) перерахуванням пар;
- 2) за допомогою характеристичних властивостей;
- 3) орієнтованим графом;

4) матрицею;

5) графіком.

Приклад.

На множинах $A = \{2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{24, 25, 26\}$ розглянемо бінарне відношення ρ : “ $x \in A$ є дільником $y \in B$ ”.

Запишемо його різними способами.

1. $\rho = \{(2, 24), (2, 26), (3, 24), (4, 24), (5, 25)\}$.

2. $\rho = \{(x, y) \in A \times B \mid y : x\}$.

3. Див. рисунок 3.1.

4. Матриця відношення має вигляд:

$$\begin{matrix} & 24 & 25 & 26 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

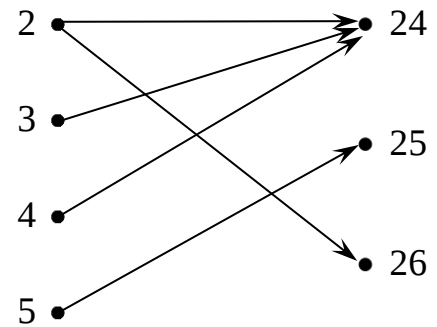


Рисунок 3.1 – Граф бінарного відношення

5. *Графіком бінарного відношення ρ називають таку множину точок $M(x, y)$ площини $ХОУ$, що $(x, y) \in \rho$. В нашому прикладі графіком відношення є множина точок з координатами $(2, 24), (2, 26), (3, 24), (4, 24), (5, 25)$.*

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Означення. *Оберненим відношенням до даного бінарного відношення ρ називається бінарне відношення $\rho^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \rho\}$.*

Бінарне відношення

$$S \circ R = \{(x, z) \mid \text{існує таке } y \in B, \text{ що } (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subseteq A \times C$$

називається *добутком* (композицією) відношень $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Далі розглянемо властивості бінарних відношень на одній множині.

Означення. Бінарне відношення $\rho = \{(a, a) \mid a \in A\}$ на множині A

називається *діагоналлю* й позначається i_A . Діагональ задається одиничною матрицею, а на графі присутні тільки петлі, причому в кожній вершині.

Означення. Бінарне відношення $\rho \subseteq A^2$ на множині A називається *рефлексивним*, якщо $\forall a \in A (a,a) \in \rho$, тобто рефлексивне бінарне відношення обов'язково містить діагональ $i_A \subseteq \rho$.

Означення. Бінарне відношення $\rho \subseteq A^2$ на множині A називається *антирефлексивним*, якщо $\forall a \in A (a,a) \notin \rho$, тобто $i_A \cap \rho = \emptyset$. На графі антирефлексивного бінарного відношення немає петель.

Означення. Бінарне відношення ρ на множині A називається *симетричним*, якщо $\forall a,b \in A (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$, тобто $\rho = \rho^{-1}$. Матриця такого відношення симетрична, а на графі всі стрілки двосторонні.

Означення. Бінарне відношення ρ називається *антисиметричним*, якщо $\forall a,b \in A ((a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho) \Rightarrow (a=b)$, тобто $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq i_A$.

Означення. Бінарне відношення ρ називається *транзитивним*, якщо $\forall a,b,c \in A (a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$.

Означення. Бінарне відношення ρ називається *повним* (або *зв'язним*, або *лінійним*), якщо $\forall a,b \in A a \neq b \Rightarrow (a,b) \in \rho \vee (b,a) \in \rho$.

Теорема 3.2 Нехай $R \subset A \times A$ – бінарне відношення на A . Тоді:

1. R рефлексивне $\Leftrightarrow i_A \subset R$;
2. R симетричне $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;
3. R транзитивне $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$;
4. R антисиметричне $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset i_A$;
5. R антирефлексивне $\Leftrightarrow R \cap i_A = \emptyset$;
6. R повне $\Leftrightarrow R \cup i_A \cup R^{-1} = U$, де $U = A \times A$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Нехай $A = \{3,4\}$. $A = \{3,4\}$ $A = \{3,4\}$ $A = \{3,4\}$ Перелічити елементи множини A^4 .

Розв'язання. Множина A^4 містить $|A^4| = |A|^4 = 16$ елементів:

$(3,3,3,3), (3,3,3,4), (3,3,4,3), (3,4,3,3), (4,3,3,3), (3,3,4,4), (3,4,3,4), (4,3,4,3),$
 $(4,4,3,3), (3,4,4,3), (3,4,4,4), (4,4,4,3), (4,3,4,4), (4,4,3,4), (4,4,4,4), (3,4,4,3).$

Задача 2. На площині задана декартова система координат. Зобразити на координатній площині $A \times B$, де $A = [a,b]$, $a < b$, $B = [c,d]$, $c < d$, $a, b, c, d \in R$.

Розв'язання. Наприклад, для $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ множина $A \times B$ є квадратом на площині з вершинами $(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)$.

Задача 3. Знайти декартовий добуток множин $X = \{x \in R : (x^2 - 2)(x - 2) = 0\}$ і $Y = \{0;2\}$.

Розв'язання. Легко бачити, що $X = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$. Тоді $X \times Y = \{(-\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 2), (\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 2), (2, 0), (2, 2)\}$.

Задача 4. Які властивості має бінарне відношення ρ : “ x ділиться на y ” на множині N ?

Розв'язання. 1) $a:a$ - рефлексивність виконується, оскільки будь-яке число ділиться без остачі само на себе.

2) з того, що $a:b$ не завжди впливає, що $b:a$ - симетричність не виконується (наприклад, $12:3$, але 3 не ділиться 12).

3) якщо $a:b$ і $b:a$, то $a = b$ - антисиметричність виконується

4) якщо $a:b$ і $b:c$, то $a:c$ - транзитивність виконується

5) якщо $a \neq b$, то звідси не впливає, що $a:b$ або $b:a$ - зв'язність не виконується (наприклад $a = 3$, $b = 5$)

Таким чином, відношення подільності, задане на множині натуральних чисел, рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Задача 5. Знайти область визначення і множину значень бінарного відношення $\rho = \{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$, заданого на множині R . Знайти ρ^{-1} .

Відповідь: $D_\rho = (-\infty; +\infty)$, $E_\rho = [0; +\infty)$, $\rho^{-1} = \{(x, y) : x = y^2\}$.

Задача 6. Зобразити на координатній площині елементи відношення, заданого на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$1) \rho = \{(x, y) \in X^2 : y < x\},$$

$$2) \rho = \{(x, y) \in X^2 | x \leq y + 1\}.$$

Розв'язання.

1) рисунок 3.3, 2) рисунок 3.4.

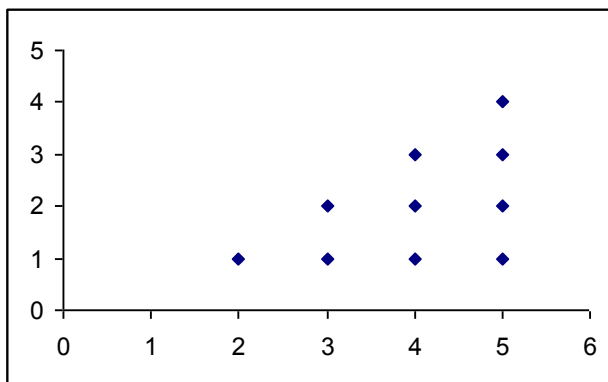


Рисунок 3.3 – Ілюстрація до прикладу 6

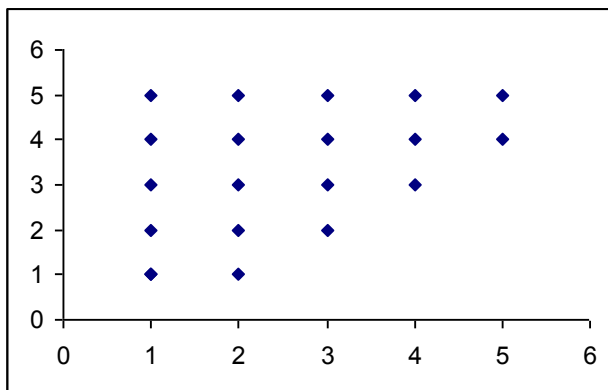


Рисунок 3.4 – Ілюстрація до прикладу 6

Завдання для самостійного розв'язання

1. Задати різними способами бінарне відношення ρ : “ x є дільником y ” на множині $A = \{2, 3, 4, 5\}$.

2. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Для кожного з наведених нижче розбиттів множини M побудувати графік відповідного відношення еквівалентності:

а) $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 6, 8\}$, $C = \{3, 7\}$;

б) $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{8\}$.