Лекція 2

Алгебраїчні методи геометрії (векторний, координатний)

Афінні властивості фігур. Афінні задачі

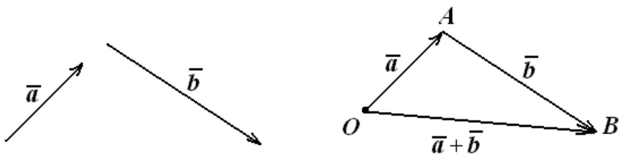
Під *афінною* розуміють задачу або теорему про афінні властивості фігур. Такі задачі не пов'язані з понятями довжини, кута. Це задачі про перетин прямих, належність точок до прямої, до площини. Наприклад, теорема про середню лінію трапеції є афінною, а теорема Піфагора не є афінною.

Афінними фігурами є точка, пряма, відрізок, промінь, площина, півплощина, трикутник, паралелограм, трапеція, эліпс, тетраедр, паралелепіпед, призма, конус (не круговий), эліпсоїд й ін.

Більшість афінних задач розв'язуються алгебраїчними методами – векторним або координатним. При застосуванні цих методів бажано керуватись наступними рекомендаціями. Вони допомагають знайти зв'язок між геометричними властивостями фігур та їх вираженням на мові векторів та координат.

1) Правило додавання векторів

$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$.



2) Правило віднімання векторів

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, O – будь-яка точка.

3) Умови колінеарності (належності до однієї прямої) точок A, B, C

$\overline{AB} = k\overline{AC}$, або

$\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$, O – будь-яка точка.

4) Умова паралельності відрізків AB і CD

$\overline{AB} = k\overline{CD}$.

5) Якщо C- середина відрізка AB, то

$\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$, O – будь-яка точка.

6) Якщо C ділить відрізок AB у відношенні $k \neq -1$, тобто $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k$, то

$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + k\overline{OB}}{1+k}$, O – будь-яка точка. (формула ділення відрізка у заданому відношенні).

7) Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ неколінеарні і $x\overline{a} + y\overline{b} = x_1\overline{a} + y_1\overline{b}$, то $x = x_1$ і $y = y_1$ (теорема про єдинісь розкладу вектора по базису).

Повторення. Побудова точки, яка ділить відрізок у заданному відношенні (випадки раціонального додатного і раціонального від'ємного числа).

Метричні властивості адач. Використання скалярного добутку.

Означення. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$.

Властивості скалярного добутку:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

2) $(\alpha \cdot \overline{a}) \cdot (\beta \cdot \overline{b}) = \alpha \cdot \beta\, (\overline{a} \cdot \overline{b})$;

3) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$;

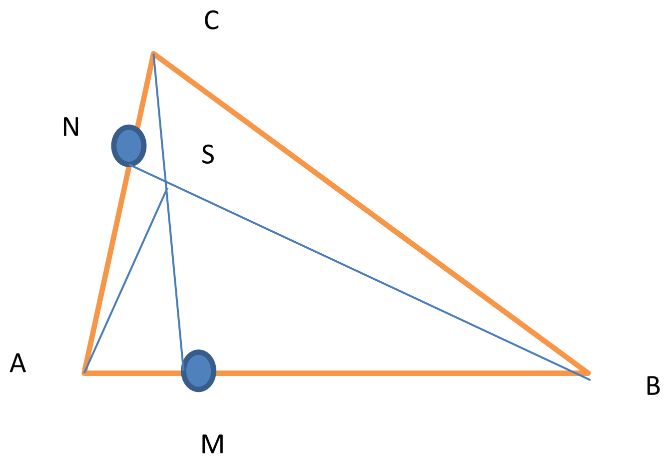
4) $\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|\,|\overline{b}|}$.

З означення скалярного добутку при $\overline{a} = \overline{b}$ маємо $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{a}\right| = \left|\overline{a}\right|^2$, звідки $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2}$.

З властивості 4) маємо умову $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ ортогональності двох ненульових векторів. Позначають $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Приклади розв'язання афінних задач векторним та координатним методом

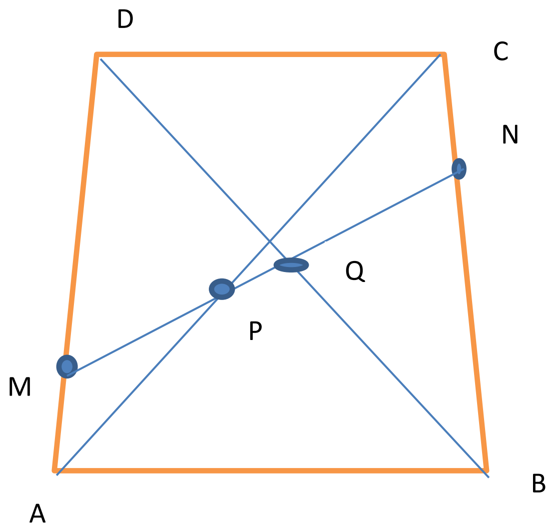
Задача 1 На сторонах AB і AC трикутника ABC дано точки M і N відповідно так, що $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$. В якому відношенні точка S перетину відрізків BN і CM ділить кожний з цих відрізків?



Розв'язання. Уведемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Позначимо $\frac{\overline{CS}}{\overline{SM}}=\alpha$ і $\frac{\overline{NS}}{\overline{SB}}=\beta$. Тоді за формулою ділення відрізка у заданому відношенні отримаємо $\overline{AS}=\frac{\overline{AC}+\alpha\overline{AM}}{1+\alpha}$ і $\overline{AS}=\frac{\overline{AN}+\beta\overline{AB}}{1+\beta}$. За умовою $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ і $\overline{AN}=\frac{2}{3}\overline{AC}$. Отже, $\overline{AS}=\frac{\overline{AC}+\frac{1}{3}\alpha\overline{AB}}{1+\alpha}=\frac{\frac{2}{3}\overline{AC}+\beta\overline{AB}}{1+\beta}$. За теоремою про єдиність розкладу вектора по базису отримаємо систему алгебраїчних рівнянь $\begin{cases}\frac{\alpha}{3(1+\alpha)}=\frac{\beta}{1+\beta},\\ \frac{1}{1+\alpha}=\frac{2}{3(1+\beta)},\end{cases}$

з якої знаходимо $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{1}{6}$.

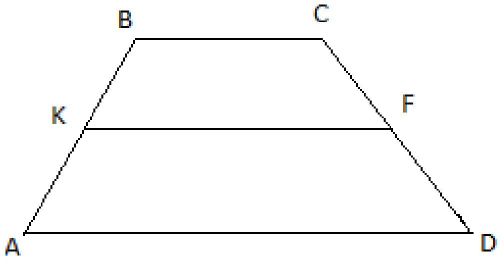
Задача 2 На бічних сторонах AD і BC трапеції $ABCD$ взято точки M і N так, що $\frac{AM}{MD}=\frac{CN}{NB}$. Пряма MN перетинає діагоналі AC і BD відповідно в точках P і Q. Довести, що $MP=QN$.



Розв'язання. Задача є афінною, оскільки відрізки MP і QN є відрізками однієї прямої. Застосуємо метод координат.

Нехай точка O перетину діагоналей трапеції є початком афінної системи координат, а $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$ - базисні вектори. Тоді $A(1,0)$, $B(0,1)$. Покладемо $C(c,0)$, тоді $D(0,c)$, що випливає з подібності трикутників ABO і CDO. Позначимо $\frac{AM}{MD}=\frac{CN}{NB}=k$. Далі за формулою ділення відрізка у заданому відношенні знайдемо координати точок $M\left(\frac{1}{1+k},\frac{kc}{1+k}\right)$ і $N\left(\frac{c}{1+k},\frac{k}{1+k}\right)$. Пряма MN має рівняння $\frac{x-\frac{1}{1+k}}{\frac{c}{1+k}-\frac{1}{1+k}}=\frac{y-\frac{kc}{1+k}}{\frac{k}{1+k}-\frac{kc}{1+k}}$ або $-kx(1+k)+k=y(1+k)-kc$. Тоді для координат точки P перетину MN і вісі абсцис маємо $P\left(\frac{c+1}{1+k},0\right)$, а для координат точки Q перетину MN і вісі ординат маємо $Q\left(0,\frac{k(c+1)}{1+k}\right)$. Знайдемо, нарешті, координати векторів $\overline{MP}=\left(\frac{c}{1+k},\frac{-kc}{1+k}\right)$ і $\overline{QN}=\left(\frac{c}{1+k},\frac{-kc}{1+k}\right)$. Звідси випливає рівність цих векторів, а отже і рівність відрізків MP і QN.

Задача 3. Довести, що середня лінія трапеції паралельна її основам та дорівнює їх півсумі.



Розв'язання. Розглянемо трапецію $ABCD$ з основами AD і BC та середньою лінією KF. Доведемо, що

1). $\overline{KF} \parallel \overline{AD}, \overline{KF} \parallel \overline{BC}$

2). $\overline{KF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$.

Користуючись правилом трикутника, можна записати

$\overline{KF} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DF}$ та $\overline{KF} = \overline{KB} + \overline{BC} + \overline{CF}$. Або $\begin{cases} \overline{KF} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DF} \\ \overline{KF} = -\overline{KA} + \overline{BC} - \overline{DF} \end{cases}$.

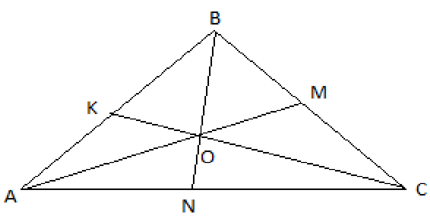
Сума отриманих векторних рівностей дає векторну рівність $2\overline{KF} = \overline{AD} + \overline{BC}$. З визначення трапеції випливає, що $\overline{AD} = \alpha \overline{BC}$, тобто $2\overline{KF} = \alpha \overline{BC} + \overline{BC} = \overline{BC}(\alpha + 1)$ або $\overline{KF} = \frac{(\alpha+1)}{2}\overline{BC}$. З цього випливає, що $\overline{KF} \parallel \overline{AD}, \overline{KF} \parallel \overline{BC}$.

Доведемо другу властивість середньої лінії трапеції. Для цього треба скористатись такою властивістю векторів:

якщо $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, то $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$. Оскільки $BC \parallel AD,$ то з векторної рівності $\overline{KF} = \frac{(\alpha+1)}{2}\overline{BC} = \frac{\alpha\overline{BC} + \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$ отримаємо скалярну рівність $KF = \frac{AD + BC}{2}$, яку і треба було довести.

Задача 5. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Проведемо в трикутнику ABC медіани AM, BN та CK. Доведемо, що всі вони перетинаються в одній точці.



Нехай медіани AM та BN перетинаються в точці O. Запишемо векторне співвідношення для третьої медіани $C\overline{K} = \frac{\overline{CA} + C\overline{B}}{2}$. Нехай

$A\overline{O} = \lambda \overline{OM}$, тоді $\overline{CO} = \dfrac{\overline{CA} + \lambda \overline{CM}}{1+\lambda} = \dfrac{\overline{CA} + \lambda \dfrac{\overline{CB}}{2}}{1+\lambda} = \dfrac{2\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{2(1+\lambda)}$. Аналогічно, якщо $B\overline{O} = \mu \overline{ON}$, тоді $\overline{CO} = \dfrac{\overline{CB} + \mu \overline{CN}}{1+\mu} = \dfrac{\overline{CB} + \mu \dfrac{\overline{CA}}{2}}{1+\mu} = \dfrac{2\overline{CB} + \mu \overline{CA}}{2(1+\mu)}$. За теоремою про однозначність розкладу вектора по одним і тим же лінійно незалежним векторам отримаємо $\dfrac{2\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{2(1+\lambda)} = \dfrac{2\overline{CB} + \mu \overline{CA}}{2(1+\mu)}$, що рівносильне системі рівнянь відносно невідомих λ, μ, з якої $\lambda = \mu = 2$. Таким чином, $\overline{CO} = \dfrac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \dfrac{2}{3}\overline{CK}$. Остання векторна рівність дає висновок про належність точки *O* медіані CK.

Приклади розв'язання метричних задач

Задача 1. Діагоналі *АС* та *ВД* чотирикутника *АВСД* перпендикулярні. Довести, що $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Задача 2. Чи вірне обернене твердження?

Вказівка. Позначити *М*-точку перетину діагоналей і виразити квадрати сторін, використовуючи теорему косинусів.

Питання. Як одним реченням сформулювати доведені в задачах 1,2 твердження?

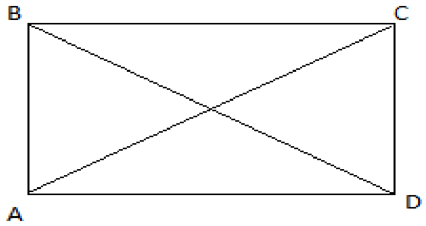
Задача 3. Довести, що для будь-яких трьох точок A, B, C справедлива нерівність трикутника: $|AB| \le |AC| + |CB|$.

Доведення. За правилом додавання для будь-яких точок A, B, C вірна рівність $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Тоді $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2(\overline{AC}, \overline{CB}) + \overline{CB}^2$. За нерівністю Коші-Буняковського для будь-яких векторів маємо $(\overline{AC}, \overline{CB}) \le \left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\overline{CB}\right|$. Отже,

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 + 2(\overline{AC}, \overline{CB}) + \left|\overline{CB}\right|^2 \le \left|\overline{AC}\right|^2 + 2\left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{CB}\right|^2 = \left(\left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{CB}\right|\right)^2,$$

звідки і отримаємо $|AB| \le |AC| + |CB|$.

Задача 4. Довести, що діагоналі прямокутника рівні між собою.



Доведення. Розглянемо прямокутник $ABCD$ з діагоналями AC та BD. Доведемо, що $AC = BD$.

Виразимо вектори діагоналей через вектори сторін прямокутника за аксіомою 5.2:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \text{ та } \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Знайдемо скалярні квадрати обох векторів, отримаємо

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + 2(\overline{AD}, \overline{DC}) + \overline{DC}^2 \text{ та } \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2(\overline{BC}, \overline{CD}) + \overline{CD}^2.$$

Оскільки $ABCD$ – прямокутник, то $(\overline{AD}, \overline{DC}) = 0$, $(\overline{BC}, \overline{CD}) = 0$, $AD = BC$ та $AB = CD$. З цього випливає, що знайдені скалярні квадрати векторів рівні, а значить і довжини цих векторів рівні, тобто $AC = BD$. Доведено.