

1.10 Числові послідовності

Означення 1.29. Якщо кожному натуральному числу n за яким-небудь правилом поставлено у відповідність певне дійсне число a_n , то говорять, що задано *числову послідовність* $\{a_n\}$, або $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, з яких складається послідовність, називають *членами послідовності*, а вираз для a_n – *загальним членом послідовності*.

Наприклад, послідовність з загальним членом $a_n = \frac{1}{n}$ має вигляд: $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Якщо кожному натуральному числу n поставити у відповідність його квадрат, то отримаємо послідовність $\{n^2\}$, або $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$.

З означення 1.29. випливає, що послідовність є функцією, визначеною на множині натуральних чисел.

Числову послідовність слід відрізнити від множини її членів: множина визначається елементами, з яких вона складається, а для визначення послідовності потрібно ще вказати порядок розташування цих елементів. Розглянемо основні способи задання послідовності.

Найчастіше послідовність задають за формулою, що визначає її загальний член a_n залежно від номера n . Наприклад, формула загального члена послідовності $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ визначає послідовність $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots$, а формула $a_n = 2^n$ – послідовність $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

Прикладами послідовності є арифметична та геометрична прогресії. Послідовність $a_n = a_1 + d(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$ – де a_1, d є заданими числами, називають *арифметичною прогресією* з першим членом a_1 та різницею прогресії d .

Послідовність $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, де перший член прогресії b_1 та знаменник прогресії q є заданими числами, називають *геометричною прогресією*.

Досить часто послідовності задають також *рекурентними співвідношеннями*, тобто співвідношеннями, які будь-який член послідовності виражають через попередні члени послідовності. При цьому задають перший, або, за необхідності, кілька перших членів послідовності. Наприклад, послідовність можна задати у наступному вигляді: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$. Для кожного номера n члена цієї послідовності ми можемо визначити значення цього члена a_n , проте для цього потрібно визначити всі попередні значення. Наприклад, потрібно знайти a_5 . Послідовно визначаємо:

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}, \quad a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Приклад послідовності, задана рекурентною способом, це послідовність $\{F_n\}$ чисел Фібоначчі. Для неї $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 2, 3, \dots$

Послідовність інколи задають словесним правилом, за яким утворюються її члени. Прикладами таких послідовностей є послідовність простих чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., або послідовні наближення числа π з недостатчею: 3; 3,14; 3,141,...

Означення 1.30. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою зверху*, якщо $\exists A \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < A$. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *необмеженою зверху*, якщо $\forall A \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: a_n > A$. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою знизу*, якщо $\exists a \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > a$. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *необмеженою знизу*, якщо $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: a_n < a$. Послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху, і знизу. Послідовність називають *необмеженою*, якщо вона необмежена хоча б з однієї сторони: зверху, або знизу.

Прикладом послідовності, обмеженої зверху, є послідовність з загальним членом $a_n = -n, n \in \mathbb{N}$, оскільки для довільного невід'ємного числа A , наприклад, $A=1, a_n = -n < A$. Послідовність $a_n = n$ є необмеженою зверху, проте вона обмежена знизу, оскільки $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$. Послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ є

прикладом обмеженої послідовності, оскільки $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < 2$. Послідовність $a_n = n^2$ є необмеженою, оскільки вона необмежена зверху.

Можна надати інше означення обмеженої та необмеженої послідовностей.

Означення 1.31. Послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою*, якщо $\exists M > 0, M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M$. Послідовність $\{a_n\}$ називають *необмеженою*, якщо $\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N}: |a_n| > M$.

Наприклад, послідовність з загальним членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ є обмеженою, оскільки $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| = \frac{1}{n} < 2$. Тут у якості числа M можна взяти довільне дійсне число, що перевищує одиницю.

Прикладом необмеженої послідовності є послідовність $b_n = n^2$. Дійсно, з нерівності $|b_n| = n^2 > M$ випливає, що $n > \sqrt{M}$, тобто для довільного додатного M член цієї послідовності з номером n , більшим, ніж $\sqrt{M}$, наприклад, $n = \lceil \sqrt{M} \rceil + 1$, перевищуватиме за абсолютною величиною число M .

Оскільки послідовність є окремим випадком функції, то аналогічно монотонним функціям можна розглядати монотонні послідовності: зростаючі, неспадні, спадні, незростаючі. Наприклад, послідовність з загальним членом

$a_n = \frac{1}{n}$ є прикладом спадної послідовності, оскільки $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$n_1 < n_2 \Rightarrow \frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2}$, тобто з збільшенням номера члена послідовності його

величина зменшується. Послідовність $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ – приклад послідовності, що

не є монотонною, тут з нерівності $n_1 < n_2$ не випливає, що $a_{n_1} < a_{n_2}$ або $a_{n_1} > a_{n_2}$.