**Лекція 5**

**Відношення еквівалентності. Розбиття множини**

**Означення.** Бінарне відношення на множині  називається *відношенням* *еквівалентності***,** якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

**Приклади:** 1)відношення рівності на будь-якій числовій множині.

Дійсно, для будь-яких чисел :

*а)* ; б) ; в) .

2) відношення паралельності на множині прямих площини, оскільки для будь-яких прямих :

а) ||; б) якщо ||, то ||; в) якщо || і ||, то ||.

3) відношення подібності на множині всіх трикутників.

**Означення.** Нехай на множині  задано відношення , що є відношенням еквівалентності. *Класом, породженим елементом* , називається підмножина елементів множини , що перебувають із елементом  у відношенні . Позначається , тобто .

Тут  означає, що елементи *x* та  перебувають у відношенні , тобто .

**Теорема 3.3** Мають місце наступні властивості:

1. ;

2. Якщо , то .

3. Якщо , то .

Таким чином, усяке відношення еквівалентності, задане на множині , розбиває цю множину на класи еквівалентності. Будь-які два елементи з одного класу перебувають у відношенні  або інакше еквівалентні. Будь-які два елементи з різних класів нееквівалентні.

**Означення.** Сукупність класів еквівалентності називається *фактор-множиною* даної множини за даним відношенням еквівалентності. Якщо  – відношення еквівалентності на множині , то  – фактор–множина множини  за відношенням .

**Приклад.** На множині  цілих чисел розглянемо відношення . Воно є відношенням еквівалентності. Очевидно, що до одного класу відносяться числа, що дають при діленні на 3 однакові залишки, тобто , , .

Таким чином,  – множина класів лишків за модулем 3.

**Означення.** Говорять, що задано *розбиття множини* , якщо , причому  для будь-яких .

**Приклад.**  є розбиттям множини цілих чисел. Інше розбиття цієї ж множини: .

Якщо  – відношення еквівалентності на , то воно визначає на  класи еквівалентності. Множина класів еквівалентності є розбиттям .

**Теорема 3.4**Нехай ,  - відношення еквівалентності на множині , тоді фактор-множина  є розбиттям множини .

**Доведення*.*** Дійсно, з рефлексивності відношення  випливає  або , тобто класи еквівалентності непорожні.

Покажемо, що два різні класи не перетинаються. Нехай  і . Припустимо супротивне, що , тоді знайдеться елемент , який належить цим двом класам, тобто . Нехай  - довільний елемент з класу . Тоді  і з припущення . З симетричності відношення  отримаємо  і . Застосуємо транзитивність відношення , отримаємо . Так як , то . Знову застосуємо транзитивність, отримаємо , звідки . Таким чином, доведено включення . Аналогично доводиться, що . Отже, , що суперечить умові . Таким чином, різні класи не перетинаються.

Безпосередньо з визначення фактор-множини випливає, що об’єднання всіх класів еквівалентності дає всю множину . Теорема доведена.

**Означення.** Нехай ,  - розбиття множини . Задамо на  бінарне відношення  за таким правилом: елементи  перебувають у відношенні  тоді і тільки тоді, коли вони належать одному класу розбиття ****. Відношення  називають *бінарним відношенням, що визначається розбиттям* .

**Теорема 3.5** Нехай ,  - розбиття множини ,  - бінарне відношення, що визначається розбиттям . Тоді  є відношенням еквівалентності на множині  і фактор-множина  збігається з розбиттям .

**Бінарні відношення порядку**

**Означення.** Бінарне відношення  на множині  називається *відношенням порядку*, якщо воно транзитивне й антисиметричне. Множина, на якій задано відношення порядку, називається впорядкованою.

**Приклади.** 1) Нехай  – довільна множина, – її булеан. Відношення  є відношенням порядку.

2) Відношення подільності на множині натуральних чисел.

**Означення.** Відношення порядку називається:

* *відношенням часткового порядку,* якщо воно неповне*;*
* *відношенням лінійного порядку,* якщо воно повне.

Відношення часткового порядку називається:

* *відношенням строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне,
* *відношенням нестрогого* *порядку*, якщо рефлексивне

Відношення лінійного порядку називається:

* *відношенням строгого лінійного порядку*, якщо воно антирефлексивне,
* *відношенням нестрогого лінійного* *порядку*, якщо воно рефлексивне.

**Приклади.**

* відношення «» (бути власною підмножиною) на булеані деякої множини є відношенням строгого часткового порядку,
* відношення «» на множині  є відношенням строгого лінійного порядку,
* відношення «» (бути підмножиною) на булеані деякої множини є відношенням нестрогого часткового порядку,
* відношення «» на множині  є відношенням нестрогого лінійного порядку.

**Означення.** Множина, на якій задано відношення лінійного (часткового) порядку, називається *лінійно* *впорядкованою* (*частково впорядкованою*).

Наприклад, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел лінійно впорядковані, а булеан будь-якої (не менше ніж двоелементної) множини частково впорядкований.

**Означення.** Нехай «» - бінарне відношення порядку на множині *М*. Елемент  називається *мінімальним*, якщо . Елемент  називається *максимальним*, якщо . Множина називається *цілком упорядкованою*, якщо вона містить мінімальний або максимальний елементи.

**Означення.** *Натуральним числом* називається потужність скінченної множини.

Позначимо потужність одноелементної множини символом 1, тобто , аналогічно, для потужності двоелементної множини -  Якщо *а* – потужність деякої множини *М* і , де  - одноелементна множина, то будемо писати, що потужніть множини  дорівнює *а+1*. Таким чином, .

Уведемо на  бінарне відношення «», яке природним чином порівнює потужності множин. Очевидно, 1 – мінімальний елемент.

Множина  натуральних чисел має наступні властивості:

1. є цілком упорядкованою;
2. для кожного  існує більше за нього натуральне число;
3. якщо  й виконані умови:
   * ,
   * ,

то .

Третя властивість є логічним обґрунтуванням *методу математичної індукції*, який часто застосовують для доведення істинності тверджень, сформульованих для натуральних чисел. Нехай  – предикат на множині . Висловлювання  істинне тоді й тільки тоді, коли  істинне й із припущення істинності  для кожного  випливає істинність .

**Приклад.** При будь-якому натуральному  вірно, що . Дійсно, маємо висловлювання :. Для  воно має вигляд : і є істинним висловлюванням. Припустимо, що : є істинним і, **використовуючи це припущення**, доведемо, що : теж істинне. Вираз  представимо у вигляді . Перший доданок отриманої суми, очевидно, ділиться на 3 і другий доданок за індуктивним припущенням теж ділиться на 3. Отже,  при будь-якому натуральному .

**3.5 Функції. Еквівалентні множини. Потужність множини**

**Означення.** Нехай на множинах  і  задане бінарне відношення . *Областю визначення* відношення називається множина , а множина  – *областю значень*.

**Означення.** Бінарне відношення  називається *функціональним* (або *функцією*, або *відображенням*) з  в , якщо  й усі впорядковані пари з  мають різні перші координати. Прийняте позначення  і якщо , то пишуть  і  називають значенням функції, що відповідає аргументу .

**Означення.** Функція  називається *ін'єкцією* (*ін’єктивним* *відображенням*), якщо , *сюр’єкцією,* якщо . Функція називається *бієкцією* (або взаємно однозначною відповідністю між множинами  і ), якщо вона є ін'єкцією та сюр’єкцією.

**Приклад.**

 

 

 

 

 

 

 

г) ін***’***єктивне відображення

 

 

 

 

 

 

 

в) не ін’єктивне відображення

 

 

 

 

 

 

 

б) функціональне відношення

 

 

 

 

 

 

 

а) не функціональне відношення

 

 

 

 

 

 

є) сюр’єктивне відображення

 

 

 

 

 

 

 

д) не сюр’єктивне відображення

Рисунок 3.2 – Типи відображень

**Теорема 3.6** Нехай , . Тоді  - функція із *А* у *С*, причому .

**Означення.** Дві множини називаються *еквівалентними*, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Позначають .

**Приклад.**  і  не еквівалентні.

Очевидно, що: 1) кожна множина еквівалентна сама собі; 2) якщо множина  еквівалентна множині , то  еквівалентна ; 3) якщо  еквівалентна  і  еквівалентна , то  еквівалентна . Отже, сукупність усіх множин розбивається на класи еквівалентності.

**Означення.** *Потужністю* (*кардинальним числом*) називається властивість класу еквівалентних між собою множин. Якщо множина  скінченна, то її потужність дорівнює числу елементів у ній і позначається символом .

**Означення.** *Множина*, еквівалентна множині натуральних чисел, називається *зліченною*.

Термін «зліченність» означає дискретність. Множина раціональних чисел зліченна, тобто . Звернемо увагу на те, що у цьому прикладі множина еквівалентна своїй власній підмножині.

**Теорема 3.7 (характеристична властивість скінченної множини)** Будь-яка скінченна множина не може бути еквівалентною ніякій своїй власній підмножині.

Кантор довів, що потужність множини точок відрізка  не є зліченною. Її потужність називається *континуумом*. Мають місце еквівалентності: .

Булеан зліченної множини  є незліченною множиною (континуумом).

Будь-яка нескінченна підмножина зліченної множини сама зліченна.

Об'єднання зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.

**Питання для самоконтролю**

1. *Декартовий добуток множин. Теорема про потужність декартового добутку множин.*
2. *Означення відношення. Приклади бінарних відношень.*
3. *Способи задання бінарного відношення.*
4. *Властивості бінарних відношень.*
5. *Відношення еквівалентності.*
6. *Поняття класу еквівалентності і фактор-множини.*
7. *Означення відношення порядку.*
8. *Види відношень порядку.*
9. *Множина натуральних чисел. Аксіома індукції та її роль.*
10. *Поняття функції як виду бінарного відношення, види функцій.*
11. *Еквівалентні множини. Зліченні та незліченні множини*.
12. *Основна теорема про скінченні множини.*

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5**

**Приклади розв’язання задач**

**Задача 1.** На множині  задане відношення  . Довести, що воно є відношенням еквівалентності й знайти всі класи еквівалентності.

**Розв'язання.** Перевірка виконання властивостей здійснюється за їх означеннями. Зупинимось на знаходженні класів еквівалентності.

,

,

,

.

**Задача 2**. Побудувати мінімальне (по кількості пар) відношення еквівалентності  на множині  так, щоб  і .

**Розв'язання.** Нагадаємо, що відношення еквівалентності рефлексивне, симетричне і транзитивне. Для забезпечення виконання цих властивостей необхідно до заданих двох пар додати такі пари:, , .

**Задача 3.** Показати, що відношення  є відношенням еквівалентності і знайти класи еквівалентності.

**Розв'язання.**

1)  , тому що . Отже, відношення  рефлексивне.

2) Покажемо, що  . Дійсно,  . Отже, відношення  симетричне.

3) Вимога  теж виконується. Дійсно, якщо  тоді  звідки . Отримали . Відношення  транзитивне.

Отже,  є відношенням еквівалентності на множині *R.* Класи еквівалентності: .

**Задача 4.** Які властивості притаманні відношенню  на множині  - булеані множині *Z*?

**Розв'язання.** Відношення  рефлексивне (), не є симетричним (з  не випливає ), антисиметричне (з  випливає ). Дане відношення транзитивне за теоремою 1.1. Отже, відношення  є відношенням порядку. Оскільки існують пари елементів з , що не належать відношенню  (наприклад, , ), то відношення не є повним. За означенням маємо нестроге відношення часткового порядку.

**Задача 5.** Довести, що при будь-якому натуральному  вірне твердження .

**Доведення.** Для  маємо , що є істинним висловлюванням. Припустимо, що  є істинним і, **використовуючи це припущення**, доведемо, що  теж істинне висловлювання. Вираз  замінимо рівносильним виразом Перший доданок отриманої суми ділиться на 8 за індуктивним припущенням, другий є добутком числа 4 на парне число, тому теж ділиться на 8.

Отже,  при будь-якому натуральному .

**Задача 6.** Довести, що для будь-якого натурального *п* виконується рівність

.

**Доведення. 1 крок.** Перевіримо виконання рівності для *п=1.* Оскільки в лівій частині рівності *п* доданків, то отримаємо рівність , яка є вірною (***база індукції***).

**2 крок.** Припустимо, що для  вірна рівність

 (***індуктивне припущення***).

**3 крок.** Треба **використовуючи індуктивне припущення** довести для  вірність рівності

.

В лівій частині цієї рівності сума перших  доданків за індуктивним припущенням дорівнює . Отже отримаємо



що й треба було довести.

**Задача 7.** Довести нерівність  для будь-якого натурального .

**Доведення.** База індукції (*п*=2): , що доводиться, наприклад, двократним піднесенням до квадрату.

Індуктивне припущення ():.

Індуктивний перехід: Доведемо, що

.

Дійсно, з індуктивного припущення випливає . Покажемо, що

. Оскільки для різниці квадратів лівої та правої частин останної нерівності маємо



при будь-якому натуральному , то .

Таким чином, за транзитивністю відношення «>», маємо .

**Висновок.**  для будь-якого натурального .

**Задача 8.** Чи еквівалентні множини  й ?

*Відповідь:* Так, вони обидві еквівалентні множині цілих чисел.

**Задача 9.** Установити бієкцію між множинами  й .

**Розв'язання.** У якості бієкції розглянемо функцію , областю визначення якої є множина , а множиною значень – множина .

**Задача 10.** Чи є відношення  функцією з  в . Якщо так, то визначити її вид за умови, що:

1) ;

2) .

*Відповідь:* 1) ін’єктивна функція; 2) бієктивна функція.

**Завдання для самостійного розв’язання**

1. Нехай  і . Довести, що  є відношенням еквівалентності на *М*; зобразити на координатній площині множину *М* та її розбиття, яке відповідає відношенню :

а) , якщо ;

б) , якщо .

1. Показати, що відношення «», задане на множині  правилом « тоді і тільки тоді, коли *а* – дільник *b* » є відношенням часткового порядку.
2. Довести, що при будь-якому  справедливі рівності:

а) ;

б) .

4. Довести, що при будь-якому  число  ділиться на 9.

5. Довести справедливість нерівності  для всіх натуральних .

6. Нехай  і  - корені рівняння . Довести, що при будь-якому  число  є парним натуральним числом.

7. Довести, що для будь-якого натурального *п* має місце формула .

8. Довести, що для будь-якого натурального *п:*

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

є) ;

е) ;

ж).

9. Дослідити властивості відображення :

а) , б)  ; в)  ; г)  ;

д)  ; є)  ; е)  .

10. Визначити які з наступних відношень є відображеннями; які з відображень взаємно-однозначні:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

є) .

11. Знайти добутки  та , якщо відображення  визначаються наступним чином:

а) , ;

б) ;

в) , ;

г) , ;

д) ,.

12. Встановити бієкцію між множинами  та  в кожному з наступних випадків:

а) , ;

б) ,  - множина всіх парних натуральних чисел;

в) , ;

г) , ;

д) , ;

є) , .