Лекція 3. Сучасні дослідження в дискретній математиці

УЗАГАЛЬНЕННЯ АЛГОРИТМУ ЗНАХОДЖЕННЯ КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ З НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА БЕЗ КАЛЬКУЛЯТОРА НА ВИПАДОК КОРЕНЯ ДОВІЛЬНОГО СТЕПЕНЯ

$$\sqrt{53361}$$

Відомі алгоритми знаходження кореня n-го степеня з числа засновані в основному на чисельних методах, і тому не є точними. Один з цих методів заснований на чисельному методі Ньютона знаходження коренів рівняння на даному відрізку та ітераційній формулі

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{A}{x_k^{n-1}}\right).$$

Цей метод використовує деяке початкове наближення, а для збільшення точності використовуються похідні. Визначення точного методу знаходження кореня довільного степеня без використання електронних засобів і таблиць є цікавим завданням і прикладом формування у студентів навичок організації дослідницької діяльності.

Тут ми представимо алгоритм, який точно обчислює корінь n-го степеня з числа A. Нагадаємо спочатку, що арифметичним коренем n-ного степеня з додатного дійсного числа A називається додатне дійсне число $\sqrt[n]{A}$, яке є розв’язком рівняння $x^n = A$.

Алгоритм складається з наступних кроків:

1) Розбити число A на групи по n цифр, починаючи з розряду одиниць. Якщо число A має дробову частину, її також розбити на групи по n цифр, але починаючи з першого знака після коми. Кількість цифр в останній групі зліва або в останній групі праворуч може бути менше n. Кількість отриманих груп цифр зліва від коми буде дорівнювати кількості цифр у цілій частині результату.

2) Знайти корінь з недостачею з групи цифр, яка містить найбільші розряди (при невеликих n це робиться усно).

3) Відняти n-ий степінь отриманої в пункті 2) цифри від даної групи цифр. До остачі дописати справа наступну групу цифр (виконати конкатенацію).

4) Скласти нерівність виду

$$x(q^{n-1} \cdot C_n^1 \cdot 10^{n-1} + q^{n-2} \cdot C_n^2 \cdot 10^{n-2} \cdot x + q^{n-3} \cdot C_n^3 \cdot 10^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + \\ + q^2 \cdot C_n^{n-2} \cdot 10^2 \cdot x^{n-3} + q \cdot C_n^{n-1} \cdot 10^1 \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) \le r, \tag{1}$$

де q – число, складене з уже відомих цифр результата; x – невідома цифра результата; r – остача із пункта 3).

5) Найбільший цілий невід'ємний розв’язок x нерівності приписуємо до числа q.

6) Нова остача дорівнює різниці попередньої остачі та значення лівої частини нерівності (1) з кроку 4) при знайденому в 5) кроці значенні x.

7) Повторювати пункти 4) -6) до тих пір, поки існують не розглянуті групи цифр.

Обчислимо, **наприклад,** корінь 5-го степеня з натурального числа 1099511627776.

1) Розбиваємо число на групи по 5 цифр, починаючи з найменших розрядів: 109’95116’27776. Оскільки вийшло три групи, то шукане число буде тризначним.

2) З групи цифр, яка містить найбільші розряди, знаходимо корінь з недостачею, отримуємо $\left[\sqrt[5]{109}\right] = 2$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Таким чином, цифра в найбільшому розряді шуканого числа дорівнює 2.

3) Віднімаємо з даної групи цифр п'ятий степінь числа 2, а до отриманої різниці конкатенуємо (приписуємо) наступну групу цифр. Отримуємо послідовно *109-32=77;* конкатенація чисел 77 та 95116 дає число *7795116*.

4) Складаємо нерівність виду (1) при $q=2$.

$$x(2^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 2^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x + 2^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot x^3 + x^4) \le 7795116$$

або

$$x(800000 + 80000 \cdot x + 4000 \cdot x^2 + 100 \cdot x^3 + x^4) \le 7795116.$$

Максимальна цифра, яка задовольняє цій нерівності, дорівнює 5. Таким чином, нове значення q дорівнює 25.

5) Отримуємо послідовно значення лівої частини нерівності при $x=5$. Нова остача дорівнює 7795116-6565625=1229491. Результат конкатенації: 122949127776.

6) Складаємо нерівність виду (1) при q=25.

$$x(25^4 \cdot 5 \cdot 10^4 + 25^3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot x + 25^2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 25 \cdot 5 \cdot 10 \cdot x^3 + x^4) \leq 122949127776$$

або

$$x(19531250000 + 156250000 \cdot x + 625000 \cdot x^2 + 1250 \cdot x^3 + x^4) \leq 122949127776$$

Число $x=6$ - максимальний цілий розв'язок нерівності, тому нове значення q=256.

7) Ми знайшли всі цифри результату, тому алгоритм завершив роботу. Дійсно, ліва частина останньої нерівності при $x=6$ дорівнює 122949127776, а значить, нова остача дорівнює 0.

Отже, $\sqrt[5]{1099511627776} = 256$.

Зауважимо, що запропонований алгоритм є точним. На кожному циклі 4)-6) алгоритму знаходиться цифра результату, яка вже не змінюється до кінця роботи алгоритму.

Для обґрунтування побудованого алгоритму скористаємося десятковим записом цілого числа. Так називається його представлення у вигляді суми ступенів числа 10, у якій коефіцієнтами є цифри числа. Якщо результат знаходження кореня n-го степеня з числа A має k цифр, то $A = \left(10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0\right)^n$. Запишемо праву частину останньої рівності у вигляді n-го степеня бінома, тобто $A = \left(10 \cdot \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1} + a_0\right)^n$, де риска означає, що символи під нею є цифрами числа. Звідси випливає можливість застосування формули бінома Ньютона, в якій і виникають біноміальні коефіцієнти C_n^l. Цей факт пояснює вид виразу в дужках у нерівності (1) для знахождения чергової цифри результата знаходження кореня n-го степеня.

Наприклад, куб чотиризначного числа можна записати так:

$$(10^3 a + 10^2 b + 10c + d)^3 = (10\overline{abc} + d)^3 =$$
$$= C_3^0 10^3 (\overline{abc})^3 + C_3^1 10^2 (\overline{abc})^2 d + C_3^2 10(\overline{abc}) d^2 + C_3^3 d^3.$$

Три останніх доданки якраз і складають вираз у дужках нерівності (1) після його множення на цифру d, яка на даному етапі алгоритму є шуканою, а попередні 3 цифри a, b, c результата знайдені на попередніх кроках алгоритму.

ПРОБЛЕМИ ІЗОМОРФНОСТІ ТА ПЕРЕРАХУВАННЯ ГРАФІВ

Ізоморфізм графів. Інваріанти графа відносно ізоморфізмів

Означення. *Графи* G *й* H називаються *ізоморфними*, якщо існує таке взаємно однозначне відображення f між множинами їх вершин, яке зберігає суміжність вершин. Позначають $G \cong H$.

Таким чином, якщо графи G та H ізоморфні й вершини u та v графа G суміжні, то вершини $f(u)$ й $f(v)$ графа H теж суміжні. Саме відображення f називається *ізоморфізмом*.

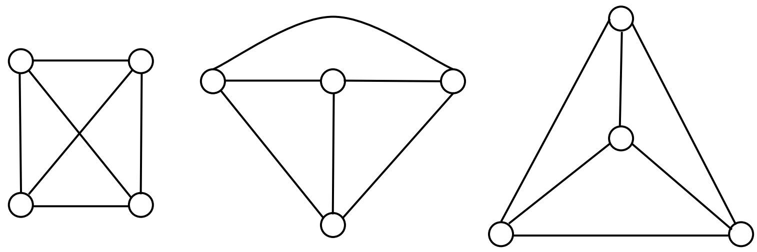
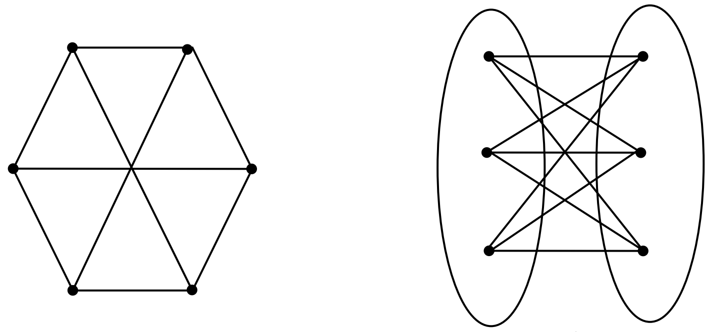


Рисунок 6.10 – Три попарно ізоморфні графи

Очевидно, що графи, які мають однакові зображення та відрізняються лише нумерацією вершин та ребер, є ізоморфними.

Приклад. Граф на рис. 6.11а є повним дводольним графом $K_{3,3}$. Він ізоморфний графу на рис. 6.11б.



а б

Рисунок 6.11 – Дводольний граф (а) та ізоморфний йому граф $K_{3,3}$ (б)

Теорема 6.5 (критерій ізоморфності). Прості графи G і H зі скінченними множинами $V(G) = \{g_1, \dots, g_n\}$ і $V(H) = \{h_1, \dots, h_n\}$ вершин ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжності $A(G)$ та $A(H)$

пов’язані співвідношенням $A(G)=T^t \cdot A(H)\cdot T$, де $T=(t_{ij})=\begin{cases}1, при \ f(g_i)=h_i,\\ 0, при \ f(g_i)\neq h_i.\end{cases}$

Зауважимо, що сформульована теорема не дає ефективний спосіб дослідження двох графів на ізоморфність. Далі ми розглянемо ряд характеристик графів, які дають ефективний спосіб доведення неізоморфності двох заданих графів.

Означення. *Інваріантом графа відносно ізоморфізму* називають властивість графа, яка зберігається при цьому ізоморфізмі.

Означення. *Інваріант* $f(G)$ графа G відносно ізоморфізму f називають *неповним*, якщо з $G\cong H \Rightarrow f(G)=f(H)$. Якщо ж $G\cong H \Leftrightarrow f(G)=f(H)$, то *інваріант* називається *повним.*

Наприклад, *n* – число вершин та *m*– число ребер є інваріантами графа відносно ізоморфізму, що безпосередньо виплиає з означення ізоморфізму графів.

Розглянемо ще кілька інваріантів графа щодо ізоморфізмів.

1) *Вектор степенів графа*.

Означення. Нехай послідовність $S_1, S_2, \ldots, S_n$ степенів усіх вершин графа впорядкована так, що $S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n$. Набір $S(G)=(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ називають *вектором степенів графа*.

З означення ізоморфізму графів випливає, що коли $G_1 \cong G_2$, то $S(G_1)=S(G_2)$, тобто вектор степенів є інваріантом графа відносно ізоморфізму. Очевидно, що коли вектори степенів двох графів різні, то ці графи не ізоморфні. Але якщо вектори степенів двох графів збігаються, то із цього ще не випливає ізоморфність цих графів.

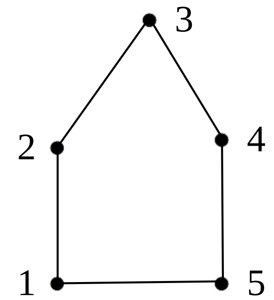


Рисунок 6.12 – Граф C_5

Матеріали статті

Проблема ізоморфності графів є однією з основних задач теорії графів і поки що нерозв'язаною. Питанню перерахування неізоморфних непомічених графів приділялась увага у наукових роботах Харарі та Палмера. В цих роботах використовувався метод Пойа, який передбачає побудову групи підстановок та використання інваріантів цієї групи відносно ізоморфізмів. Відомо достатньо великий перелік іинваріантних властивостей графів відносно ізоморфізмів, які ефективно застосовуються для доведення неізоморфності графів. Зокрема, є цілий ряд так званих алгебраїчних інваріантів графа, які є предметом сучасних досліджень, як теоретичних, так і комп'ютерних. Одним з таких властивостей є вектор степенів графа – неспадна послідовність степенів всіх вершин графа. Позначають зазвичай $S(G)=(s_1, s_2,...,s_n)$, де s_i – степінь вершини v_i. Очевидно, що вектори степенів ізоморфних графів співпадають, але обернене не завжди вірно. В такому випадку інваріант називають неповним.

Для звичайних графів поняття вектора степенів графа використовується для дослідження властивостей числової таблиці, яка дає число $T(n,m)$ неізоморфних (n,m)-графів для $n \in N \setminus \{1\}, m \in N \cup \{0\}$. Фрагмент таблиці зображено на рисунку 1.

n \ m	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
II	1	1														
III	1	1	1	1												
IV	1	1	2	3	2	1	1									
V	1	1	2	4	6	6	6	4	2	1	1					
VI	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	5	2	1	1

Рис.1 – Фрагмент таблиці чисел неізоморфних (n,m)-графів

В кожному рядку равновіддалені від його кінців елементи дорівнюють числу неізоморфних (n,m)-графів та $\left(n, C_n^2 - m\right)$-графів. Ці числа рівні меж собою, оскільки з неізоморфності графів випливає неізоморфність їх доповнень.

Елементи таблиці можна також записати у вигляді послідовності. Вона наведена в Online енциклопедії цілочислових послідовностей під номером A008406 і містить числа з 20 рядків таблиці. Для знаходження в цій послідовності числа $T(n,m)$ при $n \le 20$ та будь-якому $m = \overline{0, C_n^2}$ користуются формулою $\frac{(n-2)^3 + 6m + 8}{6}$, яка при заданих значеннях m та n дає номер шуканого члена послідовності.

В цій роботі отримано рекуррентні співвідношення, що дозволяють обчислити деякі з елементів у 21-26 рядках вказанної таблиці.

1. Зв'язок між наборами неізоморфних графів з m ребрами та деякі властивості таблиці

Сформулюємо два очевидних твердження.

Твердження 1 Якщо в кожному з двох неізоморфних (n,m)-графів є принаймні одна ізольована вершина, то $(n-1,m)$-графи, отримані з даних графів видаленням однієї ізольованої вершини, також будуть неізоморфними. Обернено, якщо два (n,m)-графа неізоморфні, то $(n+1,m)$-графи, отримані з них додаванням однієї ізольованої вершини, також неізоморфні.

Твердження 2 Нехай *M* – сукупність всіх попарно неізоморфних (n,m)-графів. Тоді в сукупності всіх попарно неізоморфних $(n+1,m)$-графів є підмножина, еквівалентна множині *M*, кожен граф якої отримується з деякого графа множини *M* додаванням однієї ізольованої вершини.

Твердження 3 Якщо у сукупності всіх попарно неізоморфних (n,m)-графів є граф з вектором степенів (1,1,…,1), то $n = 2m$.

Доведення. Розглянемо граф з вектором степенів (1,1,…,1). Оскільки число ребер дорівнює m, то сума степенів всіх вершин за лемою про рукопотискання дорівнює $2m$, а оскільки кожна вершина має степінь 1, то число вершин дорівнює $2m$. Відмітимо, що $(2m, m)$-граф з вектором степенів (1,1,…,1) є єдиним графом без ізольованих вершин у сукупності всіх попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів.

Твердження 4 Нехай k – число всіх попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів. Тоді число всіх попарно неізоморфних (n, m)-графів при будь-якому $n > 2m$ також дорівнює k.

Доведення випливає з тверджень 2 та 3. З твердження 4 випливає, що в m-тому стовпці таблиці достатньо знайти числа в рядках з номерами до $2m$ включно, тобто в наведеній таблиці відомі всі елементи стовпців з номерами до 10 включно.

Твердження 5 Нехай k – число всіх попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів. Тоді число всіх попарно неізоморфних $(2m-1, m)$-графів дорівнює $k-1$.

Доведення. Серед k попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів тільки один має вектор степенів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m})$, всі інші $k-1$ графів мають принаймні одну ізольовану вершину. У відповідності до твердження 2 після видалення з кожного графа однієї ізольованої вершини отримаємо набір з $k-1$ попарно неізоморфних $(2m-1, m)$-графів, що і треба довести.

2. Редукція вектора степенів графа (Р-перетворення)

Означення 1 Нехай $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ - вектор степенів (n, m)-графа G. Нехай для деякого i виконується нерівність $s_i \geq 2$ і (v_i, v_j) - одне з ребер, інцидентних вершині v_i. Додамо до графа нову ізольовану вершину v_{n+1}. Ребро (v_i, v_j) видалимо, а ребро (v_j, v_{n+1}) додамо. Тоді степінь вершини v_i

зменшиться на 1, а степінь нової вершини буде рівною 1. Будемо говорити, що виконано перетворення графа G, й називати його Р-перетворенням.

За допомогою Р-перетворення можна описати перехід від набора попарно неізоморфних $(2m-k, m)$-графів при $k>0$ до набору попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів. У відповідності до твердження 2 у множині всіх попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів є підмножина, еквівалентна множині всіх попарно неізоморфних $(2m-k, m)$-графів. Виділимо з множини всіх попарно неізоморфних $(2m-k, m)$-графів підмножину графів без ізольованих вершин. Серед них немає графа з вектором степенів (1,1,…,1), оскільки тоді у відповідності до твердження 3 число вершин було б рівне $2m$. Застосуємо до них Р-перетворення, понизивши степінь однієї з вершин на 1. Отримаємо набір попарно неізоморфних $(2m-k+1, m)$-графів без ізольованих вершин. Якщо серед них немає графа з вектором степенів (1,1,…,1), то до нового набору графів знову застосуємо Р-перетворення. Зрозуміло, що після k-того кроку отримаємо $(2m, m)$-граф з вектором степенів (1,1,…,1). Для отримання повного набору попарно неізоморфних $(2m, m)$-графів треба всі отримані графи доповнити необхідною кількістю ізольованих вершин. Цей прийом застосовується в доведенні теореми 1.

3. Доведення рекурентних співвідношень

Теорема 1 Нехай $T(n, m)$ - число попарно неізоморфних (n, m)-графів. Тоді мають місце наступні співвідношення:

$$T(2m, m) = T(2m,1) + T(2m-1, m),\ m>1 \tag{1}$$

$$T(2m, m) = T(2m,2) + T(2m-2, m),\ m>2 \tag{2}$$

$$T(2m, m) = T(2m,3) + T(2m-3, m),\ m>3 \tag{3}$$

$$T(2m, m) = T(2m,4) + T(2m-4, m) + 1,\ m>5 \tag{4}$$

$$T(2m,m)=T(2m,5)+T(2m-5,m)+4,\ m>7 \tag{5}$$

$$T(2m,m)=T(2m,6)+T(2m-6,m)+4,\ m>9 \tag{6}$$

Доведення. З таблиці та твердження 4 маємо: $T(2m,1)=T(2,1)=1$ при $m>1$; $T(2m,2)=T(4,2)=2$ при $m>2$; $T(2m,3)=T(6,3)=5$ при $m>3$; $T(2m,4)=T(8,4)=11$ при $m>4$; $T(2m,5)=T(10,5)=26$ при $m>5$; $T(2m,6)=T(12,6)=68$ при $m>6$. Тотожність (1) безпосередньо випливає з рівності $T(2m,1)=T(2,1)=1$ та твердження 5. Зупинимось, наприклад, на доведенні тотожності (3).

Нехай $T(2m-3,m)=k$. Розглянемо ті з цих графів, які не мають ізольованих вершин. Їх вектори степенів можуть мати тільки один з видів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-4}4)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-5}2,3)$ и $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6}2,2,2)$. При $m>5$ можливі 7 попарно неізоморфних графів G_1, $G_2,\ldots,G_7$ з такими векторами степенів. На рисунку 2 вони зображені при $m=6$. При $m>6$ ці графи доповнюються компонентами зв'язності, які є $(2,1)$-підграфами. При $m=5$ з цього набору треба видалити граф G_1, а при $m=4$ – графи G_1, G_2 та G_5.

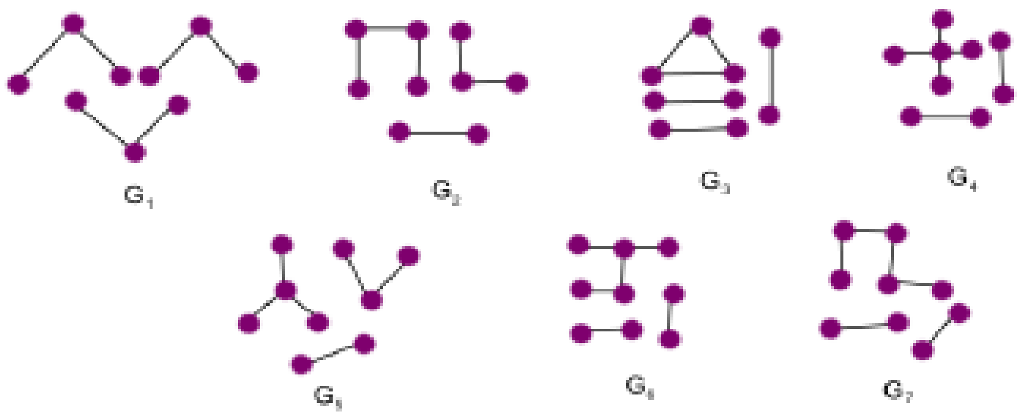


Рис.2 – Графи без ізольованих вершин при $m=6$

Будемо поступово додавати до цих графів по одній вершині, одночасно виконуючи P-перетворення. Нам треба зробити три кроки, щоб отримати графи з $2m$ вершинами. На кожному кроці, у відповідності до означення 1, $(2,1)$-підграфи не перетворюються.

Після першого кроку отримаємо набір з трьох графів G_1', G_2' та G_3' (рисунок 3). Вектори їх степенів мають вигляд $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-3},3)$ та $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-4},2,2)$.

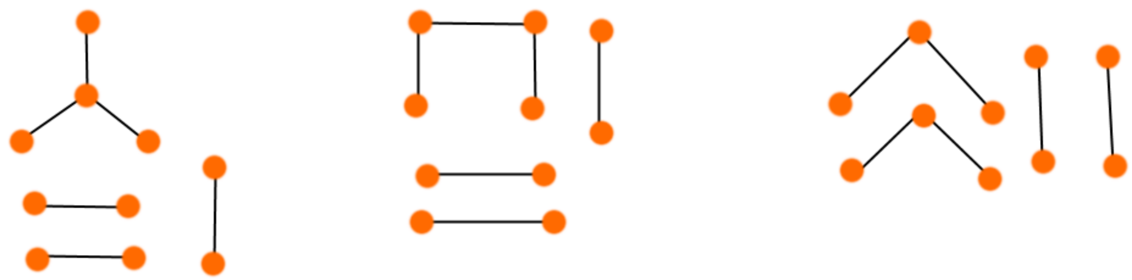


Рис.3 – Графи G_1', G_2', G_3' при $m = 6$

На другому кроці графи G_1', G_2', G_3' перетворюються в один і той самий граф G'', який складається з $(2,1)$-підграфів й одного $(3,2)$-підграфа, та має вектор степенів вигляду $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-2},2)$ Нарешті, після третього кроку отримаємо граф G з вектором степенів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m})$, тобто він складається з m штук $(2,1)$-підграфів.

Повний набір попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів складається з k вихідних графів, доповнених трьома ізольованими вершинами, графів G_1', G_2', G_3', доповнених двома ізольованими вершинами, графа G'', доповненого однією ізольованою вершиною, та графа G. Тотожність (3) доведена.

Для доведення тотожності (4) покладемо $T(2m-4,m)=k$. Серед них маємо графи без ізольованих вершин з векторами степенів вигляду $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-5}5)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-6}24)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-6}33)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-7},2,2,3)$ та $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-8},2,2,2,2)$. Після Р-перетворення цих графів при $m>5$ отримаємо 7 попарно неізоморфних графів з $2m-3$ вершинами. Наступне Р-перетворення дасть три графа з $2m-2$ вершинами. На наступному кроці отримаємо один граф з вектором степенів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-2}2)$. Останнє Р-перетворення дасть граф з вектором степенів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m})$. Таким чином, повний набір попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів складається з $k+12$ графів і це число співпадає з правою частиною співвідношення (4). Відзначимо, що при $m=5$ має місце рівність $T(2m,m)=T(2m,4)+T(2m-4,m)$.

Аналогічно доводяться співвідношення (5) та (6). Зрозуміло, що зі зростанням m збільшується й число графів без ізольованих вершин у сукупності неізоморфних $(2m-k,m)$-графів. Відмітимо, що необов'язково зображувати ці графи, оскільки їх кількість не має значення. Достатньо аналізувати $(2m-k+1,m)$–графи, які отримуються у результаті першої редукції. Їх вектори степенів отримуються з векторів степенів $(2m-k,m)$-графів додаванням до них зліва нуля (це відповідає додаванню до графу ізольованої вершини), а потім заміною нуля одиницею з одночасним зменшенням на 1 степеня однієї з вершин. Наприклад, у випадку співвідношення (5) маємо $(2m-5,m)$-графи без ізольованих вершин з векторами степенів вигляду $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-6},6)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-7},2,5)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-7},3,4)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-8},2,3,3)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-8},2,2,4)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-9},2,2,2,3)$ та $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-10},2,2,2,2,2)$. Після першої редукції отримаємо вектори степенів вигляду $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-5},5)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-6},2,4)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-6},3,3)$,

$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-7},2,2,3)$ та $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-8},2,2,2,2)$. Існує 18 попарно неізоморфних $(2m-4,m)$-графів без ізольованих вершин з такими векторами степенів. Після другої редукції набір векторів степенів стає таким: $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-4},4)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-5},2,3)$, $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-6},2,2,2)$. Відповідних їм графів буде 7. Після третьої редукції маємо вектори степенів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-3},3)$ та $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-4},2,2)$ й три відповідних їм попарно неізоморфних графів. Далі отримаємо $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m-2},2)$ й єдиний можливий граф. Й, нарешті, остання редукція приводить до графу з вектором степенів $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2m})$. Таким чином, якщо $T(2m-5,m)=k$, то ліва та права частини рівності (5) набудуть значення $k+30$. При $m=6$ та $m=7$ мають місце рівності $T(2m,m)=T(2m,5)+T(2m-5,m)+1$ та $T(2m,m)=T(2m,5)+T(2m-5,m)+3$ відповідно. При $m=8$ та $m=9$ мають місце рівності $T(2m,m)=T(2m,6)+T(2m-6,m)+1$ та $T(2m,m)=T(2m,6)+T(2m-6,m)+3$ відповідно. В цьому можна переконатись безпосередньо, скориставшись таблицею.

4 Обчислення деяких відсутніх в таблиці елементів

З доведених співвідношень випливає ряд інших рекурентних співвідношень, наприклад

$$T(2m-1,m)=T(2m-2,m)+1,\ m>2 \qquad (7)$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-3,m)+3,\ m>3 \qquad (8)$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-4,m)+10,\ m>5 \qquad (9)$$

$$T(2m-3,m)=T(2m-5,m)+25,\ m>7 \qquad (10)$$

$$T(2m-3,m)=T(2m-6,m)+67,\ m>9 \tag{11}$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-6,m)+70,\ m>9 \tag{12}$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-5,m)+28,\ m>7 \tag{13}$$

При $m=11$ зі співвідношення (7) отримаємо $T(21{,}11)=T(20{,}11)+1=15215$. Тоді, зі співвідношення (1) знайдемо $T(22{,}11)=T(21{,}11)+1=15216$. При $m=12$ зі співвідношення (10) отримаємо $T(21{,}12)=T(19{,}12)+25=52914+25=52939$, а зі співвідношення (9) $T(22{,}12)=T(20{,}12)+10=52932+10=52942$. Знову зі співвідношення (7) знайдемо $T(23{,}12)=T(22{,}12)+1=52942+1=52943$, а зі співвідношення (2) $T(24{,}12)=T(22{,}12)+2=52942+2=52944$.

Співвідношення (12) дає можливість обчислити елемент $T(24{,}13)$. Отримаємо $T(24{,}13)=T(20{,}13)+70=193295+70=193365$. А далі з (13) $T(24{,}13)=T(21{,}13)+28$, звідки $T(21{,}13)=193365-28=193337$. З (9) $T(24{,}13)=T(22{,}13)+10$, звідки $T(22{,}13)=193365-10=193355$. З (8) $T(24{,}13)=T(23{,}13)+3$. Значить, $T(23{,}13)=193365-3=193362$. Тепер обчислимо $T(25{,}13)$ та $T(26{,}13)$, додамо до $T(24{,}13)$ одиницю та двійку відповідно.

На рисунку 4 зображено новий фрагмент таблиці. Таким чином, тепер відомі всі елементи стовпців з номерами до 13 включно.

n \ m	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
XIX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4612	15211	52914	193186
XX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15214	52932	193295
XXI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15215	52939	193337
XXII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52942	193355
XXIII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52943	193362
XXIV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193365
XXV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193366
XXVI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193367

Рисунок 4 – Новий фрагмент таблиці чисел неізоморфних (n,m)-графів

Для перевірки отриманих результатів була використана відома формула Харарі для знаходження числа неізоморфних звичайних графів. Обчислення елементів у рядках таблиці здійснювалось на персональному комп’ютері за допомогою спеціально створених програм. Результати обчислень за формулою Харарі та за знайденими у цій роботі рекурентними співвідношеннями виявились однаковими. Цей факт свідчить про ефективність використання властивостей таблиці та перспективність їх подальшого дослідження для знаходження можливостей заповнення таблиці.