Знаходження границь послідовностей

Основні формули, що використовуються при обчисленні границь послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, |a|<1 \\ +\infty, a>1, \\ \text{не існує}, a \le -1. \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a = \text{const.}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad |a| > 1$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a = \text{const.}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{x_n} = \left(\frac{c}{0}\right) = \infty, c - \text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{x_n} = \left(\frac{c}{\infty}\right) = 0,, c - \text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e = 2,718281...$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Послідовність $\{x_n\}$ називають **обмеженою**, якщо $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \le M$. (існує таке додатне число M, що для будь-якого номера n модуль n-го члена послідовності не перевищує M).

Послідовність називають **необмеженою**, якщо $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left|x_{n_0}\right| > M$ (для будь-якого додатного числа M існує такий номер n_0, що модуль члена послідовності з цим номером більший M).

. I. Дослідити послідовність на обмеженість

1. $x_n = \dfrac{8n}{2n-1}$.

Розв'язання.

$$\left|x_n\right| = \frac{8n}{2n-1} = \frac{4\cdot(2n-1)+4}{2n-1} = 4 + \frac{4}{2n-1} \le 4+4 = 8.$$

$\left|x_n\right| \le 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тому послідовність є обмеженою.

2. $x_n = (-1)^n n^2$.

Розв'язання. Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ є необмеженою. Для цього покажемо, що для будь-якого додатного числа M існує такий номер n_0, що модуль члена послідовності з цим номером більший M. $\left|x_n\right| = n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M}$. Виберемо у якості n_0 будь-який номер, що перевищує $\sqrt{M}$, наприклад, $n_0 = \left[\sqrt{M}\right] + 1$. Тоді $\left|x_{n_0}\right| > M$, послідовність необмежена.

3. $x_n = \sqrt{n^2+8} - \sqrt{n^2+3}$.

Розв'язання. Оскільки $x_n > 0$, то отримуємо:

$$\left|x_n\right| = x_n = \sqrt{n^2+8} - \sqrt{n^2+3} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+8} - \sqrt{n^2+3}\right)\left(\sqrt{n^2+8} + \sqrt{n^2+3}\right)}{\sqrt{n^2+8} + \sqrt{n^2+3}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{n^2+3}} < \frac{5}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \frac{5}{2n} \le \frac{5}{2}.$$

Отже, згідно з означенням послідовність обмежена.

4. $x_n = \dfrac{n^3}{4n+1}$.

Розв'язання. Оскільки $x_n > 0$, то $|x_n| = x_n = \dfrac{n^3}{4n+1}$. Покажемо, що $4n+1 < n^2$, $n > 4$. З останньої нерівності випливає, що $n^2 - 4n - 1 > 0$. Дійсно, $n^2 - 4n - 1 = (n-2)^2 - 5 > 0$ при $n > 4$. Отже, $4n+1 < n^2$, звідси $\dfrac{n^3}{4n+1} > \dfrac{n^3}{n^2} = n$. Для довільного як завгодно великого $M > 0$ завжди можна вибрати номер $n_0 > M$, тоді $|x_{n_0}| = \dfrac{n_0{}^3}{4n_0+1} > n_0 > M$, послідовність необмежена.

5. $x_n = \arcsin \dfrac{n}{2n+3}$.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{n}{2n+3} > 0$, то $|x_n| = x_n = \arcsin \dfrac{n}{2n+3} \le \dfrac{\pi}{2} \forall n \in \mathbb{N}$, тому послідовність є обмеженою.

II. Знайти наступні границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\sqrt[4]{16n^8+3n^2-2n+1}+6n^2-n+1}{4n^2+3}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $n^{\frac{8}{4}}=n^2$, старший степінь знаменника також n^2. Отже, границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt[4]{16n^8+3n^2-2n+1}+6n^2-n+1}{4n^2+3}=$$

$$=\frac{5\sqrt[4]{16}+6}{4}=\frac{16}{4}=4.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{2n^2+9}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{2n^2+9}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2+9}=\dfrac{1/2}{2}=\dfrac{1}{4}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}.$$

Тут ми використали формулу суми n членів геометричної прогресії $b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, а також формулу 1) з основних формул ($\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5^n}=0$).

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{2^n+3^n}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на степінь з найбільшою основою, тобто на 4^n. Отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty .$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\cdot n!+(n+2)!}{3\cdot(n+1)!}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot n!+(n+2)!}{3\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot\left(2n+(n+1)(n+2)\right)}{3n!\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+2}{3n+3}=\infty,$$

оскільки старший степінь чисельника більший, ніж старший степінь знаменника.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{3n+2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(1)^\infty$, тому використовуємо формулу 10). Для цього дріб у дужках приведемо до вигляду $1+\alpha_n$, де α_n – нескінченно мала послідовність. Для цього до дробу у основі степеня додамо та віднімемо 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{5n-2}\right)^{3n+2}=\left(1\right)^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{5n+1}{5n-2}-1\right)\right)^{3n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n-2}\right)^{\frac{5n-2}{3}\cdot\frac{3}{5n-2}\cdot(3n+2)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(3n+2)}{5n-2}}=$$

$$=e^{\frac{9}{5}}.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5\sqrt{25n^2+3n+2}}{9n+4}$. (Відповідь: $\dfrac{28}{9}$).
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{n^5}-2n^3+5n^2-4\sqrt{n}+1}{n^5+5}$. (Відповідь: 0).
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^{2n}$. (Відповідь: e^{16}).
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+...+3^n}{3^n}$. (Відповідь: $\dfrac{3}{2}$).
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$. (Відповідь: 0).
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-3\cdot n!}{2n^2\cdot n!}$. (Відповідь: $\dfrac{1}{2}$).
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^6+4n^5-1}{n\cdot\sqrt[3]{n^{12}+3n^2+1}+8n^3+3n+2}$. (Відповідь: ∞).