

Лекція 6

1. Предмет комбінаторики. Основні правила комбінаторики

Комбінаторика має глибокі стародавні корені. Відомо, що ще у VI–IV ст. до н.е. у школі Піфагора вивчали числа виду $\frac{n(n-1)}{2}$, які є комбінаціями з n елементів по 2. Поява грошей сприяла поширенню азартних ігор, що підштовхнуло до аналізу комбінацій, які отримуються при підкиданні кубиків. У XVII ст. з'явилась робота Лейбниця «Рассуждения о комбинаторном искусстве». В роботах Бернуллі містилися формули комбінаторики. Сучасний вигляд ці формули набули лише в XIX ст. З комбінаторними задачами стикаються спеціалісти різного профілю, її застосовують в теорії ймовірностей, теорії алгоритмів, алгебрі, топології. В теперішній час у зв'язку з широким використанням ЕОМ роль комбінаторики значно зростає.

Виділяють два класа комбінаторних задач:

- На знаходження кількості комбінаторних конфігурацій із заданими властивостями;
- На перерахування всіх комбінаторних конфігурацій із заданими властивостями.

Розглянемо нескладні задачі і сформулюємо два основних правила комбінаторики.

Задача. З пункту A в пункт B можна дістатись трьома видами транспорту $\{T, A, M\}$, а з пункту B в пункт C – двома $\{T, A\}$. Скількома способами можна дістатися з A в C , заїжджаючи в B ?

Розв'язання. Можливі варіанти запишемо у вигляді упорядкованих пар: (T, T) , (T, A) , (A, T) , (A, A) , (M, T) , (M, A) . Отже, шукане число дорівнює

потужності декартового добутку множин $\{T, A, M\}$ і $\{T, A\}$, тобто дорівнює $3 \cdot 2 = 6$.

Правило добутку. Якщо елемент A можна вибрати a способами, і після кожного з цих виборів елемент B можна вибрати b способами, то вибір « A і B » можна здійснити $a \cdot b$ способами.

Задача. Скільки парних тризначних чисел можна скласти з цифр 2, 3, 4, 5, 7? Цифри можуть повторюватись.

Розв’язання. Звернемо увагу на те, що шукане число комбінацій заданих цифр можна розбити на класи так, що кожна комбінація входить лише до одного класу. Таких класів тут два – числа, що закінчуються на 2 і числа, що закінчуються на 4. За правилом добутку кожний клас складається з $5 \cdot 5 = 25$ чисел, отже, загальна кількість чисел – 50.

Правило суми. Якщо елемент A можна вибрати a способами, а елемент B – іншими b способами, причому вибори « A і B » є неможливими, то вибір « A або B » можна здійснити $a + b$ способами.

Правило суми в термінах множин. Нехай множина A складається з m елементів, а множина B складається з n елементів, причому множини не перетинаються. Тоді множина $A \cup B$ складається з $m + n$ елементів

Зауваження. Можна розбивати число комбінацій на класи, в яких є однакові комбінації. Тоді загальне число комбінацій отримаємо за формулою $a + b - k$, де k – число співпадінь.

Задача. Скількома способами з 28 кісток доміно можна вибрати кістку, на якій є 2 або 5?

Розв’язання. В першому класі кістки з 2, їх 7, в другому класі – з 5, їх теж 7. Але кістку 2:5 віднесено і до першого, і до другого класів. Тому маємо наступну відповідь: $7 + 7 - 1 = 13$.

2 Упорядковані й неупорядковані підмножини без повторень даної скінченної множини

Означення. Нехай $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – скінченна множина.

Упорядковані підмножини з k елементів множини M називаються:

1) при $n > k$ розміщеннями з n елементів по k , а їх кількість позначається символом A_n^k ;

2) при $n = k$ перестановками n елементів, а їх кількість позначається символом P_n .

Два розміщення з n елементів по k є різними у двох випадках:

- 1) якщо складаються з різних елементів;
- 2) якщо складаються з однакових елементів, розміщених в різному порядку.

За правилом добутку отримаємо $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$ або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 3! \cdot 4 \cdot 5$$

При $n = k$ маємо $A_n^n = P_n = n!$ тому, що за означенням $0! = 1$.

Означення. Комбінацією з n елементів по k називається будь-яка неупорядкована k -елементна підмножина множини M . Кількість комбінацій з n елементів по k позначається символом C_n^k .

Оскільки з кожної неупорядкованої k -елементної множини можна утворити $k!$ упорядкованих множин, то має місце формула $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, звідки

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Зауваження. Розглянуті комбінаторні конфігурації без повторень можна утворити за такою схемою: з множини $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, в якій всі елементи різні, навмання вибирається один елемент, потім з решти елементів вибирається другий елемент, і так далі, поки не виконаємо k кроків. Таку процедуру в комбінаториці називають *схемою випадкового вибору без повернень*.

3 Упорядковані й неупорядковані підмножини з повтореннями даної скінченної множини

Означення. Розміщеннями з повтореннями з n елементів по k називають упорядковані набори, складені з елементів n видів по k елементів у кожному, причому в один і той же набір можуть входити елементи одного виду. Число таких наборів позначають $\overline{A_n^k}$.

Формулу для обчислення $\overline{A_n^k}$ отримуємо за правилом добутку:

$$\overline{A_n^k} = n^k,$$

оскільки кожен з k елементів розміщення можна обирати n способами.

Означення. Нехай $M = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ – скінченна множина, в якій елемент a_j повторюється i_j разів (мультимножина), причому

$i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$, $n > k$. Перестановка елементів множини M називається *перестановкою з повтореннями*, а число різних перестановок з повтореннями позначається символом $\overline{P}_n(i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Якщо вважати всі елементи перестановки різними, то кількість таких перестановок дорівнює $n!$. Серед них $i_1!$ перестановок, в яких i_1 елементів a_1 (які ми вважаємо різними) міняються місцями. Ці перестановки, очевидно, є однаковими. За правилом добутку отримаємо $i_1! i_2! \dots i_k!$ однакових перестановок. Отже, формула для числа n - елементних перестановок з повтореннями має вигляд

$$\overline{P}_n(i_1, i_2, \dots, i_k) = \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!}.$$

Означення. *Комбінаціями з повтореннями з n елементів по k* називають усілякі неупорядковані набори, складені з елементів n видів по k елементів у кожному, причому в один і той же набір можуть входити елементи одного виду. Число таких наборів позначають $\overline{C}_n^k$.

Приклад. Всі комбінації з повтореннями, що складаються з елементів мультимножини $X = \{a, \dots, b, \dots\}$ і містять по 3 елементи, утворюють множину $\{\{a, a, a\}, \{a, a, b\}, \{a, b, b\}, \{b, b, b\}\}$, тобто $\overline{C}_2^3 = 4$.

Твердження. Кількість різних комбінацій з повтореннями з n елементів по k дорівнює

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Ідея доведення цієї теореми зрозуміла з наступної задачі, в якій застосовується прийом кодування кожної з комбінацій з повтореннями.

Задача. У кондитерському магазині продавалися 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, піскові й листкові. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язання. Ця задача є задачею на комбінації з повтореннями, тому що порядок, у якому укладають тістечка в коробку, неістотний. Щоб розв'язати задачу, зашифруємо кожну покупку за допомогою нулів і одиниць. Спочатку напишемо стільки одиниць, скільки куплено наполеонів. Потім, щоб відокремити наполеони від еклерів, напишемо нуль, потім – стільки одиниць, скільки куплено еклерів, і т.д. Наприклад, якщо куплено 3 наполеони, 1 еклер, 2 піскових і 1 листкове тістечко, то одержимо такий запис: 1110101101. Ясно, що різним покупкам відповідають різні комбінації з 7 одиниць і 3 нулів. Обернено, кожній комбінації 7 одиниць і 3 нулів відповідає якась покупка.

Таким чином, число різних покупок дорівнює числу перестановок з повтореннями, які можна скласти з 7 одиниць і 3 нулів. А це число дорівнює $\bar{P}_{10}(7,3)=120$.

Цей результат можна отримати іншим чином. Розташуємо тістечка в кожній покупці в такому порядку: наполеони, еклери, піскові й листкові, а потім перенумеруємо їх. Але при нумерації будемо до номерів еклерів додавати 1, до номерів піскових – 2, до номерів листкових – 3. До номерів наполеонів нічого додавати не будемо. Наприклад, нехай куплено 2 наполеони, 3 еклери, 1 піскове тістечко й 1 листкове. Тоді ці тістечка нумеруються так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, що найбільший номер може бути 10, самий маленький – 1, а, крім того, жоден з номерів не повторюється, причому вони утворюють зростаючу послідовність. Обернено, кожній зростаючій послідовності з 7 чисел відповідає деяка покупка. Наприклад, послідовності 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 відповідає покупка з 4 еклерів і 3 піскових тістечок. Щоб переконатися в цьому, треба відняти від заданих чисел їх

номери, тобто числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Одержимо числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Але 1 ми додавали до номерів еклерів, а 2 – до номерів піскових.

Звідси, загальне число покупок дорівнює числу зростаючих послідовностей довжини 7 з чисел від 1 до 10. А число таких послідовностей дорівнює $C_{10}^7 = 120$.

У загальному випадку: якщо з n типів предметів потрібно скласти набори з k предметів з повтореннями, то число способів буде дорівнювати:

$$\overline{C_n^k} = \overline{P}_{n+k-1}(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Зауваження. Розглянуті комбінаторні конфігурації з повтореннями можна утворити за такою схемою: з множини $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, в якій всі елементи різні, навмання вибирається один елемент, фіксується і повертається в множину, потім вибирається другий елемент, фіксується і повертається в множину, і так далі, поки не виконаємо k кроків. Таку процедуру в комбінаториці називають *схемою випадкового вибору з поверненнями*.

Практичне заняття 6

Задача 1. Скількома способами студент філологічного факультету може обрати одну книгу, якщо на полиці знаходяться 15 книг з філософії, 10 книг з інформатики та 5 книг з математики.

Розв’язання. Книгу з філософії можна обрати 15 способами, книгу з інформатики – 10 способами, а книгу з математики – 5 способами. Студент може обрати тільки одну книгу. Тому, відповідно до правила суми, він може взяти її $15 + 10 + 5 = 30$ способами.

Задача 2. Скількома способами можна обрати голосну і приголосну літери из слова *процент*.

Розв'язання. Голосну літеру можна вибрати двома способами (*о* або *е*), а приголосну – п'ятьма способами (вибрати *п, р, ц, н* або *т*). Отже, відповідно до комбінаторного правила добутку, голосну та приголосну літери можна обрати $2 \cdot 5 = 10$ способами.

Задача 3. Скількома способами студенту філологічного факультету можна обрати дві книги по різних дисциплінам, якщо на полиці стоїть 15 книг з філософії, 10 книг з інформатики та 5 книг з математики.

Розв'язання. Якщо обирати книгу з філософії і книгу з інформатики, то існує 15 варіантів обрання книги з філософії і 10 варіантів обрання книги з інформатики, тому, за правилом множення, для цього вибору існує $15 \cdot 10 = 150$ можливостей. Якщо обирати книгу з філософії і книгу з математики, то за тим же правилом отримаємо $15 \cdot 5 = 75$ можливостей. Якщо ж обираються книги з інформатики та математики, то маємо $10 \cdot 5 = 50$ способів такого вибору.

Нарешті, оскільки вказані три набори різних пар книг відрізняються один від одного, то за правилом суми всього існує $150 + 75 + 50 = 275$ способів вибору двох книг.

Задача 4. Сім дівчат водять хоровод. Скількома різними способами вони можуть встати в круг?

Розв'язання. Шукане число у 7 разів менше за загальну кількість перестановок семи елементів без повторень, тому що циклічні перестановки природно вважати однаковими. Отже, маємо відповідь $\frac{7!}{7} = 6! = 720$.

Загальна формула для числа перестановок n предметів, розташованих на колі, має вигляд

$$P_n(\text{коло}) = (n - 1)!$$

Задача 5. Довести, що потужність булеана n -елементної множини дорівнює 2^n .

Розв’язання. Занумеруємо елементи множини натуральними числами від 1 до n . Кожній підмножині поставимо у відповідність двійкове слово довжини n , в якому 1 на i -тому місці означає присутність у підмножині елемента даної множини з номером i , і 0 – в протилежному випадку. Тоді кількість підмножин в даній множині дорівнює числу розміщень з двох елементів по n з повтореннями, а отже дорівнює $\overline{A_2^n} = 2^n$, що й треба було довести.

Задача 6. До ліфту дев’ятиповерхового будинку зайшли 4 людини (на першому поверсі). Скільки всього є способів виходу на поверхах?

Розв’язання. В цій задачі поверхи будинку з множини $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ розподіляються по 4 людям, тобто реалізується схема випадкового вибору з поверненням з множини X чотирьох елементів. Оскільки порядок розподілу є істотним, то це будуть розміщення з повтореннями по 4 елементи (люди) з 8 (поверхи 2, 3, ..., 9), кількість яких дорівнює:

$$\overline{A_8^4} = 8^4 = 4096.$$

Задача 7. Знайти кількість всіх сполук (комбінацій) з повтореннями з множини $\{a, \dots, b, \dots, c, \dots\}$ по три елементи в кожному. Перерахувати всі ці сполуки.

Розв’язання. Кількість всіх сполук $\overline{C_3} = C_5^3 = 10$. Запишемо їх всі:

$\{a, a, a\}$, $\{a, a, b\}$, $\{a, b, b\}$, $\{b, b, b\}$, $\{c, c, c\}$, $\{c, c, a\}$, $\{c, a, a\}$, $\{c, c, b\}$, $\{c, b, b\}$, $\{a, b, c\}$.

Задача 8. Скільки різних семизначних чисел можна скласти з цифр 1, 1, ... 2, 2, ... 3, 3, ...? А скільки тризначних?

Розв’язання. Кількість семизначних чисел дорівнює $\overline{A_3^7} = 3^7$, оскільки маємо три види цифр і обираємо з них сім цифр. Так само і для тризначних отримаємо $\overline{A_3^3} = 3^3 = 27$. Той же результат можна отримати за правилом добутку.

Задача 9. Скільки різних семизначних чисел можна скласти з цифр 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3? А скільки тризначних?

Розв'язання. В порівнянні з попередньою задачею тут ми маємо додаткове обмеження на кількість цифр кожного виду.

Оскільки цифр всього сім, то семизначні числа є перестановками з повтореннями цих семи цифр, їх кількість отримаємо за формулою

$$\overline{P}_7(2,3,2) = \frac{7!}{2!3!2!} = 210.$$

Кількість тризначних чисел буде, в порівнянні з

попередньою задачею, на 2 менше, оскільки числа 111 і 333 неможливі. Отже відповідь – 25 тризначних чисел.

Задача 10. Підкидають два однакових гральних кубика. Скільки різних комбінацій можна у результаті отримати?

Розв'язання. Переформулюємо задачу. Усього при підкиданні одного кубика можливі шість ситуацій – маємо предмети шести різних типів. Підкидають два кубики, отже, з даних шести типів предметів необхідно вибрати два, причому нас не цікавить порядок вибору, і допускається вибір однакових предметів. Таким чином, це задача на комбінації з повтореннями. За формулою для обчислення їх кількості маємо $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ різних комбінацій.

Задача 11. На шкільній математичній олімпіаді було запропоновано 5 задач. Серед учасників олімпіади не виявилось двох, що розв'язали однаковий набір задач. Знайти найбільшу можливу кількість учасників олімпіади.

Розв'язання. У конкретного учасника по кожній задачі можливий один з двох станів: «0» - задача не розв'язана, «1» - задача розв'язана. Для отримання конкретного набору розв'язаних задач з вихідної множини $X = \{0,1\}$ навмання послідовно з поверненням обираються п'ять чисел. У результаті отримаємо послідовності довжини 5, що складаються з «0» та «1», в яких порядок розташування елементів істотний, оскільки перший елемент відповідає першій задачі, другий – другій і т.д. Отже, конкретний набір

розв'язаних задач є розміщенням з повтореннями з 5 елементів по 2

$$\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скільки є двозначних чисел в десятковій системі числення:
 - а) всього;
 - б) в яких немає однакових цифр;
 - в) парних всього;
 - г) парних з різними цифрами?
2. З 28 кісток доміно беруть 2. В якій кількості комбінацій другу кістку можна буде прикласти до першої (за правилами доміно)?
3. Скільки намист можна скласти з семи коштовних камінців, якщо:
 - а) всі камінці однакові;
 - б) всі камінці різні?
4. Скільки різних браслетів можна скласти з чотирьох однакових рубінів, п'яти однакових сапфірів і шести однакових ізумрудів, якщо треба використати всі камені?
5. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \dots, 4n\}$, щоб:
 - а) кожне парне число мало непарний номер;
 - б) кожне число, яке ділиться на 4, мало номер, який ділиться на 4?Відповідь. б) $(3n)!n!$
6. На кожній з п'яти карток написана одна з непарних цифр. Скільки трицифрових чисел можна скласти, використовуючи ці картки?
7. а) На перше заняття в аудиторію, де є всього 20 місць, прийшли 25

студентів. Скількома способами їх можна розсадити по цим місцям (при цьому п'ятеро залишаться стояти)?

б) Після сесії в цю ж аудиторію прийшли 15 студентів. Скількома способами їх можна розсадити по цим місцям (при цьому п'ять місць залишаться вільними)?

8. У мікроавтобусі 10 місць, включаючи місце водія. Скількома способами 10 людей можна розмістити на цих місцях, якщо місце водія можуть зайняти троє?

9. Скількома способами 3 хлопців і 5 дівчат можна розділити на 2 команди так, щоб в кожній команді було не менше одного хлопця?

10. Яких п'ятицифрових чисел більше: тих, які не діляться на 5 чи тих, у яких ні перша, ні друга цифра зліва – не п'ятірки?

11. На листі паперу написано число 1234567890. Лист розрізають на 4 частини так, що кожен розріз проходить між цифрами. Скількома способами це можна зробити?

12. На полиці знаходяться $n+m$ різних книг, з яких m – з чорною обкладинкою, а n – з червоною.

а) Скільки існує різних перестановок книг, при яких книги з чорними обкладинками займають m перших місць?

б) Скільки може бути перестановок, при яких усі книги з чорними обкладинками стоять поруч?

13. Треба розподілити $3n$ різних предметів серед трьох людей так, щоб кожен отримав порівну. Скількома способами можна це зробити?

14. Довести, що з $2n+1$ куль можна обрати непарну кількість куль тією самою кількістю способів, що і парну.

15. Скількома способами можна вибрати 6 тістечок, якщо асортимент складає 11 різних видів тістечок?

16. Скількома способами можна вибрати 11 тістечок, якщо асортимент складає 6 різних видів тістечок?

17. Довести, що кісток доміно саме 28.