

Практичне заняття № 4. Послідовності. Границі послідовності.

Приклад 1. Для заданої послідовності записати її перші чотири члени:

$$\text{а) } x_n = \frac{1}{n(n+1)}; \text{ б) } x_n = \begin{cases} -n^2, & n - \text{непарне,} \\ \frac{n-1}{n}, & n - \text{парне;} \end{cases} \text{ в) } x_1 = 1; x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + 1, n > 1.$$

Розв'язання. Підставимо у вирази для x_n послідовно $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.

$$\text{а) } x_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}, x_4 = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20};$$

$$\text{б) } n = 1 - \text{непарне}, x_1 = -1^2 = -1, n = 2 - \text{парне}, x_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, n = 3 - \text{непарне}, x_3 = -3^2 = -9,$$

$$n = 4 - \text{парне}, x_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\text{в) послідовність задана рекурентним способом, } x_1 = 1 - \text{задане}, x_2 = \frac{x_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

$$x_3 = \frac{x_2}{2} + 1 = \frac{3/2}{2} + 1 = \frac{7}{4}, x_4 = \frac{x_3}{2} + 1 = \frac{7/4}{2} + 1 = \frac{15}{8}.$$

Приклад 2. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$; б) $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

Розв'язання. а) $x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{(n^2 + 1) - 1}{n^2 + 1} = 1 - \frac{1}{n^2 + 1}$. З останньої рівності випливає, що $\frac{1}{2} < x_n < 1$, тобто $|x_n| < 1$, тому послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

б) $|x_n| = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| \leq 1$. Послідовність обмежена.

Приклад 3. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$.

Розв'язання. Покажемо, що $x_{n+1} > x_n$, тобто $x_{n+1} - x_n > 0$. $x_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+1}{3n+5}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{(2n+1)(3n+2) - (2n-1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{7}{(3n+5)(3n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n$, послідовність $\{x_n\}$ зростає.

Приклад 4. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ спадає, якщо $x_n = \frac{2n+1}{6n-5}$.

Розв'язання. Для спадної послідовності $x_{n+1} < x_n$, тому $x_{n+1} - x_n < 0$. Для заданої послідовності

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{6(n+1)-5} = \frac{2n+3}{6n+1}.$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+3}{6n+1} - \frac{2n+1}{6n-5} = \frac{(2n+3)(6n-5) - (2n+1)(6n+1)}{(6n+1)(6n-5)} = -\frac{16}{(6n+1)(6n-5)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $x_{n+1} - x_n < 0$, то $x_{n+1} < x_n$, послідовність $\{x_n\}$ спадає.

Приклад 5. Довести, що послідовність $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1, n > 1$ зростає.

Розв'язання. При $n > 1$ маємо: $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + 1 - x_n = 1 - \frac{x_n}{2}$. Для доведення зростання заданої послідовності покажемо, що $x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{x_n}{2} > 0$. Для цього покажемо, що $x_n < 2$. Використаємо метод математичної індукції. $x_1 = 1 < 2$. Нехай для довільного $n = k$ виконується нерівність $x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + 1 < 2$. Покажемо, що звідси випливає істинність нерівності і при $n = k + 1$, тобто $x_{k+2} = \frac{x_{k+1}}{2} + 1 < 2$. Дійсно, при $x_{k+1} < 2$ отримуємо, що $x_{k+2} = \frac{x_{k+1}}{2} + 1 < \frac{2}{2} + 1 = 2$. Отже, $x_{k+1} < 2 \Rightarrow x_{k+2} < 2$. Згідно з методом математичної індукції $x_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Отже, $x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{x_n}{2} > 0$, тому послідовність зростає.

Приклад 6. Довести, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо а) $x_n = \frac{2n+1}{2n+5}, a = 1$;

б) $x_n = \frac{1}{n!}, a = 0$.

Розв'язання. Для доведення того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, використаємо означення границі послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \left(|x_n - a| < \varepsilon \right)$$

$$\text{а) } |x_n - a| = \left| \frac{2n+1}{2n+5} - 1 \right| = \left| \frac{2n+1-(2n+5)}{2n+5} \right| = \left| \frac{-4}{2n+5} \right| = \frac{4}{2n+5} < \varepsilon.$$

З цієї невірності визначимо такий номер n_0 , що $\forall n > n_0 \quad \frac{4}{2n+5} < \varepsilon$. Отримуємо:

$$\frac{4}{2n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4 - (2n+5)\varepsilon}{2n+5} < 0.$$

Оскільки знаменник $2n+5 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $4 - (2n+5)\varepsilon < 0$. Звідси $2n+5 > \frac{4}{\varepsilon}$, $n > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}$. З цієї нерівності випливає, що за n_0 можна вибрати будь-яке натуральне число більше $\frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}$, наприклад,

$$n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2} \right\rceil + 1. \text{ Тоді } \forall n > n_0 \quad |x_n - a| = \left| \frac{2n+1}{2n+5} - 1 \right| < \varepsilon. \text{ Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+5} = 1.$$

б) Потрібно довести, що $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \frac{1}{n!} - 0 \right| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > n_0$.

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Останню нерівність отримуємо, замінивши у знаменнику дробу $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ кожен з множників $2, 3, \dots, n$ на 2. При цьому ми зменшуємо знаменник дробу і збільшуємо дріб.

З нерівності $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ знаходимо, що $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$. За n_0 виберемо будь-яке натуральне число більше $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$, наприклад, $n_0 = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 2$. Тоді $\forall n > n_0 \left| x_n - a \right| = \left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.

До **основних формул**, що використовуються при обчисленні границь послідовностей, відносять наступні:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, |a| < 1 \\ +\infty, a > 1, \\ \text{не існує, } a \leq -1. \end{cases}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a = \text{const.}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, |a| > 1.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a = \text{const.}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\alpha_n} = \infty, c = \text{const}, \text{ якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{L}}{x_n} = 0, \text{ якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \quad e = 2,718281\dots$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e, \text{ де } \alpha_n - \text{нескінченно мала послідовність.}$$

Розглянемо типові приклади обчислення границь послідовностей.

Приклад 7. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{n^2 + 2n - 1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^2 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{n^2 + 2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

При $n \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (це границі виду $\frac{c}{\infty} = 0, c = \text{const}$). Тому, використавши

теореми про границі суми, різниці та частки послідовностей, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{n^2 + 2n - 1} = \frac{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 3.$$

Приклад 8. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 5}{n^3 + 7n - 4}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^3 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 5}{n^3 + 7n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{7}{n^2} - \frac{4}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3}} = \frac{0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0.$$

Приклад 9. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n + 3}{n^2 + 3n + 1}$.

Розв'язання. Поділивши чисельник та знаменник дробу на n^4 , знаходимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n + 3}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^4}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty.$$

Зауваження. Нехай загальний член послідовності – це дріб, у чисельнику та знаменнику якого знаходяться многочлени або ірраціональні вирази. Нехай m – старший степінь чисельника, k – старший степінь знаменника. Тоді при $m = k$ границя послідовності дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, при $m < k$ ця границя дорівнює нулю, при $m > k$ вона дорівнює нескінченності.

Приклад 10. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^6 + 3n^5 - 2n - 5n + 1}}{4n^2 + 2\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, старший степінь знаменника $k = 2$. Для даної послідовності $m < k$, тому границя дорівнює нулю.

Приклад 11. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 7}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m = 2$, старший степінь знаменника $k = 2$. Маємо $m = k$, тому границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, тобто при n^2 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 7} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Приклад 12. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{5n^3 + 1}$.

Розв'язання. Сума перших n натуральних чисел $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Отже, отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{5n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{5n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2(5n^3 + 1)}.$$

Старший степінь чисельника $m = 2$, старший степінь знаменника $k = 3$. Оскільки $m < k$, то границя даної послідовності дорівнює нулю.

Приклад 13. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2 + 2} - \frac{5n^2 - 1}{5n + 1} \right)$.

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{2n^2 + 2} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 1}{5n + 1} = \infty$. Маємо так звану невизначеність виду $(\infty - \infty)$.

Виконаємо віднімання дробів у дужках.

$$\bullet \quad \frac{2n^3}{2n^2 + 2} - \frac{5n^2 - 1}{5n + 1} = \frac{2n^3(5n + 1) - (5n^2 - 1)(2n^2 + 2)}{(2n^2 + 2)(5n + 1)} = \frac{2n^3 - 13n^2 + 3}{10n^3 + 2n^2 + 15n + 2}.$$

Отже, отримали $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2 + 2} - \frac{5n^2 - 1}{5n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 13n^2 + 3}{10n^3 + 2n^2 + 15n + 2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$

Приклад 14. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n + 3} - \sqrt{n + 1})$.

Розв'язання. Помножимо та поділимо вираз $\sqrt{2n + 3} - \sqrt{n + 1}$ на спряжений до нього вираз $\sqrt{2n + 3} + \sqrt{n + 1}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) - (n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n+1}} = +\infty,\end{aligned}$$

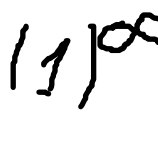
оскільки старший степінь чисельника $m=1$, старший степінь знаменника $k=\frac{1}{2}$, тобто $m > k$.

Приклад 15. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$.

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! \cdot (n+1) - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! \cdot (n+1-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

Розглянемо обчислення границь послідовностей, пов'язаних з використанням числа « e ». Воно ґрунтується на застосуванні формули (9): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = 2,718281\dots$ Тут при $n \rightarrow \infty$ отримуємо так звану невизначеність виду (1^∞) .

Формулу (9) часто застосовують у вигляді формули (10): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$, де α_n – нескінченно мала послідовність, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Приклад 16. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$. 

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = (1^\infty)$. Маємо невизначеність виду (1^∞) , тому потрібно застосувати формулу (10): $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$, де α_n – нескінченно мала послідовність. У нашому прикладі $\alpha_n = \frac{3}{n}$. Отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{\frac{1}{3}}} = e^3,$$


оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$.

Приклад 17. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$. $(1)^\infty$

Розв'язання. Маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3} = (1^\infty)$, отже, потрібно застосувати формулу (10). Для цього виконаємо наступне перетворення загального члена послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{n-1}{n+4} - 1\right)\right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}.$$

Тут $\alpha_n = -\frac{5}{n+4}$. Виділимо вираз виду $(1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{5}{n+4} \right) \right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{5}{n+4} \right)^{\frac{n+4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{n+4} \right) (2n+3)} \right) = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(2n+3)}{n+4}} = e^{-10}.$$

Домашнє завдання:

1. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+4}}$; б) $x_n = 2^{\cos n}$.

2. Довести, що послідовність $x_n = n^2 - 2n$ є необмеженою.

✓ 3. Обчислити границі: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n^2+2}+4n}{2n+5}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n\sqrt{n}+3n-1}{\sqrt{4n^5+2}-\sqrt{n}}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+2n^2-3}{5n+1}$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$ → 2

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$ → $S = \frac{b_1}{1-q}$

е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+2n} \right)^{4n^2} \rightarrow 1^\infty$

$\frac{n^2 - n + 1}{n + \sqrt{\dots}} = \frac{1}{\infty} = 0$