Тема 12. Елементи теорії функцій комплексної змінної

12.1 Поняття комплексного числа

Означення 11.1. *Комплексним числом* називають вираз

$$z = x + iy, \tag{12.1}$$

де x та y – дійсні числа, а символ i – це *уявна одиниця*, яка визначається умовою $i^2 = -1$. При цьому число x називають *дійсною частиною* комплексного числа z і позначають $x = \operatorname{Re} z$, а число y – *уявною частиною* z, $y = \operatorname{Im} z$.

Означення 12.2. Вираз, що міститься у правій частині рівності (12.1), називають *алгебраїчною формою* запису комплексного числа.

Два числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними тоді і лише тоді, коли відповідно рівні їх дійсні та уявні частини: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексне число $z = x + iy$ дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли $x = 0$, $y = 0$.

Означення 12.3. Два комплексних числа $z = x + iy$ та $\overline{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявних частин, називають *спряженими*.

Основні дії над комплексними числами (додавання, віднімання, множення та ділення) виконуються за звичайними правилами цих дій з многочленами з врахуванням того, що $i^2 = -1$:

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Для спряжених чисел z та $\overline{z}$ $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$, тобто добуток спряжених чисел дорівнює сумі квадратів дійсної та уявної частини.

Таким чином, ми розширили множину чисел, ввівши в неї комплексні числа так, що дійсні числа стали лише окремими випадками комплексних. У цій розширеній множині виконуються дії додавання, віднімання, множення та ділення, причому властивості цих дій залишаються такими ж, як і для множини дійсних чисел. Рівняння $z^2 + 1 = 0$, що є нерозв'язним на множині дійсних чисел, має розв'язки $z_{1,2} = \pm i$ у множині комплексних чисел. Множину комплексних чисел позначають літерою $\mathbb{C}$.

Комплексне число $z = x + 0 \cdot i$ є дійсним числом, число $z = 0 + iy = iy$ називають *уявним числом*.

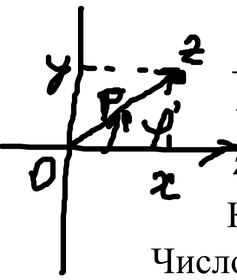
Приклад 12.1. Виконати дії $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, якщо $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$.

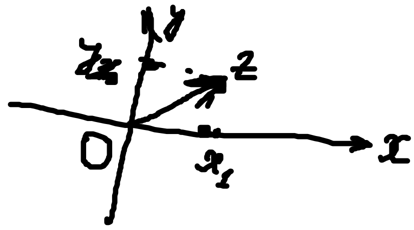
Розв'язання. $z_1 + z_2 = (2+3i)+(1-2i) = 3+i$,

$z = x_1 + i y_1$

$z_1 - z_2 = (2+3i)-(1-2i) = 1+5i$,

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(1-2i) = 2+3i-4i+6 = 8-i$,





$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i.$$

$$z_1^2 = (2+3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i.$$

Комплексні числа можна зображати точками на комплексній площині. Число $z = x+iy$ на декартовій площині зображається точкою $M(x,y)$ або її радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел та множиною точок декартової площини. Таку площину називають *комплексною площиною змінної* z або z-площиною, її вісь Ox – *дійсною віссю*, вісь Oy – *уявною* віссю. Дійсні числа зображуються точками осі Ox, уявні – точками осі Oy.

Полярні координати (ρ,φ) точки $M(x,y)$ на комплексній площині називають відповідно модулем і аргументом комплексного числа $z = x+iy$:

$$\rho = |z| = |OM| = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = Arg\,z.$$

Оскільки для полярних координат (ρ,φ) $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то комплексне число z можна записати у вигляді:

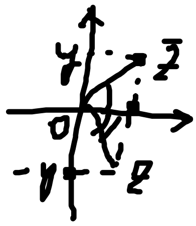
$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (12.2)$$

<u>Означення 12.4</u>. Вираз, що знаходиться у правій частині рівності (12.2), називають *тригонометричною формою* комплексного числа $z = x+iy$.

Модуль комплексного числа $|z| = \rho$ визначається однозначно, а аргумент $Arg\,z = \varphi$ – з точністю до $2k\pi$: $Arg\,z = \arg z + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Тут під $Arg\,z$ розуміють загальне значення аргументу. Воно має нескінченне число значень. На відміну від нього, головне значення аргументу $\arg z$ визначається однозначно при $z\neq 0$. Його значення $\arg z\in(-\pi;\pi]$. Воно відраховується від додатного напряму осі Ox проти годинникової стрілки для додатних значень, за годинниковою стрілкою – для від'ємних значень. Якщо $z=0$, то $|z|=0$, а $\arg z$ невизначений. Якщо z – дійсне додатне число, то $\arg z = 0$, для дійсного від'ємного числа z $\arg z = \pi$. Якщо ж z є уявним числом, тобто $z = iy$, $y\in\mathbb{R}$, то при $y>0$ $\arg z = \frac{\pi}{2}$, при $y<0$ $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

При $x\neq 0$ і $y\neq 0$ головне значення аргументу комплексного числа $z = x+iy$ можна знайти за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y > 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0. \end{cases} \qquad (12.3)$$



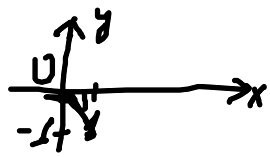
Модуль цього комплексного числа

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (12.4)$$

Для спряжених чисел z та $\overline{z}$ $|z| = |\overline{z}|$, $\arg z = -\arg \overline{z}$.

Приклад 12.2. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексних чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 2$, $z_4 = -2$, $z_5 = 2i$, $z_6 = -3i$. Записати ці числа у тригонометричній формі.

Розв'язання. Для комплексного числа $z_1 = 1 - i$ маємо $\operatorname{Re} z_1 = x_1 = 1$, $\operatorname{Im} z_1 = y_1 = -1$. Тоді за формулами (11.4) та (11.3) знаходимо, що



$$|z_1| = \rho = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\arg z_1 = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тригонометрична форма запису комплексного числа z_1 відповідно до формули (11.2) має вигляд: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

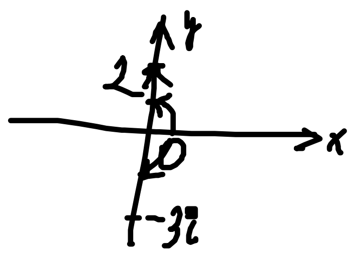
Для z_2 $\operatorname{Re} z_2 = x_2 = -1$, $\operatorname{Im} z_2 = y_2 = \sqrt{3}$, $|z_2| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

Аргумент z_2 $\arg z_2 = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_2}{x_2} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Тригонометрична форма запису: $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Оскільки z_3 є дійсним додатним числом, то воно зображується точкою на додатній частині осі Ox, тому його аргумент $\arg z_3 = 0$, його модуль $|z_3| = 2$. Його тригонометрична форма має вигляд: $z_3 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$.

Число z_4 є дійсним від'ємним числом, тому $\arg z_4 = \pi$, $|z_4| = 2$. Тригонометрична форма: $z_4 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Число z_5 є уявним числом з $\operatorname{Im} z_5 = y > 0$, тому $\arg z_5 = \frac{\pi}{2}$, його модуль $|2i| = 2$, тригонометрична форма: $z_5 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.



Комплексне число $z_6 = -3i$ є уявним, з від'ємною уявною частиною, його аргумент $\arg z_6 = -\dfrac{\pi}{2}$. Оскільки $|z_6| = |-3i| = 3$, то тригонометрична форма цього числа має вигляд: $z_6 = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Розглянемо дії над комплексними числами у тригонометричній формі. Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді добуток цих чисел має вигляд:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\varphi_2) + \\ &+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким чином, при множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а їх аргументи додаються. Це правило поширюється на довільне скінченне число множників. Зокрема, якщо всі n множників рівні між собою, то отримуємо формулу:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (12.5)$$

Формулу (12.5) називають *формулою Муавра*.

При діленні комплексних чисел маємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Розглянемо добування кореня з комплексного числа. Якщо для даного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ треба знайти число $w = \sqrt[n]{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то за означенням кореня та формулою Муавра маємо:

$$z = w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Звідси знаходимо, що $\rho = r^n$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Оскільки $r > 0$, $\rho > 0$, то $r = \sqrt[n]{\rho}$, де під коренем розуміють його арифметичне значення. Тому отримуємо:

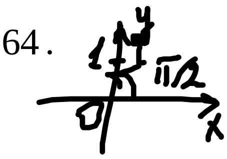
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \qquad (12.6)$$

Надаючи k значень 0, 1, 2, …, $n-1$, отримуємо n різних значень кореня. Для інших значень k аргументи відрізнятимуться від знайдених на число, кратне 2π, тому значення кореня з цими аргументами збігатимуться з уже знайденими значеннями.

Приклад 12.3. Знайти $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^6$.

Розв'язання. Запишемо число $z = 1 - i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі. Його модуль $|z| = \rho = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$, аргумент $\arg z = \varphi = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$. За формулою Муавра маємо:

$$w = z^6 = 2^6\left(\cos\left(-6\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-6\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) = 64\left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right) = 64.$$



Приклад 12.4. Знайти всі значення $\sqrt[3]{i}$.

Розв'язання. Тригонометрична форма комплексного числа $z = i$ має вигляд: $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, його модуль $\rho = 1$, аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$. За формулою (11.6) отримуємо: $w_k = \sqrt[3]{i} = \cos\dfrac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi/2 + 2k\pi}{3}, \quad k = 0,1,2$.

При $k = 0$ маємо $w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

При $k = 1$ $w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

При $k = 2$ $w_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

Для комплексного числа z, записаного у тригонометричній формі, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, введемо позначення: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Тоді це комплексне число можна записати у вигляді: $z = \rho e^{i\varphi}$. Таку форму запису називають *показниковою формою* комплексного числа. Далі буде встановлено зв'язок між виразом $e^{i\varphi}$ та показниковою функцією комплексного аргументу.

12.2 Поняття функції комплексної змінної

Нехай задано дві множини, D та E, елементами яких є комплексні числа. Числа $z = x + iy$ з множини D будемо позначати точками комплексної площини z (xOy), а числа $w = u + iv$ множини E – точками комплексної площини w (uOv).

<u>Означення 12.5</u>. Якщо кожному числу (точці) $z \in D$ поставлено у відповідність за певним правилом число (точка) $w \in E$, то кажуть, що на множині D задано *однозначну функцію комплексної змінної* $w = f(z)$, що відображає множину D у множину E.

Якщо кожному значенню $z \in D$ відповідає кілька значень w, то функцію $w = f(z)$ називають *многозначною*.

Множину D називають *областю визначення* функції $w = f(z)$, а множину $E_1 \subseteq E$ всіх значень $w = f(z)$ – *областю (множиною) значень* цієї функції.

Функцію $w = f(z)$ можна записати у вигляді:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функцію $u(x, y)$ називають *дійсною частиною функції* $f(z)$, а функцію $v(x, y)$ – *уявною частиною* цієї функції. При цьому використовують позначення: $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$. Таким чином, щоб задати функцію комплексної змінної, потрібно задати дві функції двох дійсних змінних.

Приклад 12.5. Знайти дійсну та уявну частини функції $w = z^3$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$. Тоді задана функція має вигляд: $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3$ або $w = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right)$. Звідси $u = \operatorname{Re} w = x^3 - 3xy^2$, $v = \operatorname{Im} w = 3x^2 y - y^3$.

12.3 Границя та неперервність функції комплексного аргументу

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена у деякому околі точки z_0, можливо, за винятком самої цієї точки. Під δ *– околом* точки z_0 комплексної площини розуміють внутрішню частину круга з радіусом δ та центром у точці z_0.

Означення 12.6. Число w_0 називають границею функції $w = f(z)$ у точці z_0, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Для позначення границі функції комплексної змінної у точці використовують запис: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Для функції комплексної змінної виконуються всі теореми про арифметичні властивості границь для функцій дійсної змінної (теореми про границі суми, добутку та частки функцій).

Означення 12.7. Нехай функція $w = f(z)$ визначена у точці $z = z_0$ і у деякому околі цієї точки. Функцію $w = f(z)$ називають *неперервною у точці* z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Як і у випадку неперервності функції дійсної змінної, означення неперервності функції комплексної змінної у точці можна сформулювати також наступним чином: функція $f(z)$ є неперервною у точці z_0, якщо нескінченно малому приросту змінної z відповідає нескінченно малий приріст функції $w = f(z)$, тобто $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$.

Функція $w = f(z)$ є неперервною у області D, якщо вона неперервна у кожній точці цієї області.

Модуль неперервної функції комплексної змінної $|w| = \sqrt{u^2 + v^2}$ має ті ж властивості, що й неперервна функція дійсної змінної.

12.4 Основні елементарні функції комплексної змінної

Визначимо основні елементарні функції комплексної змінної.

Показникова функція $w = e^z$ визначається рівністю

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \quad (12.7)$$

Прийнявши у цій рівності $y=0$, бачимо, що для дійсних значень $z=x$ показникова функція співпадає з показниковою функцією дійсної змінної e^x. Для визначеної за формулою (11.7) показникової функції виконується властивість, що має місце і для показникової функції дійсної змінної:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)\cdot e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\left(\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right) = e^{z_1+z_2}.$$

Аналогічно можна впевнитися у виконанні інших властивостей, що виконуються для показникової функції дійсної змінної, зокрема, $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$, $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$.

Враховуючи, що $\left|e^z\right| = e^x$, а $e^x \neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, можна стверджувати, що показникова функція e^z не дорівнює нулю при будь-якому значенні z. З формули (12.7) випливає, що $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to-\infty} e^z = 0$, $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to+\infty} e^z = \infty$.

Поклавши у рівності (11.7) $x=0$, $y=\varphi$, отримуємо формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad (12.8)$$

яка дає змогу перейти від тригонометричної до показникової форми комплексного числа: $z = \rho e^{i\varphi} = |z|e^{i\arg z}$ (п. 12.1).

У порівнянні з аналогічною функцією дійсної змінної, експонента комплексної змінної має специфічну властивість: вона є періодичною з уявним основним періодом $2\pi i$, $e^{z+2\pi i} = e^z\cdot e^{2\pi i} = e^z\cdot\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = e^z$. На відміну від експоненти дійсної змінної, функція e^z може бути від'ємною, зокрема $e^{i\pi} = -1$.

Логарифмічну функцію комплексної змінної $w = Lnz$ визначають як функцію, обернену до показникової. Число w називають логарифмом комплексного числа $z\neq 0$, якщо $e^w = z$. Оскільки значення показникової функції $e^w = z$ є завжди відмінними від нуля, то логарифмічна функція $w = Lnz$ визначена на всій комплексній площині z, за винятком точки $z=0$. Таким чином, на множині комплексних чисел визначаються логарифми дійсних від'ємних чисел.

Поклавши $z = \rho e^{i\varphi}$, $w = u + iv$, згідно означенню логарифмічної функції, отримаємо: $e^{u+iv} = e^u e^{iv} = \rho e^{i\varphi}$. Звідси маємо: $e^u = \rho$, $v = \varphi + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Отже, логарифм комплексного числа визначається за наступною формулою:

$$w = \mathrm{Ln}\, z = u = iv = \ln\rho + i\left(\varphi + 2k\pi\right) = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}. \quad (12.9)$$

З формули (12.9) випливає, що логарифмічна функція комплексної змінної є многозначною функцією, а саме вона набуває нескінченне число значень. Однозначну гілку цієї функції можна виділити, підставивши у формулу (12.9) певне значення k. Вибравши $k=0$, отримаємо однозначну функцію, яку називають головним значенням логарифма та позначають $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \qquad (12.10)$$

Якщо z – дійсне додатне число, то $\arg z = 0$ і $\ln z = \ln|z|$, тобто головне значення логарифма дійсного додатного числа співпадає з звичайним натуральним логарифмом цього числа. З формули (12.10) випливає, що функція $w = \mathrm{Ln}\, z$ має відомі властивості логарифма дійсної змінної.

Приклад 11.6. Обчислити: а) $\mathrm{Ln}\,(\text{-}1)$; б) $\mathrm{Ln}(1\text{+i})$.

Розв'язання. а) $z = -1$, $|z| = 1$, $\arg z = \pi$, тому за формулою (12.9) отримуємо: $\mathrm{Ln}(\text{-}1) = \ln 1 + i\pi + 2k\pi i = i\pi + 2k\pi i\,, k \in \mathbb{Z}$.

б) $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$, $\mathrm{Ln}(1\text{+i}) = \ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi i}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо *степеневу функцію комплексної змінної* $w = z^{\alpha}$. Нехай $|z| = \rho$, $\arg z = \varphi$. При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ця функція визначається рівністю:

$$w = z^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

У цьому випадку степенева функція є однозначною.

Якщо $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то у цьому випадку маємо:

$$w = z^{\alpha} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ ...,\ \mathrm{n} - 1.$$

Тут функція $w = z^{\alpha} = z^{\frac{1}{n}}$ є многозначною функцією, приймаючи для одного значення z n значень w. Однозначну гілку цієї функції можна отримати, надавши k певного значення, наприклад, $k = 0$.

Якщо $\alpha = \dfrac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, то степенева функція визначається рівністю:

$$w = z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{|z|^m}\left(\cos\frac{m(\arg z + 2k\pi)}{n} + i\sin\frac{m(\arg z + 2k\pi)}{n}\right).$$

У цьому випадку степенева функція також є многозначною.

Степенева функція $w = z^{\alpha}$ при довільному комплексному показнику степеня $\alpha = \beta + i\gamma$ визначається за допомогою показникової та логарифмічної функцій:

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}.$$

Ця функція, визначена при всіх $z \neq 0$, є многозначною. Наприклад, значення функції $w = z^i$ при $z = i$ дорівнює $i^i = e^{i\mathrm{Ln}\, i} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Зокрема, при $k = 0$ отримуємо $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Тригонометричні функції комплексної змінної визначаються рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \mathrm{tg\ z} = \frac{\mathrm{sinz}}{\mathrm{cosz}},\ \mathrm{ctg\ z} = \frac{\mathrm{cosz}}{\mathrm{sinz}}.$$

При дійсних значеннях змінної z таке означення тригонометричних функцій приводить до тригонометричних функцій дійсної змінної. Так, при $z = x$, $y = 0$ отримуємо:

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\cos x + i\sin x - \left(\cos x - i\sin x\right)\right) = \frac{1}{2i}\cdot 2i\sin x = \sin x .$$

Для тригонометричних функцій комплексної змінної виконуються всі формули, що мають місце для відповідних функцій дійсної змінної. Відзначимо також, що у комплексній площині $\sin z$ та $\cos z$ є необмеженими: їх модулі можуть набувати як завгодно великих значень. Наприклад, $\cos i = \dfrac{e^{-1} + e}{2} > 1$, $\cos 3i = \dfrac{e^{-3} + e^{3}}{2} > 10$.

Гіперболічні функції комплексної змінної визначаються рівностями:

$$\mathrm{sh}\, \mathrm{z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ \mathrm{ch}\, \mathrm{z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \mathrm{th}\, \mathrm{z} = \frac{\mathrm{sh}\, \mathrm{z}}{\mathrm{ch}\, \mathrm{z}},\ \mathrm{cth}\, \mathrm{z} = \frac{\mathrm{ch}\, \mathrm{z}}{\mathrm{sh}\, \mathrm{z}}.$$

Підставивши у ці вирази замість z величину iz, отримуємо формули, що виражають зв'язок між тригонометричними та гіперболічними функціями:

$$\mathrm{sh}\, (iz) = i\sin z,\ \mathrm{ch}\, (iz) = \cos z,\ \mathrm{th}\, (iz) = i\,\mathrm{tg}\, z,\ \mathrm{cth}\, (iz) = -i\,\mathrm{ctg}\, z .$$

Користуючись цими рівностями, можна отримати основні формули для гіперболічних функцій комплексної змінної, що є аналогічним відповідним формулам для гіперболічних функцій дійсної змінної.

З означення гіперболічних функцій комплексної змінної випливає, що функції $\mathrm{sh}\, \mathrm{z}$ та $\mathrm{ch}\, \mathrm{z}$ є періодичними з періодом $2\pi i$, функції $\mathrm{th}\, \mathrm{z}$ та $\mathrm{cth}\, \mathrm{z}$ мають період πi.

Розглянемо означення обернених тригонометричних та гіперболічних функцій.

Число w називають *арксинусом* числа z, якщо $\sin w = z$. Воно позначається $w = \mathrm{Arcsin}\, z$.

Використовуючи означення синуса, маємо $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, звідки отримуємо: $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Розв'язавши це квадратне рівняння відносно e^{iw}, знаходимо, що $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Тут враховуємо, що корінь $\sqrt{1 - z^2}$ має два значення, тому перед коренем не пишемо знак «$\pm$». Тоді $iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$ або $w = \dfrac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$. Таким чином, отримали формулу:

$$w = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Функція $w = \mathrm{Arcsin}\, z$ є многозначною. Для кожного значення змінної z вона набуває нескінченне число значень, оскільки нескінченне число значень приймає функція $\mathrm{Ln}\, z$.

Аналогічно визначаються інші обернені тригонометричні функції. Можна довести, що мають місце формули:

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\ \frac{i - z}{i + z},\ z \neq \pm i,$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\ \frac{z - i}{z + i},\ z \neq \pm i.$$

Функції, обернені гіперболічним функціям, називають ареасинусом, ареакосинусом, ареатангенсом та ареакотангенсом та позначають відповідно $w = \operatorname{Arsh} z$, $w = \operatorname{Arch} z$, $w = \operatorname{Arth} z$, $w = \operatorname{Arcth} z$. Їх обчислюють за формулами:

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right),\ \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\ \frac{1 + z}{1 - z},\ \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\ \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Всі ці функції є многозначними, вони для кожного значення z з області визначення набувають нескінченне число значень w.

Приклад 12.7. Обчислити $\operatorname{Arcsin} 2$.

Розв'язання. За отриманою вище формулою $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$. Тому $\operatorname{Arcsin} 2 = -i\operatorname{Ln}\left(2i + \sqrt{1 - 2^2}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i$.

Оскільки $2 + \sqrt{3} > 0$, $2 - \sqrt{3} > 0$, то $Arg\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, тому, за формулою для обчислення логарифма комплексного числа (11.9), отримуємо:

$$\operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i,$$

$$\operatorname{Arcsin} 2 = -i\operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

12.11 Степеневі ряди у комплексній області

<u>**Означення 12.19**</u>. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n \in \mathbb{C}$, називають *числовим рядом з комплексними членами (числовим рядом у комплексній області)*.

Якщо $u_n = a_n + b_n i$ то цей ряд можна записати у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, коли збігається кожний з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. При цьому, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1 + iS_2$. Отже, дослідження на збіжність числового ряду з комплексними членами зводиться до дослідження на збіжність двох числових рядів з дійсними членами. У теорії числових рядів з комплексними членами основні визначення та теореми співпадають з їх аналогами для рядів з дійсними членами. Зокрема, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають абсолютно збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

<u>Означення 12.20</u>. *Степеневим рядом у комплексній області* називають ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, де комплексні числа c_n – *коефіцієнти ряду*, $z = x + iy$ – комплексна змінна.

Розглядають також степеневі ряди у комплексній області за степенями $(z - z_0)$, що мають вигляд: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Заміною $z - z_0 = t$ дослідження таких рядів зводиться до дослідження рядів виду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

У залежності від значення z ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ може бути збіжним або розбіжним.

<u>Означення 12.21</u>. Множину всіх значень z, при яких ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ є збіжним, називають *областю збіжності* цього ряду.

Область збіжності степеневого ряду комплексної змінної визначається з допомогою теореми Абеля.

Теорема 12.5 (Теорема Абеля). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ є збіжним при $z = z_0 \neq 0$, то він є абсолютно збіжним при всіх значеннях z, що задовольняють умові $|z| < |z_0|$.

Доведення цієї теореми таке ж, як і доведення теореми Абеля для степеневого ряду дійсної змінної.

З теореми Абеля випливає, що коли ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ є розбіжним при $z = z_0$, то він розбіжний також для всіх z, таких, що $|z| > |z_0|$. Отже, існує таке дійсне число $R > 0$, що для всіх z, які задовольняють нерівність $|z| < R$, степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ є абсолютно збіжним, а для значень z, таких, що $|z| > R$, цей ряд розбігається. Нерівність $|z| < R$ задовольняють точки z, що знаходяться у відкритому крузі радіуса R з центром у початку координат. Величину R називають *радіусом збіжності*, а круг $|z| < R$ – *кругом збіжності* степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. У цьому крузі степеневий ряд є збіжним, поза ним – розбіжним, на межі круга збіжності – колі $|z| = R$ ряд може збігатися або розбігатися. Вважають, що $R = 0$, якщо степеневий ряд збігається лише у точці $z = 0$, $R = \infty$, якщо ряд збігається на всій комплексній площині.

Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ кругом збіжності є круг $|z - z_0| < R$ з центром у точці $z = z_0$.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулами $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ або $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$. Ці формули можна отримати, застосувавши ознаку Д'Аламбера або інтегральну ознаку Коші збіжності рядів з додатними членами до ряду, складеному з модулів членів вихідного ряду.

Можна довести, що сума степеневого ряду всередині його круга збіжності є аналітичною функцією. Крім того, всередині круга збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати або інтегрувати будь-яку кількість разів. При цьому отримуємо ряд з тим же кругом збіжності, що й вихідний ряд.

Приклад 12.15. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Розв'язання. Тут $c_n = \dfrac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} = \infty$.

Тому областю збіжності даного степеневого ряду є вся комплексна площина.

Приклад 12.16. Знайти радіус та круг збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{(n+1)\cdot 2^n}$.

Розв'язання. Маємо степеневий ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$. Тут $z_0 = i$, $c_n = \dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)\cdot 2^{n+1}}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)}\right| = 2$ – радіус збіжності даного степеневого ряду. Його круг збіжності має вигляд: $|z - i| < 2$.

12.12 Ряд Тейлора у комплексній області

Теорема 11.6. Будь-яка аналітична у крузі $\left|z-z_0\right|<R$ функція $f(z)$ може бути у цьому крузі єдиним способом подана у вигляді степеневого ряду

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n, \qquad (12.22)$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами:

$$c_n=\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\xi)}{\left(\xi-z_0\right)^{n+1}}d\xi,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .... \qquad (12.23)$$

Під похідною нульового порядку у формулах (12.23) розуміють саму функцію $f(z)$.

<u>Означення 12.22</u>. Степеневий ряд (12.22) називають *рядом Тейлора* для функції $f(z)$ у крузі $\left|z-z_0\right|<R$. Ряд Тейлора по степеням z (при $z_0=0$) називають *рядом Маклорена* для функції $f(z)$.

Розвинення у ряд Маклорена основних елементарних функцій комплексної змінної мають такий же вигляд, як і розвинення у ряд Маклорена аналогічних функцій дійсної змінної. Зокрема, розвинення показникової функції e^z у ряд за степенями z має вигляд: $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Замінивши тут z на iz, маємо:

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\cos z+i\sin z.$$

Отже, отримано відому формулу Ейлера: $e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

12.13. Нулі аналітичної функції

Будь-яка аналітична у околі точки z_0 функція $f(z)$ може бути розвиненою у цьому околі у ряд Тейлора (12.22), коефіцієнти якого обчислюються за формулами (12.23).

<u>Означення 12.23</u>. Точку z_0 називають *нулем функції* $f(z)$, якщо $f\left(z_0\right)=0$.

У цьому випадку розвинення функції $f(z)$ у степеневий ряд у околі точки z_0 не містить нульового члена, тобто $c_0=f\left(z_0\right)=0$. Якщо не лише $c_0=0$, але й $c_1=c_2=...=c_{m-1}=0$, а $c_m\neq 0$, то розвинення функції $f(z)$ у ряд (12.22) у околі точки z_0 має вигляд:

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n, \qquad (12.24)$$

а точку z_0 називають *нулем кратності* m або *нулем* m*-го порядку*. Якщо $m=1$, то z_0 називають *простим нулем*.

З формул (12.23) для коефіцієнтів ряду Тейлора випливає, що для випадку, коли z_0 є нулем кратності m функції $f(z)$, то значення функції $f(z)$ та її похідних $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=...=f^{(m-1)}(z_0)=0$, а похідна $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. У цьому випадку розвинення функції $f(z)$ у степеневий ряд (12.22) у околі z_0 можна записати у вигляді $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, де $\varphi(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n-m}$. Для функції $\varphi(z)$ точка z_0 вже не є нулем, оскільки $\varphi(z_0)=c_m\neq 0$. Виконується і обернене твердження: якщо функцію $f(z)$ можна записати у вигляді $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, де $m\in\mathbb{N}$, а $\varphi(z)$ є аналітичною у точці z_0 функцією, причому $\varphi(z_0)\neq 0$, то точка z_0 є нулем кратності m функції $f(z)$.

12.14 Ряд Лорана

Теорема 12.7. Будь-яку аналітичну у кільці $r<|z-z_0|<R$ $(0\leq r<R\leq\infty)$ функцію $f(z)$ можна розвинути у цьому кільці у ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{12.25}$$

де коефіцієнти ряду c_n визначаються за формулами:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{12.26}$$

Тут L – довільне коло з центром у точці z_0, що розташоване всередині даного кільця.

<u>Означення 12.24</u>. Ряд (12.25), коефіцієнти якого обчислюють за формулами (11.26), називають *рядом Лорана* для функції $f(z)$ у кільці $r<|z-z_0|<R$.

Можна довести, що існує єдине розвинення у ряд Лорана функції $f(z)$, аналітичної у заданому кільці $r<|z-z_0|<R$.

Ряд Лорана для функції $f(z)$ складається з двох частин:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Першу з них, тобто $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, називають *правильною частиною* ряду Лорана. Вона збігається до аналітичної функції $f_1(z)$ всередині круга $|z-z_0|<R$. Другу частину ряду Лорана, тобто ряд за від'ємними степенями $(z-z_0)$ $f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ називають *головною частиною ряду Лорана*. Вона

збігається до аналітичної функції $f_2(z)$ зовні круга з радіусом r, тобто при значеннях z, для яких $|z-z_0|>r$. Всередині кільця $r<|z-z_0|<R$ ряд Лорана збігається до аналітичної функції $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$. Зокрема, якщо функція $f(z)$ не має особливих точок всередині круга $|z-z_0|<R$, то її ряд Лорана співпадає з її рядом Тейлора, тобто має лише правильну частину.

На практиці при розвиненні функцій у ряд Лорана використовують відомі розвинення у ряд Маклорена основних елементарних функцій. Дріб $\frac{1}{z-z_0}$ записують у вигляді ряду, що є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, дроби виду $\frac{1}{(z-z_0)^k}$, де $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, можна розвинути у ряд Лорана, який отримуємо з ряду, що є сумою геометричної прогресії, шляхом по членного диференціювання $k-1$ разів. Для складних дробів застосовують також розклад на суму елементарних дробів.

Приклад 12.17. Розвинути у ряд Лорана функцію $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ у околі точки $z_0=0$.

Розв'язання. Скористаємося розвиненням функції e^z у ряд Маклорена: $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Цей ряд є збіжним на всій комплексній площині. Підставивши сюди замість z вираз $\frac{1}{z}$, отримуємо шукане розвинення: $e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot z^n}$, $z\neq 0$.

Приклад 12.18. Розвинути у ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{z^2-z-6}$ у наступних областях: а) $|z|<2$; б) $2<|z|<3$; в) $|z|>3$.

Розв'язання. Функція має особливі точки $z_1=-2$ та $z_2=3$, у яких її знаменник дорівнює нулю. Застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, знаходимо вираз для $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right).$$

Для випадку а) у крузі $|z|<2$ маємо: $\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$. Оскільки $|z|<2$, то $|z|<3$ і $\frac{|z|}{3}<1$. Застосувавши до отриманого дробу формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії, отримуємо:

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Аналогічні перетворення виконаємо для дробу $\frac{1}{z+2}$:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Отже, отримуємо наступне розвинення функції $f(z)$ у крузі $|z|<2$ у ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)=-\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}\right)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

У випадку б) запишемо ряди для елементарних дробів $\frac{1}{z-3}$ та $\frac{1}{z+2}$ у кільці $2<|z|<3$. Оскільки $|z|<3$, то

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

З нерівності $|z|>2$ випливає, що $\frac{2}{|z|}<1$, тому

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}.$$

Отже, розвинення у ряд Лорана у кільці $2<|z|<3$ функції $f(z)$ має вигляд:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)=-\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}\right).$$

Для випадку в) ряди для елементарних дробів у виразі для $f(z)$ запишемо з врахуванням нерівності $|z|>3$, тобто у цій області $\frac{3}{|z|}<1$ і $\frac{2}{|z|}<1$. Маємо:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n},$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}.$$

Підставивши ці рівності у вираз для $f(z)$ отримуємо:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}\right)=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}.$$

12.15 Класифікація особливих точок

Розглянемо класифікацію особливих точок функції комплексної змінної, тобто точок, у яких ця функція не є аналітичною.

Означення 12.25. Особливу точку $z=z_0$ функції $f(z)$ називають *ізольованою*, якщо у деякому її околі функція $f(z)$ не має інших особливих точок.

Наприклад, точка $z_0=1$ є ізольованою особливою точкою для функції $f(z)=\frac{1}{z-1}$. Точка $z_0=0$ не є істотно особливою точкою для функції $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, оскільки у довільному як завгодно малому околі цієї точки знаходиться нескінченна кількість особливих точок цієї функції $z_k=\frac{1}{k\pi}, k\in\mathbb{Z}$. Точка $z_0=0$ у цьому випадку є точкою скупчення особливих точок.

Якщо z_0 є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, то існує таке число $R>0$, що у кільці $0<|z-z_0|<R$ ця функція є аналітичною , отже, її можна розвинути у цьому кільці у ряд Лорана (12.25):

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

При цьому можливі наступні випадки.

1. У ряді Лорана відсутня головна частина, тобто всі його члени містять $(z-z_0)$ у невід’ємних степенях. У цьому випадку точку z_0 називають *усувною особливою точкою* функції $f(z)$.
2. Розвинення $f(z)$ у ряд Лорана містить у своїй головній частині скінченну кількість доданків, тобто у ряді є лише скінченне число членів, що містять $(z-z_0)$ у від’ємних степенях. У цьому випадку точку z_0 називають *полюсом* функції $f(z)$.
3. Ряд Лорана містить у своїй головній частині нескінченну кількість членів, тобто у ряді є нескінченна кількість членів з від’ємними показниками степенів $(z-z_0)$. У цьому випадку точку z_0 називають *істотно особливою* точкою функції $f(z)$.

Розглянемо особливості поведінки аналітичної функції $f(z)$ у околі особливої точки кожного типу.

Якщо z_0 є усувною особливою точкою, то у її околі розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана (11.25) має вигляд: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Це розвинення має місце у всіх точках круга $|z-z_0|<R$ за винятком точки $z=z_0$. Якщо прийняти $f(z_0)=c_0$, де $c_0=\lim_{z\to z_0}f(z)$, тобто довизначити функцію $f(z)$ у точці $z=z_0$, то ця функція стане аналітичною у всьому крузі $|z-z_0|<R$, включно з його центром z_0. При цьому особливість цієї точки усувається, z_0 стане правильною точкою функції $f(z)$. З рівності $\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0\neq\infty$ випливає, що у достатньо малому околі точки z_0 функція $f(z)$ є обмеженою.

Вірним є і обернене твердження: ізольована особлива точка z_0 є усувною, якщо існує скінченна границя $\lim_{z\to z_0}f(z)=A$.

Якщо особлива точка $z=z_0$ є полюсом, то у околі цієї точки розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана має вигляд: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, де $c_{-m}\neq 0$. У цьому випадку полюс $z=z_0$ називають *полюсом* m*-го порядку* функції $f(z)$. При $m=1$ точку z_0 називають *простим полюсом*.

Функцію $f(z)$ у околі її полюсу m-го порядку $z=z_0$ можна записати у вигляді:

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{12.30}$$

де $g(z)$ – аналітична функція, причому $g(z_0)=c_{-m}\neq 0$. Звідси випливає, що у цьому випадку $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$, тобто у достатньо малому околі полюса функція $f(z)$ є необмеженою.

Вірним є також обернене твердження: ізольована особлива точка $z=z_0$ є полюсом, якщо $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

Нулі та полюси функції пов’язані між собою. Якщо точка z_0 є нулем m-го порядку функції $f(z)$, то ця точка є полюсом m-го порядку функції $\frac{1}{f(z)}$, а якщо z_0 є полюсом m-го порядку функції $f(z)$, то вона є нулем m-го порядку функції $\frac{1}{f(z)}$.

Якщо точка z_0 є істотно особливою, то у її достатньо малому околі функція $f(z)$ стає невизначеною. У цій точці $f(z)$ не має ні скінченої, ні нескінченної границі. Вибираючи різні послідовності точок $\{z_n\}$, такі, що

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, можна отримати різні послідовності $\{f(z_n)\}$, такі, що збігаються до різних границь.

Приклад 12.19. Визначити тип особливої точки $z_0 = 0$ для функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язання. Запишемо розвинення функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ у ряд Лорана у околі точки $z_0 = 0$. Маємо: $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. Оскільки у цьому розвиненні міститься нескінченна кількість членів з від'ємними степенями z, то $z_0 = 0$ є істотно особливою точкою. Відзначимо, що границя функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ при $z \to 0$ залежить від шляху, яким z прямує до нуля. Якщо $z \to 0$ вздовж додатної частини дійсної осі, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = +\infty$, якщо ж $z \to 0$ вздовж від'ємної частини дійсної осі, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = 0$.

Класифікацію ізольованих особливих точок можна розповсюдити на випадок, коли особливою точкою функції $f(z)$ є нескінченно віддалена точка $z = \infty$. Околом нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ називають зовнішність довільного круга з центром у точці $z = 0$ та достатньо великим радіусом R, тобто множину точок комплексної площини, що визначається нерівністю $|z| > R$. Чим більшиим є радіус R, тим меншим є окіл нескінченно віддаленої точки.

Точку $z = \infty$ називають нескінченно віддаленою ізольованою особливою точкою, якщо у деякому її околі відсутні інші особливі точки функції $f(z)$. Ця точка може виявитися усувною особливою точкою, полюсом m-го порядку або істотно особливою точкою. У першому випадку розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана у околі точки $z = \infty$ не має членів з додатними показниками степенів z, у другому – має лише скінченну кількість таких членів, у третьому випадку ряд Лорана містить нескінченну кількість членів з додатними степенями z.

Дослідження функції $f(z)$ у околі нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ шляхом підстановки $z = \frac{1}{w}$ зводиться до дослідження функції $f\left(\frac{1}{w}\right)$ у околі точки $w = 0$.

Приклад 12.20. Знайти особливі точки функції $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$.

Розв'язання. Особливою точкою даної функції є точка $z_0 = 0$. Знайдемо границю $f(z)$ при $z \to 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z^3} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z^2} = \infty$. Отже, точка $z_0 = 0$ є полюсом.

Знаходимо наступні границі:

$$\lim_{z\to 0}\left(z\cdot\frac{\sin z}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^2} = \infty,\ \lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\sin z}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0.$$

Таким чином, точка $z_0 = 0$ є полюсом другого порядку.

Приклад 12.21. Визначити характер особливих точок функції $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$.

Розв'язання. Особливими точками даної функції є $z_1 = 0$, $z_2 = -2$ та $z_3 = 1$. Оскільки, $\lim\limits_{z\to 0}\left(z\cdot f(z)\right) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z+3}{(z+2)(z-1)^2} = \dfrac{3}{2} = \mathrm{const} \neq 0$, то точка $z_1 = 0$ є простим полюсом функції $f(z)$. Аналогічно знаходимо, що простим полюсом є точка $z_2 = -2$. Точка $z_3 = 1$ є полюсом другого порядку, оскільки $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \infty$, а $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \dfrac{4}{3} \neq 0$.

Приклад 12.22. З'ясувати тип нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ для функції $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $z = \dfrac{1}{w}$. Тоді задана функція $f(z)$ набуває вигляду:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w} - 3} = \frac{w}{1-3w}.$$

Дослідимо характер цієї функції у околі точки $w = 0$. За умови $|w| < \dfrac{1}{3}$ має місце розвинення у ряд Лорана:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{1-3w} = w\left(1 + 3w + (3w)^2 + \ldots + (3w)^n + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} w^n.$$

Повертаючись до змінної z, маємо:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}.$$

Всі члени цього розвинення містять z у від'ємних степенях. Отже, точка $z = \infty$ є усувною особливою точкою.

12.16 Поняття лишка. Теорема Коші про лишки

Нехай z_0 – це ізольована особлива (скінченна) точка аналітичної функції $f(z)$. Тоді у деякому околі цієї точки можна записати розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ 0<|z-z_0|<R.$$

Означення 12.26. Коефіцієнт a_{-1}, що знаходиться у ряді Лорана для $f(z)$ при $(z-z_0)^{-1}$, називають *лишком* функції $f(z)$ відносно точки z_0 та позначають $\operatorname{res} f(z_0)$.

З означення лишка випливає формула для його обчислення:

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz, \qquad (12.31)$$

де L – деяке додатно орієнтоване коло (обхід кола проти годинникової стрілки) з центром у точці z_0 радіуса ρ, $\rho<R$.

Якщо $z_0=\infty$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, то лишок $f(z)$ у цій точці визначається за формулою: $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$, де контур L є колом з центром у точці z_0 досить великого радіуса, обхід якого здійснюється за годинниковою стрілкою. Цей лишок можна визначити також як коефіцієнт ряду Лорана для $f(z)$ у околі нескінченно віддаленої точки, взятий з протилежним знаком: $\operatorname{res} f(\infty)=-c_{-1}$.

Лишки можуть бути застосовані для обчислення інтегралів від функцій комплексної змінної. Для цього використовується наступна теорема Коші про лишки.

Теорема 12.8. (Теорема Коші про лишки). Якщо однозначна функція $f(z)$ є аналітичною на замкнутому контурі L і всередині цього контуру, за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1,z_2,...,z_n$, розташованих всередині L, то інтеграл від $f(z)$ по контуру L дорівнює сумі лишків функції $f(z)$ відносно її особливих точок $z_1,z_2,...,z_n$, помноженій на $2\pi i$:

$$\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k). \qquad (12.32)$$

Доведення. Нехай $z_1,z_2,...,z_n$ – особливі точки функції $f(z)$, що знаходяться всередині контуру L і $\operatorname{res} f(z_k)$, $k=1, 2, ..., n$, – лишки $f(z)$ відносно цих точок. Позначимо через L_1, L_2, …, L_n кола, описані навколо точок $z_1,z_2,...,z_n$, що лежать всередині контуру L і не перетинаються. З теореми 12.2 випливає, що $\oint_L f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)dz$, тому отримуємо:

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_k} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k).$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що коли функція $f(z)$ є аналітичною у розширеній комплексній площині, за винятком скінченого числа особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$, то виконується рівність $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$.

Способи знаходження лишків залежать від типу особливих точок, відносно яких вони обчислюються.

При обчисленні лишка функції $f(z)$ відносно усувної особливої точки $z = z_0$ знаходимо, що коефіцієнт c_{-1} ряду Лорана цієї функції за степенями $(z - z_0)$ дорівнює нулю, тому у цьому випадку $\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1} = 0$.

Розглянемо обчислення лишків відносно полюсів. Нехай точка z_0 є простим полюсом функції $f(z)$. Тоді ряд Лорана для цієї функції у околі точки z_0 має вигляд: $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Звідси отримуємо:

$$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Переходячи у цій рівності до границі при $z \to z_0$, маємо:

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \qquad (12.33)$$

Формулі (12.33) для обчислення лишку $f(z)$ відносно простого полюса z_0 можна надати іншого вигляду, якщо функція $f(z)$ є часткою двох функцій, аналітичних у околі точки z_0. Нехай $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z_0) = 0$, причому $\psi'(z_0) \neq 0$. Тоді, застосовуючи формулу (11.33), отримуємо:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Отже, отримали формулу:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \operatorname{res} \left.\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right|_{z = z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (12.34)$$

Нехай точка z_0 є полюсом m-го порядку функції $f(z)$.Тоді розвинення цієї функції у ряд Лорана у околі точки z_0 має вигляд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}.$$

Звідси отримуємо:

$$\left(z-z_0\right)^m f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^{n+m}+c_{-m}+c_{-m+1}\left(z-z_0\right)+...+c_{-1}\left(z-z_0\right)^{m-1}.$$

Диференціюючи цю рівність $\left(m-1\right)$ разів, знаходимо:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\left(z-z_0\right)^m f\left(z\right)\right)=\left(m-1\right)!\cdot c_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(n+m\right)\left(n+m-1\right)\left(n+m-2\right)...\left(n+2\right)\times$$
$$\times\left(z-z_0\right)^{n+1}.$$

Перейшовши тут до границі при $z\to z_0$, отримуємо наступну формулу:

$$\operatorname{res} f\left(z_0\right)=\frac{1}{\left(m-1\right)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\left(z-z_0\right)^m f\left(z\right)\right). \qquad (11.35)$$

При обчисленні лишку відносно істотно особливої точки z_0 функції $f\left(z\right)$ потрібно безпосередньо розвинути $f\left(z\right)$ у ряд Лорана у околі цієї точки і знайти коефіцієнт c_{-1} при $\left(z-z_0\right)^{-1}$.

Приклад 12.23. Знайти лишки функції $f\left(z\right)=\dfrac{z+2}{z^3-z^4}$ у її особливих точках.

Розв'язання. Знайдемо особливі точки функції $f\left(z\right)$ з рівняння $z^3-z^4=0$. Маємо: $z^3\left(1-z\right)=0\Rightarrow z_{1,2,3}=0,\, z_4=1$, $\left.\left(z+2\right)\right|_{z=0}=2\neq0$, $\left.\left(z+2\right)\right|_{z=1}=3\neq0$, $\lim\limits_{z\to0}f\left(z\right)=\infty$, $\lim\limits_{z\to1}f\left(z\right)=\infty$. Отже, точка $z=1$ є простим полюсом, $z=0$ – полюс третього порядку. Лишок функції $f\left(z\right)$ відносно точки $z=1$ знайдемо за формулою (12.34):

$$\operatorname{res} f\left(1\right)=\left\|\begin{matrix}\varphi\left(z\right)=z+2,\psi\left(z\right)=z^3-z^4,\\ \psi'\left(z\right)=3z^2-4z^3.\end{matrix}\right\|=\operatorname{res}\left.\frac{\varphi\left(z\right)}{\psi\left(z\right)}\right|_{z=1}=\frac{\varphi\left(1\right)}{\psi'\left(1\right)}=\frac{1+2}{3-4}=3.$$

Для знаходження лишку $f\left(z\right)$ відносно $z=0$ використаємо формулу (12.35) при $m=3$:

$$\operatorname{res} f\left(0\right)=\frac{1}{\left(3-1\right)!}\cdot\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\,\frac{z+2}{z^3\left(1-z\right)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(\frac{z+2}{1-z}\right)''=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(\frac{3}{\left(1-z\right)^2}\right)=\lim_{z\to0}\frac{3}{\left(1-z\right)^3}=3.$$

Приклад 12.24. Знайти лишок функції $f\left(z\right)=e^{\frac{1}{z}}$ у її особливій точці $z=0$.

Розв'язання. Розвинення функції $f\left(z\right)$ у ряд Лорана має вигляд: $e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^n}$ (приклад 12.19). Звідси знаходимо коефіцієнт при z^{-1}, що є лишком відносно особливої точки $z=0$: $c_{-1}=1=\operatorname{res} f\left(0\right)$.