Змістовий модуль 2. Застосування лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Мета вивчення змістового модуля 2. Сформувати у студента навички застосувати апарата лінійної алгебри та аналітичної геометрії при вирішенні науково-практичних економічних проблем

План

1. Простір товарів. Вектор цін.
2. Статична модель міжгалузевого балансу.
3. Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)
4. методів аналітичної геометрії
5. Поняття бюджетної множини

Ключові терміни та поняття: товар, простір товарів, індекс споживчих цін, модель Леонтьєва, міжгалузевий баланс, технологічна матриця, коефіцієнти прямих витрат, продуктивна матриця, лінійна модель міжнародної торгівлі, рівноважна ціна, точка беззбитковості, бюджетна множина.

2.1. Простір товарів. Вектор цін

При побудові економіко-математичних моделей часто використовують поняття простору товарів та вектору цін. Під *товаром* розуміють деяку продукцію, що надходить на ринок для продажу у певний час у певному місці.

Нехай маємо *n* різних товарів, обсяг *i*-го товару відповідно дорівнює x_i, i=1, 2, …, *n*. Деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектору $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n),\ x_i\geq 0,\ i=1,2,...,n.$ Множину всіх наборів товарів будемо називати *простором товарів С*. Кожний товар має певну додатну ціну. Позначимо ціну і-го товару p_i, i=1, 2,…, *n*. Вектор $p=\left(p_1,p_{2,...,}\,p_n\right)$ називають *вектором цін*. Для набору товарів $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $p=\left(p_1,p_{2,...,}\,p_n\right)$. Скалярний добуток

$$\overline{p}\cdot\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=C\left(\overline{x}\right)$$

визначає ціну набору товарів $\overline{x}$.

Індекс споживчих цін характеризує зміну у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання.

Нехай $\overline{q}=(q_1,q_2,...,q_m)$ – вектор обсягу споживчих товарів чи послуг, $\overline{p}_1=(p_{11},p_{12},...,p_{1m})$ – вектор цін у поточному місяці, $\overline{p}_0=(p_{01},p_{02},...,p_{0m})$ – вектор цін у попередньому місяці. *Індексом споживчих цін* у відсотках називають величину

$$i_p = \frac{\overline{p}_1 \cdot \overline{q}}{\overline{p}_0 \cdot \overline{q}} \cdot 100\% .$$

З цієї рівності випливає, що $100\overline{p}_1 \cdot \overline{q} = i_p \overline{p}_0 \cdot \overline{q}$ або $\left(100\overline{p}_1 - i_p \overline{p}_0\right) \cdot \overline{q} = 0$. Отримана рівність свідчить, що індекс споживчих цін i_p можна визначати як числовий коефіцієнт, при якому вектор $\overline{q}$ ортогональний до вектору $100\overline{p}_1 - i_p \overline{p}_0$. Індекс інфляції обчислюють за формулою:

$$i = i_p - 100 = 100 \frac{\left(\overline{p}_1 - \overline{p}_0\right) \cdot \overline{q}}{\overline{p}_0 \cdot \overline{q}} .$$

Приклад 2.1. Витрати фірми на ресурси, які використовують для виготовлення одиниці продукції, задані у таблиці 2.1. Знайдіть ціну всіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції з використанням методу векторної алгебри. Введемо вектор витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції та вектор цін за одиницю відповідних ресурсів

Таблиця 2.1. Витрати фірми на ресурси, необхідні для виготовлення одиниці продукції

Ресурси	Кількість	Ціна за одиницю, г.о.
Сировина А	200 кг	3
Сировина В	500 м^2	5
Витрати праці	0,65 людино-год	10
Вартість експлуатації обладнання	0,7 машино-год	15

Розв'язання. Введемо вектор витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції $\overline{x} = (200; 500; 0,65; 0,7)$ та вектор цін за одиницю відповідних ресурсів $\overline{p} = (3; 5; 10; 15)$.Вартість всіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, дорівнює $\overline{x} \cdot \overline{p}$. Маємо:

$c = \overline{x} \cdot \overline{p} = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0,65 \cdot 10 + 0,7 \cdot 15 = 3117$ г.о.

Приклад 2.2. Комерційний банк, що фінансує будівництво багатоквартирних будинків, отримав на один рік кредити від трьох банків. Вони надали кредити у розмірах 200 тис. г.о., 300 тис. г.о. та 400 тис. г.о. під річні процентні ставки відповідно 40%, 25% та 30%. Визначить суму, яку потрібно виплатити за кредитом через рік.

Розв'язання. Вектор кредитів $\overline{x} = (200, 300, 400)$, вектор процентних ставок $\overline{p} = (1,4; 1,25; 1,3)$. Сума виплати за кредитом складає:

$c = \overline{x} \cdot \overline{p} = 200 \cdot 1,4 + 300 \cdot 1,25 + 400 \cdot 1,3 = 1175$ г.о.

Приклад 2.3. Визначте індекс цін та індекс інфляції, розрахувавши вартість споживчого кошика, що складається з трьох видів товарів та послуг, для поточного та попереднього місяців. Необхідні дані наведено у таблиці 3.2.

Розв'язання. Вектор обсягу споживчих товарів $\overline{q}=(3;10;2)$, вектор цін у поточному місяці $\overline{p}_1=(4000,2000,4000)$, вектор цін у попередньому місяці дорівнює $\overline{p}_0=(3500,1800,4500)$.

Розрахуємо індекс цін:

$$i_p=\frac{\overline{p}_1\cdot\overline{q}}{\overline{p}_0\cdot\overline{q}}\cdot100\%=\frac{4000\cdot3+2000\cdot10+4000\cdot2}{3500\cdot3+1800\cdot10+4500\cdot2}\cdot100\%=106,7\%.$$

Індекс інфляції $i=i_p-100\%=106,7\%-100\%=6,7\%$.

Таблиця 2.2. Вартість товарів та послуг споживчого кошика у поточному та попередньому місяцях

Товар (послуга)	Обсяг товару	Ціна одиниці товару у поточному місяці, г.о.	Ціна одиниці товару у попередньому місяці, г.о.
A	3	4000	3500
B	10	2000	1800
C	2	4000	4500

2.2. Статична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва)

Розглянемо статичну лінійну модель багатогалузевої економіки. У основу цієї моделі покладено наступні припущення.

1. У економічній системі, що є об'єктом моделювання, виробляються та споживаються n товарів.
2. Кожна галузь виробляє лише один товар, різні галузі виробляють різні товари.
3. Під виробничим процесом у кожній галузі розуміють перетворення деяких товарів у один товар, при цьому витрати сировини на виробництво одиниці товару залишаються незмінними.

Нехай x_i – обсяг виробництва i-го товару за плановий період (рік), a_{ij} – кількість одиниць i-го товару, яку потрібно витратити на виробництво одиниці j-го товару, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$. Величина x_i складається з двох частин: обсяг виробництва, що витрачається на виробничі потреби та обсяг виробництва, що витрачається на кінцеве (невиробниче) споживання. Виходячи з припущень моделі 1 – 3, виробниче споживання i-го товару всіма галузями дорівнює $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, тому чисте виробництво i-го товару, призначене для кінцевого споживання, становить $x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, $i=1,...,n$.

Якщо прирівняти чисте виробництво кожного i-го товару та кінцевий попит y_i на цей товар, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=y_i,\ i=1,...,n. \tag{2.1}$$

Систему (2.1) називають *моделлю Леонтьєва* або *статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу*. Величини y_i у системі (2.1) є заданими.

Отже, модель Леонтьєва є системою з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. *Сутність моделі Леонтьєва полягає у визначенні обсягів валового виробництва галузей за відомим кінцевим попитом на їх продукцію на основі даних про технологічні можливості галузей, відображених у коефіцієнтах витрат* a_{ij} *системи (2.1).*

Використовуючи модель Леонтьєва, можна розв'язувати також і обернену задачу: за заданими обсягами валового виробництва кожного товару визначити обсяги його кінцевого споживання.

Величини x_i та y_i можна задавати у вартісних або натуральних одиницях виміру. У відповідності з цим розрізняють натуральний та вартісний міжгалузевий баланси. Далі будемо розглядати вартісний баланс.

Введемо наступні позначення: x_{ij} – кількість продукції i-ї галузі, що використовується для виробничих потреб у j-й галузі, z_j – умовно чиста продукція j-ї галузі, що включає кінцеве споживання, оплату праці та амортизацію. Принципова схема міжгалузевого балансу наведена у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3. Принципова схема міжгалузевого балансу у вартісному виразі

Галузі – виробники	Галузі – споживачі				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно чиста продукція	z_1	z_2	…	z_n	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$	
Валовий продукт	x_1	x_2	…	x_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Розглянувши схему балансу по стовбцям, робимо висновок, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі – споживача та її умовно чистої продукції дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{2.2}$$

Аналізуючи схему міжгалузевого балансу по рядкам, ми бачимо, що валова продукція кожної галузі – виробника дорівнює сумі матеріальних витрат її галузей – споживачів та кінцевої продукції даної галузі, призначеної для кінцевого (невиробничого) споживання:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \, , \; i = 1,...,n \, . \tag{2.3}$$

Формули (2.3) описують систему з n рівнянь, які називають рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямами використання.

Балансовий характер таблиці 2.3 міжгалузевого балансу виражається у тому, що виконуються рівності

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j \, , \; \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \, .$$

Основу математичної моделі міжгалузевого балансу складає *матриця* A *коефіцієнтів прямих витрат* a_{ij}, $i = 1,...,n$, $j = 1,2,...,n$. Її називають також *технологічною матрицею*. Коефіцієнт прямих витрат a_{ij} показує, яка кількість продукції i-ї галузі потрібна (якщо враховувати лише прямі витрати) для виробництва одиниці продукції j-ї галузі, тому виконується рівність:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \; i = 1,...,n, \; j = 1,2,...,n. \tag{2.4}$$

Визначивши коефіцієнти технологічної матриці A, ми тим самим визначаємо коефіцієнти моделі Леонтьєва (2.1). У матричній формі цю модель можна записати у вигляді:

$$X = AX + Y \, , \tag{2.5}$$

де $X^T = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $Y^T = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$.

Систему (2.5) можна записати у вигляді:

$$\left(E - A\right) X = Y \, , \tag{2.6}$$

де E – одинична матриця.

З (2.6) можна визначити валову продукцією X всіх галузей:

$$X = \left(E - A\right)^{-1} Y \, . \tag{2.7}$$

Тут $\left(E - A\right)^{-1}$ – матриця, обернена до $(E - A)$. Нехай $B = (E - A)^{-1}$. Тоді (2.7) набуває вигляду $X = BY$, де матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають *матрицею повних_витрат*, а її компоненти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних витрат*. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі, призначеної для кінцевого споживання.

Планові розрахунки за формулами (2.7) мають сенс у тому випадку, якщо ці розрахунки дозволять отримати розв'язання $x_i \geq 0$, $i = 1,...,n$.

Невід'ємну матрицю A називають *продуктивною*, якщо існує такий невід'ємний вектор X, що

$$X > AX \, . \tag{2.8}$$

Умова (2.8) означає, що для моделі міжгалузевого балансу (2.1) існує вектор Y кінцевої продукції з додатними координатами.

Для того, щоб матриця A прямих витрат у моделі Леонтьєва була продуктивною, необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з наступних умов.

1. Матриця $(E-A)$ є невід'ємно оборотною, тобто існує обернена матриця $(E-A)^{-1}$, всі елементи якої є невід'ємними;
2. Матричний ряд $E+A+A^2+....+A^k+...=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ є збіжним, причому його сума дорівнює $(E-A)^{-1}$;
3. Найбільше за модулем власне значення λ матриці A є меншим за одиницю;
4. Всі головні мінори матриці $(E-A)$ є додатними.

Більш простою , але лише достатньою умовою продуктивності матриці A є обмеження на величину найбільшої з сум елементів матриці A у кожному стовбці: якщо сума елементів кожного стовпця матриці A менша за одиницю, то матриця A є продуктивною.

Двоїстою до моделі Леонтьєва $X-AX=Y$ називають систему рівнянь для цін на товари галузей:

$$P-A^T P=\Phi, \tag{2.9}$$

де $P^T=(p_1,p_2,...,p_n)$ – вектор цін на товари, A – технологічна матриця, $\Phi^T=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)$ – вектор доданої вартості на одиницю товару.

Систему (2.9) називають *прибутковою,* якщо всі елементи її розв'язку – вектору P є невід'ємними. Продуктивність матриці A забезпечує прибутковість системи (3.9).

Розглянемо приклад побудови та застосування моделі Леонтьєва.

Приклад 2.4. У таблиці 2.4 наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях.

Таблиця 2.4 Міжгалузевий баланс умовної економічної системи з двох галузей

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	A	B		
A	7	21	72	100
B	12	15	123	150

$Y=\cdot\begin{pmatrix}144\\123\end{pmatrix}$

Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо кінцеве споживання продукції галузі A повинно збільшитися удвічі, а галузі B – залишитися на попередньому рівні. Знайти умовно чисту продукцію галузей.

Розв'язання. Знайдемо елементи технологічної матриці A – коефіцієнти прямих витрат $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$. Отримуємо:

$$a_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=\frac{7}{100}=0,07;\ a_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=\frac{21}{150}=0,14;\ a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{12}{100}=0,12;$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10 \cdot$$

Технологічна матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність:

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12 = 0,19 < 1,\ a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24 < 1.$$

Отже, матриця A є продуктивною і для довільного вектору Y кінцевого споживання можна знайти вектор валового виробництва X, що забезпечує даний вектор кінцевого споживання. Знайдемо вектор X за формулою (2.7): $X = (E - A)^{-1} Y$

Вектор Y кінцевого споживання має вигляд:

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $B = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$B_{11} = 0,9$
$B_{12} = 0,12$
$B_{21} = 0,14$
$B_{22} = 0,93$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,14) \cdot (-0,12) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор X валового виробництва:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j,\ i = 1,2;\ j = 1,2,\ x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47;\ x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05.$$

Умовно чисту продукцію галузей визначаємо за формулою: $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$, $j = 1,2$. Маємо:

$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99$ (грошових одиниць);

$z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98$ (грошових одиниць).

2.3. Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)

З допомогою лінійної моделі обміну або моделі міжнародної торгівлі можна визначити, якими повинні бути співвідношення між національними доходами країн, що торгують між собою, щоб торгівля була збалансованою.

Розглянемо модель міжнародної торгівлі, у якій беруть участь n країн. Нехай x_i – національний дохід i-ї країни, a_{ij} – частка національного доходу j-ї країни, яку вона витрачає на придбання товарів i-ї країни, p_i – загальна виручка від зовнішньої та внутрішньої торгівлі для i-ї країни. Будемо вважати, що країна витрачає весь свій національний дохід на придбання товарів всередині країни та на імпорт з інших країн. Це означає, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, ..., n$.

Матрицю A, елементами якої є коефіцієнти a_{ij}, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$, називають *структурною матрицею торгівлі*. Сума елементів кожного стовпчика цієї матриці дорівнює одиниці.

Нехай на протязі певного фіксованого проміжку часу структура міжнародної торгівлі не змінюється, тобто не змінюється матриця A, можуть змінюватися лише національні доходи країн, що беруть участь у торгівлі. Потрібно визначити, якими повинні бути ці національні доходи, щоб міжнародна торгівля залишалася збалансованою, тобто сума виплат усіх країн дорівнювала б сумарній виручці від внутрішньої та зовнішньої торгівлі.

Для будь-якої i-ї країни виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = 1,...,n$. У збалансованій системі міжнародної торгівлі відсутній дефіцит, тобто $p_i = x_i$, $i = 1,...,n$.

Нехай X – вектор, елементами якого є національні доходи $x_1, x_2, ..., x_n$, а елементами вектору P є величини сумарної виручки $p_1, p_2, ..., p_n$. Оскільки $P = A \cdot X$, то виконується рівність $A \cdot X = X$. Отже, вектор X є власним вектором структурної матриці торгівлі A, який відповідає одиничному власному значенню (рівність $A \cdot X = \lambda \cdot X$ виконується при $\lambda = 1$). Звідси випливає, що баланс у міжнародній торгівлі досягається, якщо одиниця є власним значенням структурної матриці торгівлі, а вектор X – власним вектором, що відповідає цьому власному значенню.

Приклад 2.5. Знайти співвідношення національних доходів трьох країн, що торгують між собою, у збалансованій системі міжнародної торгівлі, якщо структурна матриця торгівлі для цих країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є $\lambda = 1$ власним значенням матриці A.

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума двох останніх рядків отриманої матриці $A - E$ дорівнює першому рядку, помноженому на (–1), то визначник цієї матриці дорівнює нулю, отже, $\lambda = 1$ є власним значенням матриці A. Для знаходження відповідного йому власного вектору X розв'яжемо систему $(A - E)X = 0$, або

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Методом Гауса знаходимо розв'язки цієї системи: $x_1 = 2,25x_3$, $x_2 = 2,5x_3$, $x_3 = c$ – довільна додатна константа. Таким чином, збалансованість торгівлі розглянутих трьох країн досягається, якщо їх національні доходи знаходяться у співвідношенні $2,25 : 2,5 : 1$.

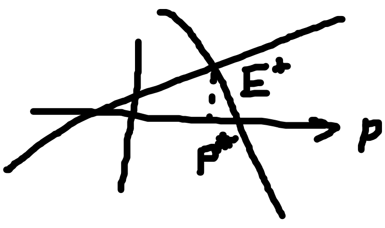
2.4. Застосування методів аналітичної геометрії

Розглянемо особливості застосування методів аналітичної геометрії у економічних дослідженнях. Одним з таких прикладів є модель рівноваги ринку, що дозволяє дослідити механізм формування ціни товару.

Нехай *p* – ціна одиниці товару, *s(p)* – кількість одиниць товару, які продавці пропонують на ринку за цією ціною (*функція пропозиції*), *q(p)* – кількість одиниць товару, яку покупці бажають придбати за ціною *p* (*функція попиту*). Виходячи з економічного змісту функцій пропозиції та попиту, можна стверджувати, що перша з них є зростаючою функцією, друга – спадною. Ціну p^*, за якої попит на товар дорівнює його пропозиції, називають *рівноважною ціною* товару. Для рівноважної ціни $s(p*) = q(p^*)$.

Якщо на координатній площині з горизонтальною віссю *Op* побудувати графіки функцій попиту та пропозиції, то вони перетнуться у деякій точці $E^*\left(p^*, q\left(p^*\right)\right)$, яку називають *точкою рівноваги*.

Приклад 2.6. За умови, що функція попиту на товар має вигляд $q = 40 - 5p$, функція пропозиції $s = 7,5p - 10$, визначити його рівноважну ціну. Нехай уряд



встановив фіксований акцизний податок *T* за одиницю товару. З'ясувати, як зміниться при цьому рівноважна ціна та обсяг реалізації товару.

Розв'язання. Рівноважну ціну товару p^* знаходимо з умови $s\left(p*\right)=q\left(p^*\right)$, тобто $7,5p^*-10=-5p^*+40$, $12,5p^*=50,\ p^*=4, q\left(p^*\right)=s\left(p^*\right)=-5\cdot 4+40=20.$ Отже, точка рівноваги для цього товару $E^*=\left(4;20\right)$.

За наявності акцизного податку *T* г.о. за одиницю товару, функція пропозиції зміниться і її графік зміститься на *T* одиниць праворуч. Маємо:

$$s\left(p-T\right)=7,5\left(p-T\right)-10.$$

Функція попиту при цьому залишається незмінною.

Визначимо нову ціну рівноваги:

$$7,5\left(p-T\right)-10=-5p+40 \Rightarrow p^*=4+0,6T.$$

Відповідний обсяг реалізації становить:

$$q\left(p^*\right)=s\left(p^*\right)=40-5\left(4+0,6T\right)=20-3T.$$

Отже, нова точка рівноваги має координати: $\left(4+0,6T;20-3T\right)$.

Ще одним прикладом застосування методів аналітичної геометрії у економічних дослідженнях є визначення *точки беззбитковості*, тобто обсягу виробництва продукції, для якого доход підприємства дорівнює його витратам.

Нехай підприємство виробляє певну продукцію і продає її за ціною *p* г.о. за одиницю. Залежність витрат на виробництво продукції від обсягу виробництва х одиниць становить $y_1=ax+b$ (*функція витрат*), залежність доходу від реалізації продукції від її обсягу $y_2=px$ (*функція доходу*). Точку беззбитковості для виробництва даної продукції визначаємо, розв'язавши рівняння $y_1=y_2$ або $ax+b=px$. Звідси випливає, що величина точки беззбитковості $x^*=\dfrac{b}{p-a}$. Точка беззбитковості є точкою перетину графіків функції витрат та функції доходу. Координати цієї точки на графіку $\left(\dfrac{b}{p-a};\dfrac{bp}{p-a}\right)$. Прибуток $Q(x)$ підприємства визначається як різниця між значеннями у точці *x* функцій доходу та витрат: $Q\left(x\right)=y_2\left(x\right)-y_1\left(x\right)$. При $0\le x\le x^*$ $Q\le 0$, графік функції доходу проходить нижче графіка функції витрат і підприємство має збитки. При $x>x^*$ $Q>0$ і підприємство отримує прибуток.

Приклад 2.7. Транспортні витрати *y* на перевезення одиниці вантажу залізничним та автомобільним транспортом на відстань *x* визначається за формулами: $y_{зал.}=\dfrac{1}{2}x+100$ та $y_{авт.}=x+50$. Визначити доцільність використання певного виду транспорту у залежності від відстані перевезення.

Розв'язання. Знайдемо значення х, при якому витрати на перевезення кожним з видів транспорту співпадають. Отримуємо:

$$\frac{1}{2}x+100=x+50\Rightarrow x=100.$$

Отже, при $x<100$ км $y_{авт.}<y_{зал.}$, тут вигідніше використовувати автомобільний транспорт, при $x>100$ км $y_{авт.}>y_{зал.}$, тому у цьому випадку доцільно використовувати залізничний транспорт.

2.5. Поняття бюджетної множини

Розглянемо n-вимірний простір товарів, елементами якого є набори товарів $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, де x_i – кількість і-го товару. Нехай P – вектор цін на товари набору, $P=(p_1,p_2,...,p_n)$. Вартість набору товарів X $PX=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$. Набори товарів X та Y є еквівалентними ($X\sim Y$), якщо ціна цих наборів однакова. Дійсно, відношення рівної вартості є відношенням еквівалентності, оскільки воно є рефлексивним ($X\sim X$), симетричним ($X\sim Y\Leftrightarrow Y\sim X$) та транзитивним ($X\sim Y\wedge Y\sim Z\Rightarrow X\sim Z$), тобто означення відношення еквівалентності виконується. Можна запропонувати і інші відношення еквівалентності на просторі товарів.

Розглянемо простір двох товарів, елементами якого є набори (x_1, x_2). Набори товарів однакової вартості c утворюють частину прямої L_c з рівнянням $p_1x_1+p_2x_2=c$, розташовану у першому квадранті координатної площини Ox_1x_2. Ця пряма перпендикулярна до вектору цін. Якщо $c_1<c$, то пряма L_{c_1} паралельна прямій L_c та розташована ближче до початку координат. Нехай Q – кошти, що дорівнюють доходу споживача. Множинну всіх наборів товарів, вартість яких не перевищує Q, називають *бюджетною множиною* B.

Бюджетну множину можна визначити наступним чином:

$$B(P,Q)=\{X\in C: p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n\le Q\}=\{X\in C: PX\le Q\}.$$

Межею бюджетної множини називають множину наборів товарів, вартість яких дорівнює Q: $G(P,Q)=\{X\in C: PX=Q\}$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію бюджетної множини У двовимірному просторі бюджетна множина утворює трикутник у першому квадранті, однією з вершин якого є початок координат. Межа бюджетної множини перпендикулярна до вектору цін і є відрізком між осями координат у першому квадранті. У тривимірному випадку бюджетною множиною є тригранна піраміда, а її межею – похила грань між координатними площинами у першому октанті.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 2

1. Вкажіть допущення для моделі Леонтьєва.
2. Наведіть приклади застосування аналітичної геометрії у економічних дослідженнях.
3. Наведіть визначення продуктивності матриці.

4. Наведіть критерії продуктивності матриці.
5. Розкрийте зміст поняття «структурна матриця торгівлі».
6. Вкажіть, що таке точка беззбитковості та як її визначити.
7. Вкажіть, що є елементами технологічної матриці у моделі Леонтьєва.
8. Надайте означення функції доходу та функції витрат.
9. Розкрийте зміст поняття бюджетної множини.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 2

1. Діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, на протязі останнього року характеризується наступними даними, наведеними у таблиці (в грошових одиницях). Знайдіть технологічну матрицю A цієї економічної системи.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Валовий обсяг виробництва
	A	B	
A	100	160	500
B	275	40	400

2. З'ясуйте, чи є продуктивною технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.

3. У таблиці наведено дані міжгалузевого балансу за звітний період у умовних грошових одиницях. Знайти необхідний обсяг валового виробництва для кожної галузі, якщо за планом кінцеве споживання у енергетиці повинно збільшитися у 2 рази, а у машинобудуванні рівень кінцевого споживання повинен зрости на 20%.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Фактичне кінцеве споживання	Валовий обсяг виробництва
	Енергетика	Машинобудування		
Енергетика	100	160	240	500
Машинобудування	275	40	85	400

4. Задано технологічну матрицю (матрицю прямих витрат) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Знайдіть: а) вектор валового виробництва X, що забезпечує планове кінцеве споживання $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приріст ΔX валового виробництва, що забезпечує збільшення кінцевого споживання на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

5. На плановий період відомі наведені у таблиці коефіцієнти прямих витрат та величина кінцевого споживання у промисловості, сільському господарстві та інших галузях. Визначите обсяги валового виробництва продукції у галузях та міжгалузеві постачання.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцеве споживання (г.о.)
	Промисловість	Сільське господарство	Інші галузі	
Промисловість	0,3	0,25	0,2	56
Сільське господарство	0,15	0,12	0,03	20
Інші галузі	0,1	0,05	0,08	12

6. Чистою продукцією галузі називають різницю між її валовою продукцією та продукцією всіх галузей, витраченою на виробництво у даній галузі. В умовах попередньої задачі знайдіть чисту продукцію для промисловості, сільського господарства та інших галузей.

7. У просторі двох товарів з вектором цін $P = (2; 5)$ вкажіть графічно множини наборів ціною а) 40 г.о.; б) не більше 60 г.о.; в) не менше 30 г.о. і не більше 40 г.о.

8. Для двох товарів з’ясуйте, як змінюється бюджетна множина та її межа, якщо а) змінюється лише дохід; б) змінюється ціна лише одного товару; в) змінюються обидві ціни, але їх співвідношення залишається сталим.

9. У просторі трьох товарів з вектором цін $P = (2; 3; 5)$ вкажіть графічно множини наборів ціною а) рівно 40 г.о.; б) не менше 20 г.о.; в) не більше 60 г.о.