

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**  
**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА**  
**ШЕВЧЕНКА**

**І.Ю. Семенова**

# **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МСС**

*Навчальний посібник*

**Київ 2014**

Навчальний посібник містить відомості про класифікацію систем та методів їх моделювання. В посібнику викладено основні поняття та методи дослідження задач механіки суцільних середовищ. Представлені математичні методи і приклади побудови математичних моделей для задач механіки, фізики, біології та гемодинаміки на базі основних гідродинамічних рівнянь, варіаційних принципів, а також засобів якісного та кількісного аналізу результатів.

Для студентів загально-інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів освітньо-кваліфікаційних рівнів "спеціаліст" та "магістр". Л. 20. Бібліогр. 7 назв., 82 с.

## З М І С Т

Вступ.....	4
ЧАСТИНА I. ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ	
Розділ 1. КЛАСИФІКАЦІЯ, ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ОСНОВНІ ТИПИ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ.....	6
Основні поняття математичного моделювання (6). Основні властивості моделей(8). Основні види та етапи моделювання(11).	
Розділ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ.....	15
Поняття, класифікація та основні властивості математичних моделей (15). Загальна схема побудови математичної моделі (22).	
Розділ 3. ПРЕДМЕТ І МЕТОДИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ.....	26
Предмет механіки суцільних середовищ(26). Проблеми механіки суцільних середовищ(26). Методи механіки суцільних середовищ (28). Основні гіпотези механіки суцільних середовищ (29).	
ЧАСТИНА II. ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ	
Розділ 4. РІВНЯННЯ ГЕМОДИНАМІКИ В КВАЗІОДНОВИМІРНОМУ НАБЛИЖЕННІ.....	31
Рівняння нерозривності і руху (31). Рівняння стану (32). Властивості рівнянь (33). В'язке тертя ізовнішні сили (36). Стаціонарні рішення в посудині з перемінним перетином (34).	
Розділ 5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ КРОВООБІГУ.....	41
Математична модель ділянок розгалуження судин.(41). Математична модель м'язової тканини(42). Ефективні судини (43). Математичні моделі серця (47). Модель нирки (55). Формальний опис серцево-судинної системи в цілому (58). Течія в трубках з еластичними стінками (63).	
Список рекомендованої літератури .....	82

## ВСТУП

Побудова та дослідження математичних моделей є важливими майже для всіх спеціальних дисциплін. Сучасні дослідники використовують засоби математичного моделювання в різних прикладних областях. Роль математичних моделей не обмежується проблемою пізнання закономірностей. В процесі пізнання і в прагненні створити детальний опис процесів дослідження виникає необхідність будувати все більш складні математичні моделі, які потребують універсального математичного апарату.

Математичне моделювання є одним з основних сучасних методів дослідження систем. Зазвичай воно передбачає створення концептуальної моделі об'єкта дослідження, її формалізацію та перетворення у математичну або комп'ютерну модель, перевірку адекватності й подальше дослідження отриманої моделі за допомогою аналітичних або чисельних методів і сучасних комп'ютерних технологій. Застосування методів моделювання часто дає змогу отримати більш точні відомості про поведінку й характеристики досліджуваних систем і процесів, ніж при їх безпосередньому вивченні, витрачаючи при цьому менше часу та коштів.

Крім того у багатьох випадках використання інших методів дослідження взагалі виявляється неможливим через їх небезпеку, коштовність, тривалість або через відсутність відповідного обладнання і методик. Наприклад, проведення експериментального відпрацьовування конструкцій з рідиною, як правило, зв'язано зі значними матеріальними витратами. У модельних експериментах не завжди вдається витримати критерії подібності, більш того, не вдається відтворити умови, наближені до невагомості, рух об'єкта під дією сили, що стежить, і ін. Тому поряд з розвитком експериментальних методів дослідження динамічних процесів у системах тіло-рідина важливо створювати ефективні розрахункові моделі динаміки, засновані на врахуванні найбільш загальних механічних властивостей досліджуваних динамічних об'єктів.

Сьогодні моделювання систем найчастіше реалізують за допомогою сучасних комп'ютерних технологій. Такий підхід передбачає необхідність попередньої формалізації концептуальної моделі об'єкта дослідження та її подання у вигляді, придатному для реалізації тих чи інших алгоритмів чисельного аналізу або комп'ютерної імітації. Обидва підходи передбачають необхідність застосування сучасних математичних методів, що використовуються при створенні алгоритмів моделювання. Навіть при застосуванні спеціалізованих пакетів програмного забезпечення досліднику необхідно володіти основами відповідних математичних методів, оскільки користування такими пакетами зазвичай передбачає необхідність вибору оптимального алгоритму й певних параметрів його реалізації, іноді з декількох десятків можливих варіантів. Це зумовлює необхідність вивчення основних методів математичного моделювання систем майбутніми фахівцями. Спрощений виклад таких основ, що різною мірою використовуються у таких курсах як “Математичні моделі механіки суцільних середовищ”, “Сучасні проблеми механіки суцільних середовищ”, “Комп'ютерне моделювання рідини в резервуарах”, “Чисельно-аналітичні методи в гідромеханіці” є метою цього посібника.

# 1. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ОСНОВНІ ТИПИ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

## 1.1. Класифікація моделей.

**Моделювання** - це заміщення одного об'єкта іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригінала шляхом здійснення експериментів з об'єктом-моделлю.

**Моделлю** називається об'єкт, який у деяких відношеннях збігається з оригіналом, і який є засобом подання, пояснення та/або прогнозування його поведінки.

За формою подання вирізняють реальні та абстрактні моделі.

Реальні (матеріальні, речовинні, натурні) моделі є реальними об'єктами, які у тому чи іншому відношенні можуть замішувати об'єкти-оригінали. При цьому вони відтворюють ті характеристики та властивості останніх, що цікавлять дослідника, і є більш зручними для дослідження. Прикладами таких моделей можуть бути моделі літаків, призначені для аерогідродинамічних випробувань, макети архітектурних споруд, еквівалентні електричні схеми напівпровідникових приладів тощо.

Абстрактні (**ідеальні**) моделі є ідеальними конструкціями, створеними засобами мислення, свідомості. Їх поділяють на мовні, графічні, знакові, математичні й алгоритмічні. Прикладами ідеальних моделей є рівняння, формули, схеми, плани тощо, що описують різноманітні реальні процеси та об'єкти.

У сучасній науці і техніці велике значення мають математичні та комп'ютерні моделі. У природознавстві й технічних науках їх побудова та аналіз є одним з основних методів наукового дослідження і проектування.

При побудові моделей часто виникає необхідність встановлення відношення подібності між моделлю та оригіналом. Для цього використовують такі основні методи.

**Пряма подібність** цілеспрямовано встановлюється під час створення моделі. Прикладами моделей прямої подібності є макети споруд, моделі літаків, шаблони, тощо. Для їх побудови використовують теорію подібності, яка

дає змогу перераховувати результати вимірювань, одержувані в експериментах з моделями, на результати, що можуть бути одержані у подібних умовах на оригіналі.

**Непряма подібність** не встановлюється дослідником, а існує об'єктивно. Вона проявляється як збіг або достатня близькість абстрактних моделей різних систем та процесів.

**Умовна подібність** встановлюється як результат домовленості. Прикладами моделей умовної подібності є алгоритм (модель послідовності дій), гроші (модель вартості), паспорт особи (модель його власника), робочі креслення (модель готового виробу), географічні карти (модель місцевості), умовні сигнали тощо.

Залежно від мети моделювання, вирізняють **пізнавальні** та **прагматичні** моделі.

**Пізнавальні** (дескриптивні, описові) моделі відповідають теоретичним цілям і є формою організації та подання знань. Вони відображають те, щовже існує, а їх основним завданням є наближення моделі до реальності.

**Прагматичні** (нормативні, прескриптивні) моделі є засобом керування, організації практичної діяльності людей, уявленням про зразково правильні дії, порядок їх виконання або результати. Основним завданням таких моделей є наближення реальності до них, оскільки у цьому разі модель розуміється як певний стандарт.

В основі іншого підходу до класифікації моделей систем лежить їх поділ на **статичні** й **динамічні**.

**Статичні** моделі призначені для визначення будови та характеристик, що відповідають певному відносно стабільному стану системи, їх прикладами є структурні схеми, кристалічні решітки кристалів, географічні карти, розклади руху поїздів, кваліфікаційні характеристики фахівців тощо.

**Динамічні** моделі відображають процеси змінювання стану та характеристик системи. їх прикладами є рівняння фізичних процесів (рівняння дифузії, тепло

провідності та інші), моделі хімічних реакцій, перспективні плани розвитку організацій, моделі циркуляції атмосфери.

## 1.2. Основні властивості моделей

Основними властивостями моделей вважають їх **скінченність, наближеність, повноту, адекватність та істинність.**

**Скінченність** моделі полягає у тому, що вона відображає лише деякі з характеристик та відношень, властивих оригіналу. Скінченність зумовлюється обмеженістю часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів, потрібних для розробки та аналізу моделі. Іншою причиною є те, що із великої кількості різноманітних зв'язків досліджуваної системи з навколишнім середовищем, а також її компонентів та зв'язків між ними лише деякі істотно впливають на властивості, що вивчаються. Тому немає потреби у врахуванні інших зв'язків і компонентів. Більш того врахування в моделі несуттєвої інформації призведе до отримання надмірно складної моделі, результати дослідження якої можуть виявитися досить неточними через її математичну некоректність та похибки округлення при розрахунках. Зокрема, при створенні розкладу занять в університеті немає потреби враховувати те, що студенти складаються з певних атомів, між якими діють ковалентні, водневі та інші хімічні зв'язки.

**Наближеність** моделі означає, що вона лише наближено відображає характеристики та відношення, що існують в об'єкті дослідження. Типовими прикладами наближень, які використовують при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, завдання обмежень на точність чисельних розрахунків, заміна нелінійних залежностей лінійними тощо.

Із скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь повноти моделі визначається метою та завданнями дослідження. Слід зазначити, що неповнота моделі не обов'язково є недоліком, оскільки немає сенсу будувати модель, яка є точним повторенням оригіналу. Важливо, щоб модель достатньо повно відтворювала лише те риси об'єкта дослідження, що

вивчаються, й ті його складові, зв'язки та зовнішні впливи, які можуть істотно впливати на них.

**Адекватність** моделі характеризує можливість реалізації цілей моделювання, а її **істинність** - відповідність моделі сукупності наявних знань про об'єкт дослідження. Істинність моделі не є гарантією її адекватності. Зокрема, неадекватність істинної моделі може бути зумовлена накопиченням похибок через необхідність виконання великого обсягу розрахунків. Тут іноді спрацьовує закон "краще є ворогом гарного". З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Типовими прикладами таких моделей є регресійні моделі, які дають можливість прогнозувати поведінку досліджуваної системи у певному діапазоні зміни вхідних параметрів, але не відображають наявні знання про будову, зв'язки та внутрішні процеси в ній й тому свідомо не можуть бути істинними.

Спільною рисою всіх моделей є те, що модель є цільовим відображенням оригіналу. Це означає, що при побудові моделі у першу чергу слід враховувати цілі й завдання дослідження оригіналу. При зміні мети дослідження часто буває необхідно змінити й модель, що використовується. Наприклад, якщо вивчається орбітальний рух Землі навколо Сонця, моделлю Землі може бути матеріальна точка. Якщо ж вивчаються геологічні процеси, використовують модель оболонкової структури Землі (ядро - мантія - літосфера - гідросфера - атмосфера). При дослідженні кліматичних процесів і прогнозуванні погоди суттєвими є конвекційні потоки у нижніх шарах атмосфери, течії в океані, а також коливання коефіцієнта відбиття сонячного світла у різних точках поверхні Землі. Таким чином, для одного й того самого об'єкта може існувати багато різних моделей. Тому часто говорять про **множинність** моделей систем.

Якість моделей залежить як від **об'єктивних**, так і від **суб'єктивних** факторів.

До **об'єктивних** насамперед належать обмеження пов'язані з можливостями використовуваних методів і програмного забезпечення. Наприклад, до появисучасних комп'ютерів і методів паралельного програмування моделі

аеродинамічних та гідродинамічних процесів, що відбуваються під час руху у них з високою швидкістю твердих тіл складної форми (ракет, літаків, кораблів), не давали змоги дослідити деякі суттєві ефекти через неможливість застосування достатньо щільних сіток при виконанні розрахунків методами скінченних елементів.

Основними **суб'єктивними** факторами, що впливають на якість моделей систем, є:

- вибірковість відображення властивостей оригінала дослідником, яка залежить від рівня його кваліфікації, попереднього досвіду, самопочуття та інших чинників;

- властивість людського розуму заповнювати прогалини в наявній інформації на основі попереднього досвіду дослідника, який не завжди є адекватним ситуації, що вивчається;

- застосування для нового об'єкта так званих типових моделей, які можуть виявитися непридатними для його подання.

Існує декілька **причин**, що ведуть до необхідності вивчення моделей замість реальних об'єктів.

По-перше, реальні об'єкти зазвичай зазнають впливу великої кількості різноманітних факторів, що унеможлиблює отримання будь-яких корисних висновків за результатами їх дослідження. Тому виникає необхідність спростити їх за допомогою моделей, що ігнорують вплив несуттєвих з погляду досягнення мети дослідження чинників.

По-друге, у багатьох випадках дослідження реальних систем пов'язано із значними матеріальними затратами, або занадто тривалим, або завдає неприпустимої шкоди навколишньому середовищу чи дослідникам. Типовими прикладами таких ситуацій є дослідження парникового ефекту, кліматичних наслідків ядерної війни, розповсюдження епідемії і т. п.

По-третє, у багатьох випадках метою дослідження є прогнозування поведінки об'єкта дослідження. У більшості випадків це неможливо без побудови їх моделей.

По-четверте, до необхідності розробки моделей часто веде неможливість безпосереднього вивчення реальних об'єктів через їх розмір (елементарні частинки, галактики), час протікання досліджуваних процесів або руйнування чи істотне спотворення під час проведення експериментальних досліджень.

### **1.3. Основні види та етапи моделювання**

Відповідно до класифікації моделей, вирізняють такі **види моделювання**.

**Концептуальне** моделювання за допомогою природних або штучних умов визначає принципові аспекти побудови або функціонування об'єкта дослідження. Прикладами завдань концептуального моделювання є: побудова сценаріїв розвитку організації з метою прийняття стратегічних рішень; вибір інерціальної або неінерціальної системи відліку при записі рівнянь руху у механіці; врахування або неврахування динаміки системи при її вивченні тощо. Відомим з курсу фізики прикладом концептуальної моделі є модель ідеального газу. Згідно з нею ідеальним газом є сукупність молекул, що є матеріальними точками, які не взаємодіють одна з одною інакше, ніж через пружні зіткнення. Як бачимо, ця модель не містить жодних математичних елементів, але враховуючі відомі поняття й закони фізики її можна достатньо легко перетворити у математичну модель. Зазвичай, якщо це можливо, слід будувати концептуальну модель так, щоб її можна було формалізувати за допомогою тих чи інших математичних методів. Це дає змогу у подальшому використовувати комп'ютерні технології її дослідження.

**Інтуїтивне** моделювання передбачає прогнозування поведінки досліджуваної системи на основі уявних експериментів і врахування практичного досвіду дослідника. Класичним прикладом інтуїтивного моделювання через здійснення уявних експериментів є дискусія А. Ейнштейна і Н. Бора стосовно філософських засад квантової механіки. Завдання моделювання на основі практичного досвіду зазвичай вирішують фахівці-практики: інженери, лікарі, агрономи, кваліфіковані робітники тощо. Наприклад досвідчений сталевар часто може

точніше спрогнозувати хід плавки та її результати, ніж це можна зробити на основі певних фізико-хімічних або математичних моделей. Але це стосується лише плавок добре відомих йому марок сталі у стандартних печах.

Фізичне моделювання здійснюють шляхом дослідження як моделі реального фізичного об'єкта, між яким і об'єктом-оригіналом встановлені відношення подібності, що ґрунтуються на подібності фізичних процесів, що відбуваються в них. Зокрема при проектуванні гідротехнічних споруд здійснюють попереднє дослідження моделей, що є їх зменшеними аналогами. Іншим прикладом фізичного моделювання є апробація нових лікарських засобів на піддослідних тваринах.

**Структурно-функціональне** моделювання передбачає побудову і використання як моделей графіків, таблиць, блок-схем тощо, для яких встановлено певні правила їх об'єднання й перетворення. Прикладами структурно-функціонального моделювання є: розробка блок-схем алгоритмів роботи комп'ютерних програм; побудова й перетворення електричних схем; створення класифікаційних схем; розробка розкладів занять у навчальних закладах і т. ін.

**Математичне** (логіко-математичне) моделювання передбачає побудову й дослідження моделей математичними та логічними засобами. Прикладами математичних моделей є: рівняння коливань як модель циклічного процесу; логістична крива як модель кривої зростання; рівняння рівномірного та рівноприскореного руху тощо.

**Імітаційне** (програмне) моделювання передбачає побудову логіко-математичної моделі об'єкта дослідження у вигляді певної послідовності дій (алгоритму), що реалізована як комп'ютерна програма. Зазвичай такий вид моделювання використовують, якщо певні дії відбуваються багаторазово і мають певні відомі статистичні характеристики. У таких випадках встановити зв'язок між входами й виходами досліджуваної системи у вигляді певної математичної моделі зазвичай буває доволі складно. Навпаки, відтворити за допомогою комп'ютерної імітації послідовність подій, що відбуваються в системі, і отримати у числовому вигляді значення її вихідних параметрів, буває набагато легше.

Початковим етапом дослідження складної системи є побудова моделі "чорного ящика". При формальному описі вона задає множини вхідних та вихідних змінних системи, але не містить ніякої інформації про відношення між цими двома множинами. Під вхідними змінними (входами) розуміють впливи навколишнього середовища на досліджувану систему, а під вихідними змінними (виходами) - її впливи на навколишнє середовище. До вихідних змінних зокрема належать ті, що відображають контрольовані за допомогою вимірювальних приладів характеристики реальної системи, а до вхідних - управляючі впливи на неї та неконтрольовані впливи зовнішнього середовища. Побудова моделі чорного ящика є нетривіальним завданням, оскільки у реальних систем існує велика кількість входів та виходів, але залежно від мети моделювання деякі з них можуть виявитися суттєвими, а інші - несуттєвими. Завданням дослідника при побудові моделі чорного ящика є визначення обмеженої кількості тих входів і виходів, суттєвих з погляду реалізації цілей моделювання. Крім того, завжди є невідомі дослідникові й тому невраховані ним впливи навколишнього середовища на досліджувану систему і навпаки - системи на навколишнє середовище.

У багатьох випадках модель чорного ящика є єдиною можливою моделлю системи. Зокрема, така ситуація виникає у випадках, коли внутрішня будова системи є невідомою (наприклад, при дослідженні елементарних частинок), а також якщо необхідно мінімізувати вплив дослідження на систему (наприклад, коли вивчається психіка людини). Подальше дослідження таких систем може відбуватися шляхом побудови регресійних моделей, які у математичній формі відображають зв'язок між їх вхідними та вихідними змінними. У деяких випадках такі моделі можуть потім стати математичним відображенням певних концептуальних моделей. Відомо, наприклад, що рівняння, які описують вільне падіння тіл у механіці, спочатку були отримані Галілео Галілеєм саме як регресійні моделі певного "чорного ящика", і лише значно пізніше теоретично виведені на основі законів класичної механіки.

Для вивчення динаміки систем, моделлю яких є "чорний ящик", часто застосовують методи аналізу часових рядів, рівні яких утворюють показники системи, що цікавлять дослідника.

Наступним етапом є побудова моделей складу та структури системи, а також її структурної схеми. При цьому необхідно мати на увазі, що для кожної системи можна побудувати багато таких моделей. Проте існує певна оптимальна модель, яка залежить від мети дослідження і дає змогу досягти цієї мети з найменшими витратами ресурсів дослідника.

Моделлю складу є перелік основних компонентів (складових частин) досліджуваної системи. При цьому вирізняють два типи компонентів - елементи, які розглядають як неподільні складові, та підсистеми - складові, що з поглядом досягнення цілей моделювання мають розглядатися як утворення, що складаються з інших компонентів. При побудові моделі складу необхідно виявити всі підсистеми та елементи, які суттєво впливають на досліджувані характеристики і параметри системи. Модель складу відображає неоднорідність досліджуваної системи. У моделі структури треба описати всі зв'язки між підсистемами та окремими елементами, та зв'язки всередині підсистем, що є важливими для досягнення мети аналізу. Якщо це можливо, зв'язки необхідно подати у математичному вигляді. Після цього будують структурну схему досліджуваної системи, яка є сукупністю моделей чорного ящика, складу та структури. В ній вказують всі важливі компоненти системи, зв'язки між ними, зв'язки компонентів системи із зовнішнім середовищем (входи та виходи системи). Побудова структурної схеми дає можливість виявити тип структури (лінійна, деревоподібна, матрична, сітьова тощо) і наявність зворотних зв'язків, що має суттєве значення для обрання методу подальшого аналізу системи.

## 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ

### 2.1. Поняття, класифікація та основні властивості математичних моделей

Якщо об'єкт дослідження є не надто складним, достатньо вивченим, а його властивості й характеристики можна виявити на основі теоретичних уявлень і наявних у літературі даних, доцільно як метод дослідження обрати побудову **математичної моделі**. У цьому разі процеси функціонування елементів системи подають як певні функціональні співвідношення (алгебраїчні, диференціальні, інтегро-диференціальні, скінченно-різницеві тощо) або за допомогою логічних мов.

Під **математичною моделлю** реальної системи (процесу) розуміють сукупність співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів тощо), які визначають характеристики станів системи залежно від її параметрів, зовнішніх умов (вхідних сигналів, впливів), початкових умов та часу. Загалом за визначенням В.М. Глушкова математична модель - це множина символічних математичних об'єктів і співвідношень між ними. За М.М. Амосовим, математична модель - це система, що відображає іншу систему.

Математичні моделі можна досліджувати такими методами:

а) **аналітичними**, що дають змогу отримати у загальному вигляді явні залежності

для досліджуваних характеристик;

б) **чисельними**, що дають можливість одержати числові значення шуканих параметрів при конкретних початкових і межових умовах;

в) **якісними**, за допомогою яких можна визначити певні властивості розв'язку (стійкість, монотонність, характер змінювання, асимптотика тощо) без отримання його в явному вигляді;

г) **аналоговими**, що дають змогу вивчати властивості досліджуваної системи за допомогою певного реального об'єкта, наприклад електричної схеми, яку можна подавати за допомогою тієї самої математичної моделі.

Для складних об'єктів альтернативним є шлях **ідентифікації** моделі, через вибір найбільш придатної моделі, що належить до певного класу математичних моделей, і визначення її параметрів за наявними емпіричними даними. Наприклад, для вивчення багатьох практично важливих властивостей твердих тіл використовують метод механічної спектроскопії. При цьому отримують так званий релаксаційний спектр, що може бути поданий у вигляді суми декількох простих максимумів, кожний з яких відповідає певному процесу, що відбувається у досліджуваному об'єкті. Для інтерпретації одержуваних спектрів необхідно використовувати їх математичні моделі. Завдання ідентифікації математичної моделі у цьому разі полягає у визначенні рівняння, що описує один максимум (тут необхідно зробити вибір з декількох можливих варіантів таких рівнянь, які відповідають різним типам процесів), визначенні кількості максимумів та визначенні коефіцієнтів відповідних рівнянь.

Існує багато різноманітних **класифікацій** математичних моделей. Зокрема, вирізняють моделі: статичні й динамічні, диференціальні й інтегральні, детерміновані і статистичні, лінійні та нелінійні, геометричні, топологічні, імітаційні, оптимізаційні тощо.

**Статичні моделі** характеризують конкретний стан об'єкта у заданий момент часу. Як правило, їх застосовують для подання стійких рівноважних чи стаціонарних станів систем, або таких нерівноважних й нестаціонарних станів, змінюванням яких з часом при дослідженні або роботі системи можна знехтувати. Прикладами статичних математичних моделей систем є відомі з курсу фізики рівняння стану ідеального газу, закон Кулона, формула Планка тощо.

Якщо ж метою моделювання є опис не одного конкретного стану системи, а різниці між станами, динаміки змінювання стану з часом, певних процесів, що відбуваються у системі, й таке інше, то виникає потреба в моделях, які б відображали ці процеси. Відповідні математичні моделі називають **динамічними**. Їх прикладами є: рівняння дифузії  $j = \mathit{grad} c$  ( $j$  - потік компонента, що дифундує, а  $c$  - його концентрація), рівняння руху, закон Ома у диференціальній формі, закон радіоактивного розпаду.

Загальна математична модель динаміки системи задає множини входів, виходів та станів системи, а також зв'язків між ними.

**Детерміновані (жорсткі)** моделі передбачають, що зв'язок між входами та виходами системи може бути описаний за допомогою відомих детермінованих функцій, а вхідні значення є точно визначеними. Поведінку детермінованої моделі у принципі можна передбачити однозначно, але у зв'язку із складністю багатьох детермінованих моделей при їх дослідженні застосовують чисельні й статистичні методи. Зазвичай детерміновані моделі призводять до отримання систем алгебраїчних, диференціальних, інтегро-диференціальних або скінченно різницевих рівнянь. Типовими завданнями, для вирішення яких застосовують ці моделі є дослідження динаміки систем, балансу, оптимізація систем та ін.

**Стохастичні (статистичні)** моделі будують, якщо параметри об'єкта дослідження піддаються впливу неконтрольованих випадкових факторів, або він характеризується власною невизначеністю поведінки. Прикладами об'єктів першого типу є курси валют, фондові індекси, нестійкі технологічні процеси, екосистеми тощо. Типовими прикладами об'єктів другого типу є квантові частинки, а також системи, що складаються з багатьох однотипних елементів, які мають власну поведінку. В обох випадках однозначно передбачити властивості таких об'єктів, їх зміну у часі та реакцію на певні зовнішні впливи неможливо, тому при їх вивченні застосовують методи теорії ймовірностей і математичної статистики. У цьому разі зв'язок між входами та виходами подають через випадкові чи кореляційні функції або через рівняння регресії, а не відомі точно параметри і вхідні змінні характеризують за допомогою відповідних функцій розподілу або математичних сподівань і стандартних відхилень. Окремими випадками статистичних моделей є моделі факторного аналізу, що встановлюють зв'язок між факторами, які впливають на досліджувану систему і дають змогу зменшити розмірність простору ознак, а також класифікаційні моделі, за допомогою яких у сукупності досліджуваних об'єктів або ознак виділяють групи подібних один до одного елементів. Прикладами статистичних моделей є відомі з

курсу фізики розподіл Максвелла, що характеризує розподіл молекул ідеального газу за швидкостями їх руху, та рівняння Шредінгера, яке дає змогу визначити щільність імовірності знаходження квантової частинки у певній точці простору. Поділ моделей на дискретні й неперервні визначається характером області допустимих значень їх параметрів. Якщо остання є неперервною, то модель називають **неперервною**. Неперервні ознаки можуть набувати будь-яких значень у певному заданому діапазоні. Прикладами таких ознак є час, потрібний учню або студенту на виконання певного завдання, довжина, вага, температура тощо. Практично усі математичні моделі, що розглядаються у курсі фізики, є прикладами неперервних математичних моделей. Якщо ж область допустимих значень параметрів дискретна, то модель називають **дискретною**. Параметри дискретних моделей можуть набувати лише окремих визначених значень. Дискретними ознаками зокрема є кількість студентів у групі, кількість комп'ютерів в певній установі, обсяг пам'яті у комп'ютерних пристроях та ін. Прикладами дискретних моделей є різноманітні розклади; моделі даних для застосування у базах даних; моделі, що використовуються при вирішенні завдань оптимізації маршрутів перевезень, призначень виконавців робіт тощо. У фізиці дискретні математичні моделі використовуються зокрема при вивченні структури й деяких структурно чутливих властивостей кристалів.

**Лінійні моделі** характеризуються лінійним зв'язком між вхідними та вихідними змінними. На відміну від них у **нелінійних моделях** усі або деякі зв'язки є нелінійними. Найчастіше таку класифікацію застосовують для моделей, що подаються алгебраїчними та диференціальними рівняннями. Її необхідність пов'язана з тим, що для лінійних моделей зазвичай є стандартні процедури їх аналізу, а у багатьох випадках відомими є й основні властивості таких моделей. Тому для отримання необхідних результатів за допомогою таких моделей часто буває достатньо підставити задані числові значення до готових формул або комп'ютерних програм. Для нелінійних моделей така можливість є лише в окремих найпростіших випадках. Крім того, для нелінійних моделей значно

частіше виникають проблеми аналізу й забезпечення стійкості одержуваних розв'язків. Прикладами лінійних математичних моделей є закон Гука, другий закон Ньютона, моделі факторного аналізу, більшість моделей, що використовуються у кореляційному аналізі даних тощо. Прикладом нелінійних моделей є закон всесвітнього тяжіння.

Одним із поширених методів дослідження нелінійних моделей є їх зведення до лінійних. Але при його застосуванні слід пам'ятати, що таке перетворення, навіть коли воно допустимо, веде до звуження меж застосовності результатів дослідження.

**Одновимірними** називають моделі, що мають лише одну вихідну змінну (незалежно від кількості вхідних змінних).

**Багатовимірні** моделі мають декілька вхідних змінних. У загальному випадку кожна із вхідних змінних багатовимірної системи залежить від декількох вхідних. Тому багатовимірні системи зазвичай є також і багатозв'язними.

Властивість **стаціонарності** або **нестаціонарності** відображає ступінь змінюваності об'єкта у часі. Стаціонарними є динамічні системи, параметри яких за певних зовнішніх умов змінюються у часі настільки повільно, що цими змінами за період спостереження можна знехотувати. У математичних моделях це відображається через залежність коефіцієнтів нестаціонарних моделей від

часу. Типовими прикладами нестаціонарних математичних моделей є моделі, що використовуються при формуванні бюджетів різного рівня, оскільки вони мають враховувати динаміку цін, курсів валют, прожиткового мінімуму тощо.

Властивість **зосередженості** або **розподілу** кількісних характеристик внутрішніх властивостей об'єкта дослідження (температура, механічні напруження, деформації, прожитковий мінімум, швидкості процесів тощо) характеризує врахування просторової протяжності системи й скінченної швидкості процесів, що відбуваються у ній, на адекватність моделі. Якщо просторовою протяжністю можна знехотувати й вважати, що всі процеси у системі відбуваються миттєво, то для подання системи можна

використовуватиматематичні **моделі із зосередженими параметрами**. Такі моделі часто подають у вигляді звичайних диференціальних рівнянь та їх систем. Прикладами математичних моделей систем із зосередженими параметрами є рівняння руху матеріальної точки та абсолютно твердого тіла, закони Архімеда й Паскаля в гідростатиці тощо.

У просторово протяжних об'єктах (гази, рідини, деформівні тверді тіла, складні технічні й соціально-економічні системи) необхідно враховувати залежність характеристик від координат. З погляду математики об'єкти з розподіленими параметрами є одновимірними або багатовимірними полями відповідних величин (температур, напружень тощо), які існують у часі й просторі певної розмірності (лінійні, плоскі, тривимірні). Вихідні змінні відповідних моделей є функціями часу й просторових координат, а також їх похідних. Як математичні моделі таких об'єктів часто використовують диференціальні рівняння у частинних похідних. Прикладами **моделей з розподіленими параметрами** є закони Фіка та Фур'є в теорії дифузії й теплопровідності.

З погляду практичного використання важливою є класифікація моделей за методами їх подальшого аналізу. При цьому вирізняють моделі, які досліджують **аналітично, чисельно** та за допомогою **апаратного моделювання** (аналогових обчислювальних машин). У першому випадку вихідну математичну модель необхідно перетворити до такої системи співвідношень, яка дає можливість одержати необхідний результат аналітичними методами. Результатом аналітичного дослідження зазвичай є: побудова формул, що задають шукані величини в явній формі; перетворення рівнянь до вигляду, для якого аналітичний розв'язок є відомим тощо. Результатами аналітичного дослідження також можуть бути якісні висновки про наявність особливих точок, асимптотичну поведінку, монотонність та однозначність залежності, стійкість розв'язку та інші. Основні аналітичні методи дослідження математичних моделей вивчалися у курсі вищої математики, зокрема у таких його розділах, як математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння й теорія імовірності. Серед них можна назвати методи диференціювання, інтегрування й дослідження функцій, методи Гауса та

Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, аналітичні методи розв'язування якісні методи аналізу звичайних диференціальних рівнянь та їх систем тощо.

Розвиток комп'ютерної техніки та програмного забезпечення дає сьогодні можливість використовувати для аналітичного дослідження математичних моделей прикладні пакети символічних обчислень, такі, як Maple, Maxima, Reduce та інші, що значно розширює можливості аналітичних методів. На відміну від інших методів, аналітичне дослідження моделі дає можливість зробити висновки про її загальні властивості, що не залежать від конкретних значень параметрів, вхідних змінних, початкових та межових умов. Утім, для одержання аналітичного розв'язку часто виникає необхідність спрощення вихідної математичної моделі. Типовими прикладами таких спрощень є: розкладання складної функції у ряд Тейлора або Фур'є та врахування лише кількох перших членів отриманого ряду; нехтування деякими величинами, які вважаються малими тощо. У більшості реальних випадків математична модель не може бути перетворена до вигляду, що дає змогу одержати аналітичний розв'язок за умови збереження її адекватності. Тому для дослідження моделі використовують інші методи.

Чисельне дослідження має ширшу сферу застосування, ніж аналітичне, оскільки обчислювальні методи аналізу можуть застосовуватися до більш широкого класу математичних моделей. Основні методи чисельного дослідження математичних моделей: методи інтерполювання функцій; різноманітні способи уточнення коренів алгебраїчних рівнянь; ітераційні алгоритми розв'язування систем алгебраїчних рівнянь; методи Рунге-Кутти розв'язування диференціальних рівнянь та інші. Принциповим недоліком чисельних методів є те, що вони дають змогу виконувати лише аналіз окремих випадків. Тому одержувані висновки не будуть загальними та повними. Ще однією проблемою при використанні обчислювальних методів може бути некоректність формулювання математичної задачі, тобто відсутність у неї розв'язку, його нестійкість або наявність декількох розв'язків. Прикладами коректних задач є знаходження коренів поліному, розв'язування системи лінійних алгебраїчних

рівнянь (у випадку, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, і детермінант матриці, складеної з коефіцієнтів рівнянь, є значимо відмінним від нуля), розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь тощо.

## **2.2. Загальна схема побудови математичної моделі**

Загальна схема побудови математичної моделі є такою.

Насамперед необхідно визначити, для чого потрібна модель, тобто визначити цілі й завдання моделювання. Це має принципове значення для обрання методів її побудови й дослідження.

На другому етапі необхідно визначити структуру моделі і способи математичного подання її окремих блоків. Для цього використовують два основні підходи. Перший передбачає побудову математичної моделі на основі відомих теоретичних даних про закономірності поведінки системи або протікання процесу. У цьому разі одержувана математична модель буде системою відомих з предметної області теоретичних моделей. Перевагами такого підходу є в відповідність структури моделі реальній структурі об'єкта дослідження. Завдяки цьому всі параметри моделі мають реальним фізичним (економічний, технічний або інший) зміст. Такі моделі дають змогу аналізувати не тільки загальні властивості системи як цілого, але також і поведінку її окремих елементів, змінювання структури, визначати відносні вклади різних факторів у властивості, що спостерігаються, тощо. Недоліками цього підходу зазвичай є складність одержуваних моделей і, внаслідок цього, можливість їх некоректності та накопичення похибок при розрахунку вихідних характеристик досліджуваних систем.

У другому випадку будують статистичну модель, наприклад рівняння або систему рівнянь регресії. За допомогою таких моделей можна встановлювати зв'язки між окремими змінними; вирішувати завдання класифікації; прогнозувати, як будуть змінюватися характеристики системи або процесу при зміні вхідних змінних. Статистичні, зокрема регресійні й кореляційні,

моделі зазвичай відповідають розгляду досліджуваної системи як чорного ящика. Тому їх принципово неможливо використовувати для оцінювання вкладу окремих підсистем у формування загальних властивостей системи, аналізу структури системи, зв'язків між її елементами тощо. Коефіцієнти рівнянь регресії часто не мають якогось реального змісту. Проте регресійні моделі вирізняються простотою і у багатьох випадках дають можливість одержувати більш точні оцінки вихідних характеристик досліджуваних систем та процесів.

В багатьох випадках при побудові моделей складних систем і процесів використовують комбінації цих підходів. Зокрема, часто базову модель будують як систему відомих теоретичних моделей, окремі компоненти якої є рівняннями регресії. Якщо модель будують як систему відомих теоретичних моделей, то на цьому етапі на основі відомих теоретичних та емпіричних даних про об'єкт дослідження розробляють його концептуальну модель. Це передбачає визначення

суттєвих для вирішення поставлених завдань компонентів системи, взаємозв'язків між ними, взаємозв'язків системи і навколишнього середовища, можливих станів системи, закономірностей поведінки системи в цілому та її окремих елементів тощо. Потім переходять від змістового до формального опису, тобто відбирають теоретичні уявлення, на основі яких будуватиметься загальна математична модель об'єкта дослідження, визначають межі застосування зроблених у них припущень і спрощень. На цьому етапі широко застосовують метод аналогій та експериментальні дослідження системи.

Далі процедура розробки моделі залежить від обрання методики її подальшого аналізу. На сьогодні найбільш поширеним методом вивчення математичних моделей є їх чисельне дослідження за допомогою ЕОМ. Для цього можна використовувати різноманітні математичні, статистичні та інші прикладні пакети програмного забезпечення, зокрема Microsoft Excel, MathCad, MathLab, Mathematica, Statistica, SPSS тощо. Але при цьому слід мати на увазі, що не існує алгоритмів чисельних розрахунків, які б давали змогу отримати задовільні розв'язки для всіх задач певного класу. Якість роботи алгоритму

залежить не тільки від типу задачі, але й від її конкретних умов та параметрів. Тому обрання алгоритму є нетривіальним завданням. Як правило, якість алгоритму (й моделей загалі) визначають: порівнянням результатів, одержуваних за різними алгоритмами розрахунків; виконанням розрахунків для тестових моделей де кількісний результат є відомим заздалегідь; порівнянням результатів моделювання з відомими якісними даними про модельовану систему (закономірностями її поведінки, впливом певних вхідних параметрів на характеристики, що розраховуються, тощо). У типових прикладних пакетах, як правило, не вказано конкретний алгоритм, за яким виконуються розрахунки. Більше того, досить часто не вказано навіть математичний метод, на якому базується цей алгоритм. Це суттєво ускладнює попередній аналіз можливості застосування прикладних пакетів до дослідження тієї чи іншої моделі, а також пошук джерел похибок моделювання.

Наступним етапом є вивчення моделі. Залежно від мети дослідження, на цьому етапі можуть встановлюватися межі адекватності моделі, області оптимальних значень параметрів, наявність прихованих зв'язків між окремими змінними тощо.

На заключному етапі здійснюють експериментальну перевірку моделі й у випадку необхідності повертаються до одного з попередніх етапів.

Після побудови математичної моделі необхідно визначити її **адекватність**. Для цього використовують формальні й неформальні процедури. У першому випадку результати моделювання порівнюють з емпіричними даними, що відповідають тим самим значенням вхідних параметрів, межових і початкових умов. У цьому разі залишки моделі, тобто різниці між емпіричними даними й результатами, що розраховані за моделлю, мають бути нормально розподілені випадковими величинами з близьким до нуля середнім арифметичним. Немає бути часової, просторової або будь-якої іншої кореляції між цими залишками. Крім того має бути певна відповідність масштабів між стандартними відхиленнями залишків і похибок емпіричних даних. Неформальні процедури перевірки адекватності математичних моделей зазвичай передбачають якісне порівняння типових

залежностей, передбачуваних моделлю, з наявними емпіричними даними та результатами, що одержані на інших вже апробованих моделях. Вони також мають встановлювати відповідність моделі більш загальним теоретичним законам і принципам, сформульованим у певній предметній області. Інколи для перевірки адекватності треба залучати незалежних експертів, які не брали участі в розробці моделі.

За результатами перевірки адекватності моделі приймають рішення щодо можливості її використання. Результатом перевірки може бути висновок про необхідність доробки (корегування) та оптимізації моделі. При корегуванні уточнюють перелік суттєвих параметрів моделі, обмеження, функціональні зв'язки між параметрами тощо. Під оптимізацією розуміють спрощення моделі

при збереженні заданого рівня її адекватності. Основними критеріями оптимальності є витрати часу, пам'яті ЕОМ та інших ресурсів при використанні моделі. Як правило, основним критерієм оптимальності є співвідношення між можливими витратами, пов'язаними з неточністю моделі, й додатковими витратами, необхідними для їх усунення.

### **3. ПРЕДМЕТ І МЕТОДИ МСС.**

#### **3.1.Предмет механіки суцільних середовищ.**

Механіка суцільних середовищ досліджує рух газоподібних, рідких і твердих тіл та середовищ з ускладненими властивостями, коли із властивостями тіл необхідно враховувати зовнішній вплив на середовище, рух якого в свою чергу визначає зовнішній вплив.

Теоретична механіка вивчає рух матеріальної точки, дискретні системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла. Механіка суцільних середовищ розглядає рух матеріальних тіл, які заповнюють простір безперервно, суцільно і відстань між точками всередині тіла змінюється під час руху.

Існує велика кількість питань і задач, на які ще не має задовільної відповіді за допомогою відомих експериментальних та теоретичних методів. Прикладами таких проблем є: зниження опору тіл під час руху у воді з великими швидкостями; створення та утримання плазми з температурою в мільйони градусів; визначення особливостей поведінки матеріалів при великих навантаженнях і температурах (з урахуванням явищ пластичності, повзучості і т. і.); визначення сил, що діють на споруди при вибухах; пояснення загальної циркуляції повітря в атмосфері та прогноз погоди; вивчення механічних процесів в рослинах та живих організмах, у тому числі в організмі людини; проблеми еволюції зірок та явищ пов'язаних з процесами, що відбуваються на Сонці та інше.

#### **3.2.Проблеми механіки суцільних середовищ**

Наведемо деякі найбільш суттєво розроблені проблеми механіки суцільних середовищ.

Проблема впливу рідини та газу на тіла, що рухаються всередині цих суцільних середовищ.

Рух рідини та газу в трубах, а також проблеми динаміки рідини в резервуарах та задачі сумісного руху системи тіло-рідина.

Проблеми фільтрації - руху рідини скрізь ґрунт та інші пористі середовища.

Гідростатика - рівновага рідин та тіл, що плавають всередині та на поверхні рідини; фігури рівноваги мас рідин, що здійснюють обертальний рух, під дією сил гравітації.

Хвильові рухи. Поширення хвиль в твердих тілах; хвилі на поверхні моря; хвилі на поверхні моря під льодовим шаром; хвилі, що створюються рухом корабля; поширення хвиль в каналах та річках; сейсмічні процеси; звукові коливання; загальна проблема поширення звуку в різних середовищах і т. і.

Неусталений рух газів з хімічними перетвореннями під час вибухів, горіння і детонації, наприклад, в течії повітря, в циліндрах поршневих машин або в камерах реактивних двигунів і т. і.

Теорія турбулентних рухів газу та рідин.

Проблема опису руху сильно стиснених рідин і газів із врахуванням ускладнених фізичних властивосте різних середовищ в таких станах, особливо при наявності високих температур.

Проблеми магнітної гідродинаміки та дослідження рухів іонізованих середовищ - плазми із врахуванням їх взаємодії з електромагнітним полем.

Задачі науки, що вивчає прогноз погоди, метеорології.

Дослідження рухів і рівноваги твердих тіл, що деформуються. Теорія пружності. Теорія пластичності. Повзучість матеріалів.

Стійкість і руйнування конструкцій, що складаються із різних матеріалів.

Механічні проблеми, пов'язані із рухами різних сумішей.

Проблеми кавітації.

Біологічна механіка, рух крові, явище скорочення м'язів та загальна теорія дихання і легенів.

### 3.3. Методи механіки суцільних середовищ.

В механіці суцільних середовищ розроблені методи зведення механічних задач до задач математичних, тобто до задач про пошук деяких чисел або числових функцій за допомогою математичних операцій.

Важливою метою механіки суцільних середовищ є встановлення загальних властивостей і законів руху деформівних тіл.

Рішення конкретних задач механіки суцільних середовищ за допомогою математичних операцій також відноситься до механіки суцільних середовищ. Це пояснюється тим, що зазвичай навіть в простіших випадках математична постановка задач механіки суцільних середовищ виявляється дуже складною і отримати точний розв'язок сучасними засобами математики, у тому числі і обчислювальними методами, практично не можливо. Тому постановки задач спрощують і шукають наближені розв'язки на базі різних механічних гіпотез.

Різні проблеми механіки суцільних середовищ та математичні методи їх дослідження у багатьох випадках тісно пов'язані між собою. Наприклад, пояснення деяких фактів руху рідини в околі крила літака є наслідками досліджень руху рідини в трубах. Методи розв'язку задачі про обтікання крила літака мають багато спільного з математичними методами розв'язку задачі фільтрації рідини в ґрунті. Течія стисливого газу описується такими ж рівняннями, що і течія тонкого шару нестисливої рідини.

### 3.3. Основні гіпотези механіки суцільних середовищ.

Як відомо, усі тіла є сукупністю різного виду молекул та частинок. Іноді тіла можуть бути іонізованими, тобто складаються з електронів, іонів та нейтральних частинок. Відомо, що радіус ядра атома набагато менше радіуса молекули, у той же час саме в ньому зосереджена основна маса речовини. Навіть міжзоряний газ можна розглядати, як середовище з дуже великою кількістю частинок в малих об'ємах. Об'єми, які займають тіла, набагато більше об'ємів, в яких зосереджена сама речовина. Таким чином, усі тіла складаються з пустот і в той же час в практично малих об'ємах простору, зайнятого тілом, зосереджена велика кількість частинок. Атоми і молекули знаходяться в постійному хаотичному русі.

Частинки взаємодіють між собою визначеним чином. В газах взаємодія пов'язана тільки із зіткненням частинок. В рідинах та твердих тілах частинки розташовані ближче і тому більш суттєвим є прояв сили взаємодії.

Сили, що забезпечують стійкість та пружність тіл, мають електричну природу та зводяться до сил Кулона. Якщо розглядати ядерні сили та сили слабкої взаємодії, то вони проявляються тільки при ядерних реакціях, коли частинки взаємодіють на близьких відстанях. Для такого зближення частинок необхідна колосальна енергія, яка може виникати за рахунок хаотичного руху частинок при температурах в мільйони градусів.

Якщо відомі електричні сили взаємодії між частинками, можливо побудувати теорію твердих деформованих тіл. Тому дуже важлива електродинаміка.

Для моделювання реальних тіл необхідно враховувати різні структурні особливості цих тіл. Тіла можуть бути газоподібними, рідкими, твердими, аморфними, кристалічними, можуть мати різні фази.

Окрім структури важливе значення мають природа речовини та властивості складових частин сумішей, розчинів та сплавів.

В багатьох випадках виникають механічні задачі про рух з урахуванням зміни якості складових частин та їх відносного змісту. Наприклад, задачі про рухи газів, що супроводжуються ядерними та хімічними реакціями.

Складна будова молекул та утримуючі їх електричні сили не завжди відомі. Слідкувати за рухом кожної частинки неможливо, оскільки кількість частинок завелика і сили взаємодії невідомі. Для практики необхідні тільки деякі середні, сумарні або глобальні характеристики.

**Статистичний метод** є одним із загальних методів підходу до дослідження матеріальних середовищ. Цей метод застосовує імовірнісний підхід до явищ, що вивчаються, а також вводяться середні характеристики по великій кількості частинок.

Іншим загальним методом підходу до вивчення матеріальних середовищ є побудова **феноменологічної** макроскопічної теорії, що базується на загальних, отриманих з досвіду закономірностях і гіпотезах. Макроскопічні теорії є ефективним засобом рішення практично важливих задач, а відомості, які отримані за допомогою цих теорій, співвідносяться з досвідом.

Введемо поняття **суцільного середовища**. Всі тіла складаються з окремих частинок, але їх багато в будь-якому суттєвому для нас об'ємі, тому тіло можна розглядати, як середовище, що заповнює простір суцільним чином.

Безперервним континуумом можна вважати не тільки звичайні матеріальні тіла, але й різні поля, наприклад електромагнітне поле.

Ця ідеалізація необхідна якщо ми бажаємо застосувати апарат математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення.

Під **простором** будемо вважати сукупність точок, які задаються за допомогою чисел, що називаються координатами. розглянемо **метричні простори** - простори, в яких визначені відстані між точками. Будемо розглядати тільки такі простори, в яких можна ввести єдину для всіх точок декартову систему координат. такі простори називаються **евклідовими**.

Поняття часу необхідно в механіці. Час може залежати від системи відліку спостерігача. Будемо користуватися **абсолютним часом** - ідеалізацією.

Тобто, розглядається рух суцільного середовища - континууму в евклідовому просторі з абсолютним часом. Таким чином, введено три фундаментальні гіпотези, з використанням яких будується теорія руху деформівних тіл.

## 4. РІВНЯННЯ ГЕМОДИНАМІКИ В КВАЗІОДНОВИМІРНОМУ НАБЛИЖЕННІ.

Рівняння гемодинаміки в квазіодновимірних наближенні являють собою систему двох диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка замикається одним алгебраїчним співвідношенням.

### 4.1. Рівняння нерозривності і руху.

Диференціальне рівняння (рівняння нерозривності) виражає закон збереження маси має вигляд:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u S}{\partial x} = 0 \quad (1.1.1)$$

Закон зміни кількості руху призводить до диференціального рівняння

$$\rho \frac{\partial u S}{\partial t} + \rho \frac{\partial u^2 S}{\partial x} + \frac{\partial p S}{\partial x} - p \frac{\partial S}{\partial x} = q_f S,$$

яке перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{q_f}{\rho}. \quad (1.1.2)$$

Тут  $q_f$  - об'ємна щільність зовнішніх сил. Одна змінна  $t$  - час. В якості просторової змінної  $x$  обрана довжина дуги, що проходить через центри кругових поперечних перерізів судини.  $S(x,t)$  - площа поперечного перерізу судини, що залежить від координати  $x$  і часу  $t$ . Швидкість руху крові вважаємо спрямованою вздовж осі судини, однаковою по всьому круговому перерізі судини і позначимо  $u(x,t)$ . Тиск усередині рідини (крові) будемо позначати  $p(x,t)$ . Щільність крові  $\rho$  вважаємо постійною (нестислива рідина).

## 4.2. Рівняння стану.

Для замикання рівнянь (1.1.1) і (1.1.2) скористаємося додатковим співвідношенням

$$S=S(p). \quad (1.1.3)$$

Рівняння (1.1.3) можна вважати експериментально встановлюваною залежністю між площею поперечного перерізу судини і тиском всередині судини. У гемодинамічних задачах рівняння  $S=S(p)$  грає роль аналогічну рівняння стану для баротропного газу в газовій динаміці, і за аналогією, далі так і будемо його називати.

У даній роботі ми обмежимося для замикання системи рівнянь положенням, що площа перерізу судини залежить від тиску крові всередині судини і будемо враховувати пружно-механічні властивості судини по граничним значенням площі його перетину, що досягається при малих і великих значеннях тиску.

Характерний для магістральних судин артеріальної частини судинної системи людини вид залежності (1.1.3) зображений на Рис.1.

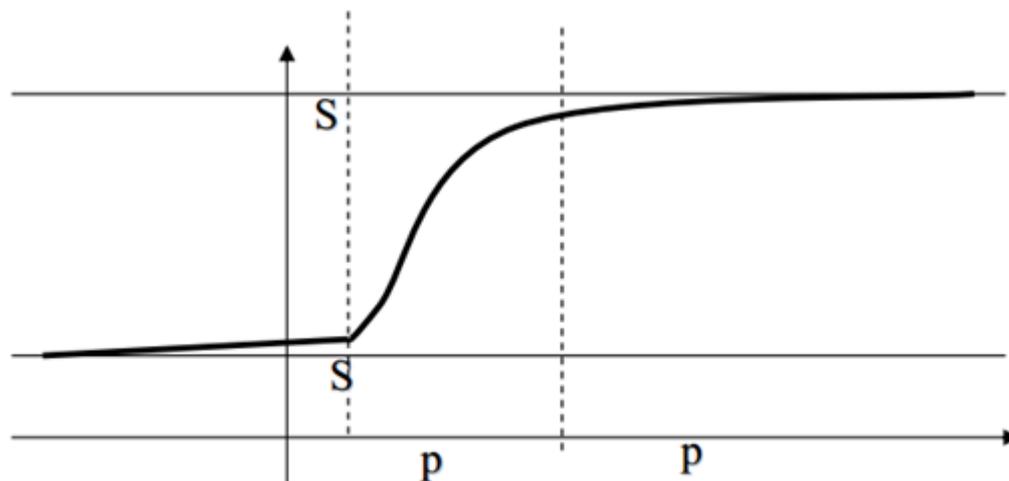


Рис. 1.

Важливою характерною особливістю залежності перетину від тиску є зростання перерізу з ростом тиску, тобто виконання умови  $dS/dp \geq 0$ .

Найпростіший вид модельного рівняння стану представлений на Рис.1.1.2 і визначається формулою

$$S(p) = \begin{cases} S_{\min} + \frac{S_{\max} - S_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}}(p - P_{\min}), & P_{\min} < p < P_{\max} \\ S_{\min}, & p \leq P_{\min} \\ S_{\max}, & P_{\max} \geq p \end{cases},$$

де  $S_{\min}, S_{\max}, P_{\min}, P_{\max}$  характеристиками конкретної судини.

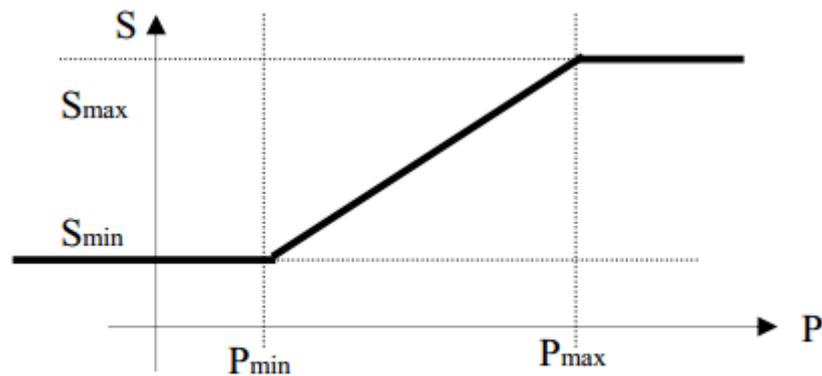


Рис. 2.

Надалі будемо використовувати і більш загальні рівняння стану.

Рівняння (1.1.1), (1.1.2) і (1.1.3) у сукупності представляють собою систему рівнянь гемодинаміки в квазіодновимірних наближенні.

#### 4.3. Властивості рівнянь гемодинаміки.

Отримані рівняння гемодинаміки (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) мають ряд характерних властивостей. Зокрема, становить інтерес тип рівнянь і різні форми їх запису.

*Гіперболічний тип рівнянь гемодинаміки.*

Усюди надалі будемо припускати, що

$$S'_p = \frac{dS(p)}{dp} > 0. \quad (1.1.4)$$

$$c^2 = \frac{S(p)}{\rho S'_p(p)}.$$

Введемо в розгляд вектора і матрицю

$$\vec{Y} = (p, u)^T, \quad \vec{F} = (0, q_f/\rho)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho c^2 \\ 1/\rho & u \end{pmatrix}.$$

Тоді рівняння (1.1.1), (1.1.2) можуть бути записані у вигляді

$$\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{Y}}{\partial x} = \vec{F}. \quad (1.1.5)$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння  $\det(A - \lambda E) = 0$ , знаходимо власні значення матриці А, які дорівнюють  $\lambda^+ = u - c$  і  $\lambda^- = u + c$

При виконанні умови (1.1.4) ці числа дійсні і різні. Отже, система рівнянь (1.1.5) є системою гіперболічного типу [127].

Зауважимо, що величина  $c$  має змістовний сенс, аналогічний швидкості звуку в газовій динаміці [127, 133]. Істотно, що для течії в великих артеріальних судинах кровоносної системи характерним є переважання швидкості звуку над швидкістю руху потоку рідини, тобто  $|u|/c \ll 1$ .

Параметри Рімана в рівняннях гемодинаміки і характеристична форма запису рівнянь.

Характеристичні співвідношення для рівнянь гемодинаміки мають вигляд

$$\pm \frac{1}{\rho c(p)} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^\pm \left( \pm \frac{1}{\rho c(p)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{q_f}{\rho}. \quad (1.1.6)$$

Використовуючи функцію

$$\varphi(p) = \int_a^p \frac{d\xi}{\rho c(\xi)},$$

де  $a$ - довільне фіксоване число, можна записати останні рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pm \varphi + u) + \lambda^{\pm} \frac{\partial}{\partial x}(\pm \varphi + u) = \frac{q_f}{\rho} .$$

Введемо дві нові функції (параметри Рімана [127])

$$R^{\pm}(u, p) = u \pm \varphi(p) .$$

В результаті рівняння (1.1.6) зводяться до двох рівнянь переносу для параметрів  $R^+$  і  $R^-$ :

$$\frac{\partial R^{\pm}}{\partial t} + \lambda^{\pm} \frac{\partial R^{\pm}}{\partial x} = \frac{q_f}{\rho} . \quad (1.1.7)$$

Рівняння (1.1.7) є рівняннями гемодинаміки, записаними для параметрів Рімана.

Розглянемо рівняння (1.1.7) на двох сімействах характеристик у площині незалежних змінних  $(x, t)$ , що задаються рівняннями

$$\frac{d x^+(t)}{d t} = \lambda^+ , \quad \frac{d x^-(t)}{d t} = \lambda^- .$$

Рівняння (1.1.7) для функцій  $R^+(t, x^+(t))$  і  $R^-(t, x^-(t))$  вздовж, відповідно,  $\chi^+$  і  $\chi^-$  характеристик, можна представити у вигляді:

$$\frac{d R^+}{d t} = \frac{q_f}{\rho} , \quad \frac{d R^-}{d t} = \frac{q_f}{\rho} . \quad (1.1.8)$$

З (1.1.8), зокрема, випливає, що якщо зовнішні сили відсутні, то є  $q_f(x, t) \equiv 0$ , то параметри Рімана  $R^+$  і  $R^-$  є постійними на характеристиках  $\chi^+$  і  $\chi^-$ , відповідно.

У випадку  $q_f(x, t) \neq 0$ , враховуючи вирази для функцій  $R^+(u, p)$  і  $R^-(u, p)$  і  $\varphi(p)$  залежність  $S=S(p)$  після перетворень, отримаємо, що на характеристиках  $\chi^+$  і  $\chi^-$ , відповідно, виконані такі характеристичні співвідношення, записані для диференціалів

$$d u \pm 2 \frac{d(\sqrt{S})}{\sqrt{\rho S'_p}} = \frac{q_f}{\rho} d t .$$

#### 4.4. В'язке тертя і зовнішні сили.

Однією з основних сил, що впливають на потік крові, є тертя. Будемо розглядати кров як нестисливу

рідину з коефіцієнтом кінематичної в'язкості  $\nu$ . Згідно експериментальним дослідженням [1,2,3], розподіл швидкості течії крові в більшій частині судин як артеріальної, так і венозної частини, близько до течії Пуазейля [126]. У зв'язку з цим, у великій кількості робіт у квазіодновимірному наближенні гідродинамічний опір розглядається як осереднене для течії Пуазейля.

У підсумку такого розгляду сила тертя подана в вигляді

$$F_{TR} = \frac{1}{\rho} \frac{F_P}{S} = -8\pi\nu \frac{u}{S}, \quad (1.1.9)$$

де  $\nu = \mu/\rho$  - коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Зрозуміло, можливі й інші форми запису сили тертя, які можуть використовувати різні експериментальні дані, наприклад [126].

Потрібно відзначити, що вираз для сили тертя, одержуване на основі течії Пуазейля, завідомо не підходить для опису опору в капілярах.

У даній роботі в судинах, відмінних від капілярів, в основному буде використовуватися співвідношення (1.1.9).

Прикладом іншої зовнішньої сили може служити сила тяжіння. Об'ємна щільність гравітаційної сили  $F_T$  в простому випадку дорівнює

$$F_T = g\rho\cos\varphi \quad (1.1.10)$$

де  $\varphi$ -кут між віссю судини і напрямом вектора прискорення вільного падіння, величина якого дорівнює  $g$ .

#### 4.5. Стаціонарні рішення в посудині з перемінним перетином.

Система рівнянь гемодинаміки в цьому випадку перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dx}(Su) = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = -8\pi\nu\frac{u}{S}, \quad S = S(p), \quad 0 < x < l, \quad (1.1.11)$$

яку слід доповнити певними крайовими умовами.

З першого рівняння системи (1.1.11) випливає, що потік крові в посудині постійний  $Su = Q_0 = \text{const}$ .

З урахуванням цього, друге рівняння перетвориться до виду

$$(1 - M^2) du = -8\pi\nu M \frac{u^2}{\rho Q_0} dx, \quad (1.1.12)$$

де  $M = |u/c|$  - число Маха,  $c$ , як і раніше, швидкість розповсюдження малих збурень.

Лінійне рівняння стану.

Розглянемо випадок найпростішого рівняння стану:

$$S(p) = S_0 + \Theta(p - p_0), \quad \Theta = \text{const}.$$

Така залежність відповідає випадку, коли для рівняння стану загального вигляду  $S=S(P)$  виділяється ділянка  $(p_{\min}, p_{\max})$ , на якій профіль цієї функції близький до лінійного.

У силу припущення  $\text{const} = \Theta$  рівняння (1.1.12) зводиться до безрозмірного рівняння для числа Маха. Це рівняння має вигляд:

$$\frac{d\xi}{dM} = \frac{1 - M^2}{M^3}, \quad (1.1.13)$$

де  $\xi = 12\pi\nu x / Q_0$  - безрозмірна змінна, нормована на величину об'ємної витрати  $Q_0$  рідини і кінематичної в'язкості  $\nu$ . Інтегральні криві рівняння (1.1.13) представлені на рис. 1.1.3.

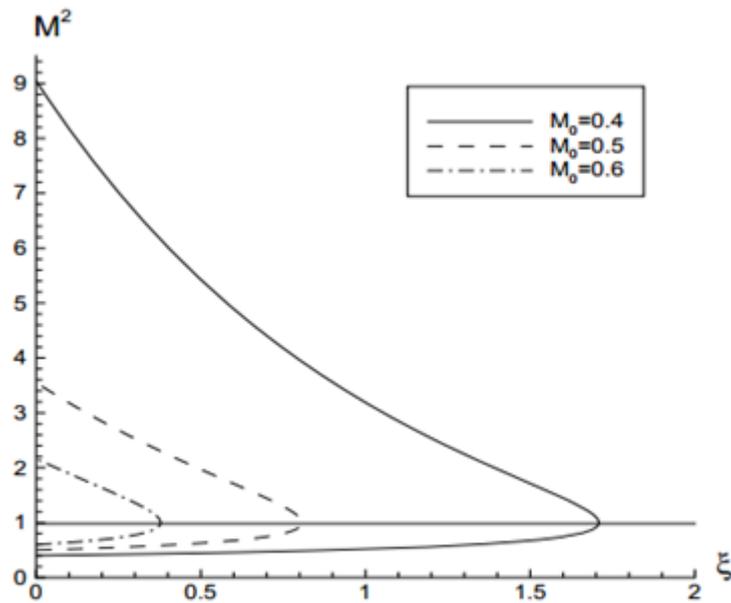


Рис. 5.

Криві даного сімейства відрізняються один від одного зміщенням вздовж осі  $\xi$ , що визначається параметром початкового значення числа Маха  $M_0$  при  $\xi=0$ .

Для повноти картини тут включені також «надзвукові» течії ( $M > 1$ ), хоча, як було зазначено вище, для гемодинаміки судин характерні тільки дозвукові режими течії.

З рис.5 очевидним чином випливає, що характерною особливістю будь-якої дозвукової течії є обмеженість довжини судини, в якій воно існує:

$$\xi < \xi_{kp} = \ln M_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M_0} - 1 \right), \quad M_0 < 1.$$

Тобто неперервний перехід до надзвукової течії в кровоносних судинах неможливий в даному випадку.

Слід зауважити, що розгляд більш складних рівнянь стану принципово не змінює ситуації. У той же час для деяких рівнянь стану неможливо (у певному діапазоні зміни параметра витрати) перевищити швидкість звуку. Розрахунки нестационарних течій показали, що виникнення надзвукових зон, як правило, призводить до втрати стійкості течії.

Подібні аналітичні розв'язки використовувалися як для якісного аналізу гемодинамічних течій, так і для тестування обчислювальних алгоритмів.

## 5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ КРОВООБІГУ

### 5.1. Математична модель ділянок розгалуження судин.

Сформулюємо додаткові співвідношення, яким задовольняються значення функцій  $S(x,t)$ ,  $p(x,t)$ ,  $u(x,t)$  в граничних точках судин.

Одним з типових елементів судинної системи є ділянка, в якій сходяться кілька судин. По деякими з цих судин кров прибуває, а по решті відбувається її відтік із зони розгалуження. Будемо вважати, що розгалуження судин локалізовано в малій просторовій області, в якій не відбувається застою крові. Дану умову, що виражає закон збереження маси, можна записати, наприклад, наступним чином

$$\sum_{i=1}^{\Gamma^+} S_i u_i = \sum_{i=1}^{\Gamma} S_i u_i .$$

Тут через  $\Gamma^+$  позначено число судин, по яких кров притікає в зону розгалуження, а  $\Gamma$  є число судин, по яких кров витікає з цієї зони.

Однорідне рівняння руху (1.1.2) можна записати у формі

$$\frac{d S u}{d t} + S \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 ,$$

що використовує субстанціональну похідну від імпульсу частинки рідини. Якщо вважати, що імпульс рухомої частки рідини не змінюється за часом при проходженні області розгалуження судин, то отримуємо умову неперервності

комбінації  $\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}$  в області розгалуження судин.

Таким чином, фізично змістовними є умови неперервності на спільному кордоні судин, що входять в область розгалуження, інтеграла Бернуллі [126],

тобто комбінації  $\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}$

Як було зазначено вище, в нормі течія крові є дозвуковою і  $u_i^2 \ll p_i / \rho$ , тому умови неперервності інтеграла Бернуллі або тиску в багатьох випадках рівнозначні.

## 5.2. Математична модель м'язової тканини.

По артеріальній частині судинної системи кров надходить до м'язової тканини або окремих органів. Якщо розглядається м'язова тканина, то її капілярну мережу можна представити у вигляді власне графа судин з відповідними властивостями. Однак, якщо з якихось причин, докладне уявлення даного органу або тканини не потрібно, то можна обмежитися ефективними умовами спряження. Можна вважати, що процес проходження крові через тканини подібний до процесу фільтрації рідини через пористе середовище, що підкоряється закону фільтрації Дарсі. Можливо, що сумарна кількість крові, що надійшла в тканину за фіксований час може відрізнятись від кількості крові, що вийшла з тканини у вени за той же самий час. Дані закономірності можуть бути описані такими співвідношеннями.

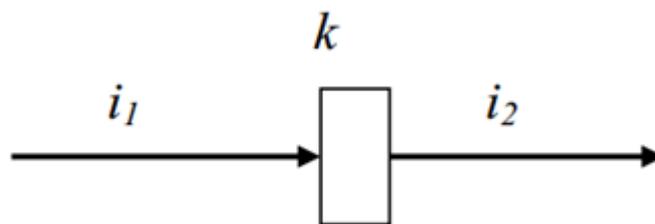


Рис 4.

Нехай в області  $k$ , відповідної тканини, сполучаються два ребра (Рис.1.3.1)

Набір судин (як в артеріальній, так і у венозній частині), що безпосередньо прилягають до капілярів тканини, замінимо одним ефективною судиною. На Рис.1.3.1 артеріальній частині відповідає ребро  $i_1$ , венозної-ребро  $i_2$ .

У самій вершині покладемо виконаним закон збереження потоків

$$z_{k,i_1} Q_{k,i_1} = z_{k,i_2} Q_{k,i_2} + \Delta Q_k. \quad (1.3.1)$$

Крім того, можна вважати, що процес проходження крові через тканину подібний фільтрації рідини через пористе середовище, тобто падіння тиску на тканинах задовольняє закону фільтрації Дарсі

$$z_{k,i_2} u_{i_2} S_{i_2} = K_{D,k} (p_{i_1} - p_{i_2}). \quad (1.3.2)$$

Тут коефіцієнт  $K_{D,k}$  - параметр моделі, і, взагалі кажучи, може залежати, у свою чергу, від різних величин, а параметр  $z_{k,i}$  приймає значення +1 на ребрі, що входить у вершину і значення -1 на ребрі, що виходить з вершини.

Для всіх м'язових тканин або окремих органів необхідно задати коефіцієнти дифузії, які використовуються в законі Дарсі.

### 5.3. Ефективні судини.

На певному рівні розгалуження артеріального або венозного русла, що примикає до тканин, кількість дрібних судин стає досить великою. В принципі, вони можуть бути включені в загальний вигляд серцево-судинної системи, однак необхідність в подібній деталізації може бути відсутньою. У цьому випадку замість джгутів дрібних судин можна розглядати їх як складову частину тканин і описувати законом Дарсі (1.3.2). Однак, з ряду причин (необхідність враховувати властивості цих судин, наприклад, при моделюванні регуляторних механізмів) може знадобитися розгляд цих джгутів судин саме як судин. У цьому випадку можна замінити джгути дрібних судин ефективною (в деякому сенсі еквівалентним) судиною. Розглянемо деякі варіанти такої заміни.

#### 5.3.1. Ефективні паралельні судини.

Нехай є  $n$  дрібних судин (Рис.5), що виходять з більш великої судини, що має характерний переріз  $S_0$  через який проходить середній потік крові  $Q_0$ .

Тут  $l_i$  - довжина,  $S_i$  - перетин,  $u_i$  - швидкість для  $i$ -ї судини,  $i = 1, \dots, n$ .

Побудуємо посудину перетину  $S_i$  довжини  $l_i$ , що заміняє джгут дрібних судин так, щоб зберегти характерні для джгута в цілому потік, перепад тиску і об'єм крові. Зробимо це в припущенні стаціонарності течії і сталості площі поперечного перерізу судини.

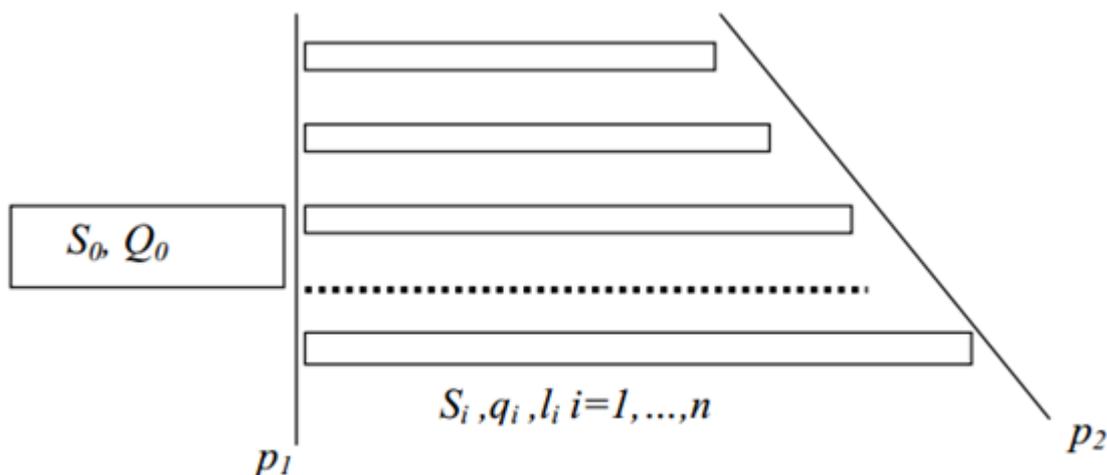


Рис. 5.

Якщо додатково припустити, що всі судини в джгуті однакові, тобто

$$S_i = S_A, \quad l_i = l_A, \quad u_i = u_A = \frac{Q_0}{nS_A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то прийдемо до співвідношень

$$\frac{\bar{l}}{\bar{S}^2} = \frac{1}{n} \frac{l_A}{S_A^2}, \quad \bar{l} = \sqrt[3]{n} l_A, \quad \bar{S} = \sqrt[3]{n^2} S_A.$$

Швидкість течії крові по ефективній судині позначимо:

$$\bar{u} = \frac{Q_0}{\bar{S}}$$

Тоді, якщо всі судини в джгуті однакові, то  $\bar{u} = \sqrt[3]{u_A}$  і час проходження частки крові через судини джгута і час проходження через ефективний посудину однаково:

$$\frac{l_A}{u_A} = \frac{\bar{l}}{\bar{u}}.$$

### 5.3.2. Двійкове дерево судин.

Розглянемо систему роздвоюється (бінарне дерево) жорстких судин з кількістю розгалужень  $n$ . На кожному рівні розгалуження  $k=1, 0, \dots, 2, n$  судини

мають однаковий перетин і довжину  $l_k$ ,  $S_k$ , і через кожну посудину  $k$ -ого рівня проходить однаковий потік  $Q_k$ . Зауважимо, що тим самим і швидкість крові  $v_k$  в судинах одного рівня однакова (Рис.6). Нагадаємо, що  $\rho = \text{const}$ . Замінімо все дане двійкове дерево одним елементом-посудиною з довжиною  $l$  і перетином  $S$ , так, що через нього протікає заданий потік  $Q_0$ , перепад тиску становить  $\Delta p$  і в посудині зберігається потрібний об'єм крові  $V$ .

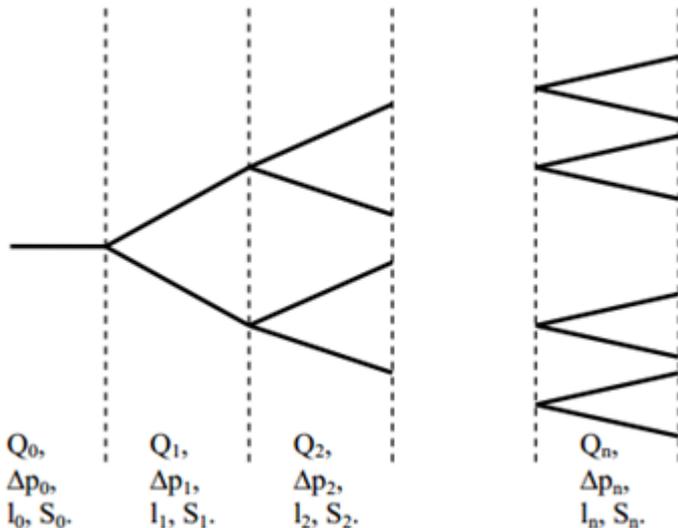


Рис.6.

Течію вважаємо стаціонарною, в цьому випадку з другого рівняння руху системи гемодинаміки випливає, що на кожній судині для перепаду тиску вірно співвідношення

$$\Delta p_k = -8\pi\nu\rho \frac{u_k}{S_k} l_k = -\eta \frac{u_k}{S_k} l_k = -\eta \frac{Q_k}{S_k^2} l_k.$$

Тоді, з умови збереження заданого перепаду тиску випливає співвідношення

$$\frac{Q_0}{S^2} \bar{l} = \sum_{k=0}^n \frac{Q_k}{S_k^2} l_k.$$

Відповідно, умова збереження об'єму має вигляд

$$\bar{V} = \bar{S} \bar{l} = \sum_{k=0}^n 2^k l_k S_k.$$

Зробимо таке припущення:

$$S_k = qS_{k-1}, k = 1, \dots, n, q > 0, \quad l_k = pl_{k-1}, k = 1, \dots, n, p > 0.$$

Тоді можна вивести необхідні співвідношення

$$\bar{S} = S_0 \left[ \frac{\sum_{k=0}^n (2pq)^k}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{p}{2q^2}\right)^k} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad \bar{l} = l_0 \left[ \left( \sum_{k=0}^n (2pq)^k \right)^2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{p}{2q^2}\right)^k \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (1.4.1)$$

Таким чином, дійсно судина завдовжки  $l$  і перерізом  $S$  (1.4.1) створює такий же перепад тиску, містить стільки рідини, як і система, представлена на Рис.1.4.2. При цьому час проходження частинки рідини від початку судини до його кінця відповідає часу проходження частинки системи на Рис.1.4.1.

Ці формули можна дещо спростити за умови збіжності рядів в (1.4.1). Для цього повинні виконуватися нерівності  $p/2q^2 < 1$  і  $2pq < 1$ .

У цьому випадку можна знайти граничні значення величин  $l$  і  $S$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\bar{S} = S_0 \left[ \frac{1}{\frac{1-2pq}{2q^2}} \frac{2q^2}{2q^2-p} \right]^{\frac{1}{3}} = S_0 \left[ \frac{(2q^2-p)}{(1-2pq)2q^2} \right]^{\frac{1}{3}},$$

$$\bar{l} = l_0 \left[ \left( \frac{1}{1-2pq} \right)^2 \frac{2q^2}{2q^2-p} \right]^{\frac{1}{3}} = l_0 \left[ \frac{2q^2}{(1-2pq)^2(2q^2-p)} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Отримані таким чином величини площі перетину і довжини ефективної судини, зрозуміло, є оціночними, так як отримані для стаціонарного та постійного по простору течії. У разі необхідності вони можуть бути уточнені в ході обчислювального експерименту.

Судини з такими параметрами використовувалися, наприклад, для моделювання при капілярних і резистивних судин.

#### 5.4. Математичні моделі серця

При моделюванні системи кровообігу в цілому необхідно належним чином описати роботу серця. Повний математичний опис роботи серця з урахуванням всіх можливих факторів є окремою і вкрай складною задачею. У даній роботі обмежимося побудовою спрощених моделей, що відтворюють основні функції серця і дозволяють отримати фізіологічно розумні течії в системі судин.

Для цього розглянемо наступну схему функціонування серця (рис.7). Рух крові в організмі забезпечується серцем, яке можна розглядати як два порожнинних м'язових органи "ліве" серце і "праве" серце, кожне з яких складається з передсердя і шлуночка. Кров від органів і тканин організму надходить до правого серця, виштовхує її до легень, де вона насичується киснем, повертається до лівого серця (по малому колу) з якого знову надходить до органів, звідки повертається до правого серця (по великому колу). Нагнітальна функція серця заснована на чергуванні (серцевий цикл) розслаблення (діастоли) і скорочення (систоли) шлуночків. Під час діастоли шлуночки заповнюються кров'ю, а під час систоли вони викидають її у великі артерії (аорту і легеневий стовбур). Перед заповненням шлуночків, кров накопичується в передсердях.

Таким чином, робота серця в нормі має квазіперіодичний характер і складається з серцевих циклів. У свою чергу систола і діастола поділяються на кілька періодів. Систола підрозділяється на період ізоволюметричного скорочення і період вигнання, а діастола - на період ізоволюметричного розслаблення і період наповнення. Тривалість ізоволюметричних скорочень і розслаблень складає приблизно 50-60 мс, тоді як тривалість систоли і діастоли складає 0.3-0.5 с, в зв'язку з чим при побудові моделей будемо розглядати систолу як період вигнання крові з серця, а діастолу - як період наповнення.

Коли тиск в лівому шлуночку стає вище діастолічного тиску в аорті (в середньому в нормі приблизно 80 мм.рт.ст.), клапани шлуночка відкриваються, і починається період вигнання крові. Спочатку внутрішньошлунковий тиск продовжує підвищуватися, досягаючи приблизно 130 мм.рт.ст а в кінці систоли він знову падає. У спокої ударний об'єм шлуночка, тобто кількість крові, яка

викидається за один цикл, становить близько половини скінченнодіастолічного обсягу, рівного приблизно 130 мл. Таким чином, в кінці періоду вигнання в серці залишається біля 70 мл крові, це так званий скінченносistolічний, або резервний об'єм.

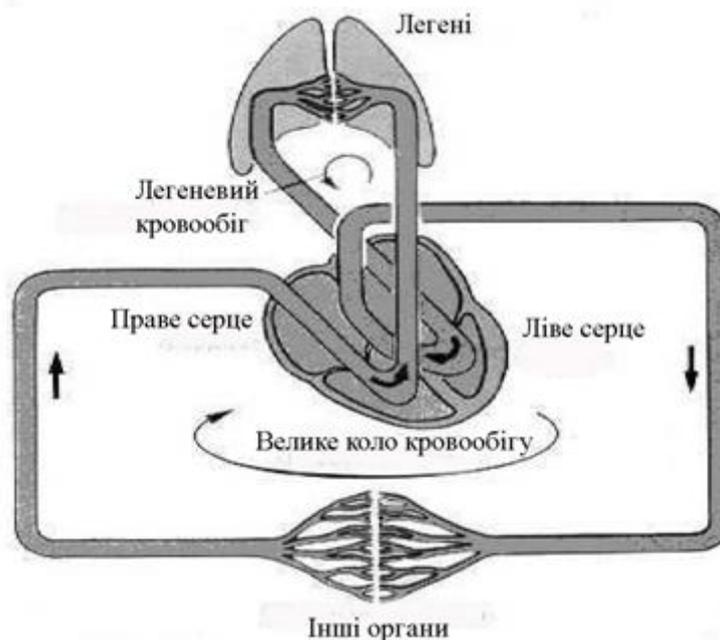


Рис.7.

У період наповнення кров'ю тиск в шлуночку змінюється незначно (рис.8), а обсяг зростає - спочатку дуже швидко (Фаза швидкого наповнення), потім повільніше (фаза діастази). При високій частоті скорочень діастола коротшає в більшій мірі, ніж систола (рис.8). Все сказане вище відноситься до лівого серця, однак, ті ж періоди спостерігаються і в циклі скорочення правого серця. Праве серце відрізняється тим, що розвинений ним систолічний тиск повинен бути значно менше, ніж у лівому серці (це пов'язано з більш низьким опором легневих судин). Ударний же обсяг у обох шлуночків приблизно однаковий. Періоди циклу двох половин серця не зовсім збігаються, однак фазові зрушення малі (близько 10-30 мс) і, в першому наближенні, практично не впливають на гемодинаміку в цілому.



Рис. 8

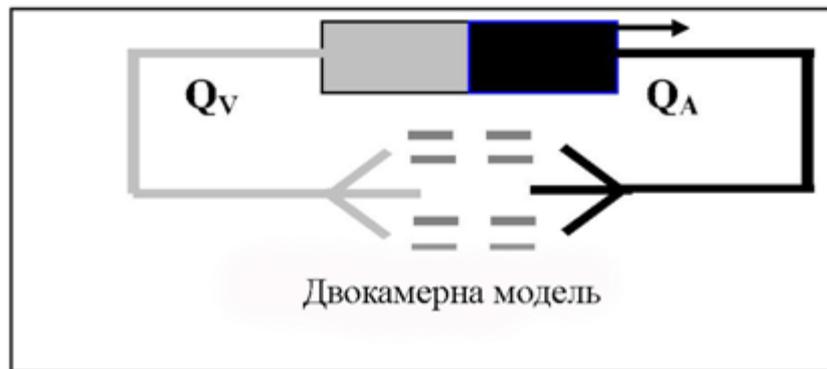


Рис. 9 а

Таким чином, принципово модель чотирьохкамерного серця представляється як об'єднання двох двокамерних моделей, можливо з різними параметрами (рис.9 а і б.).

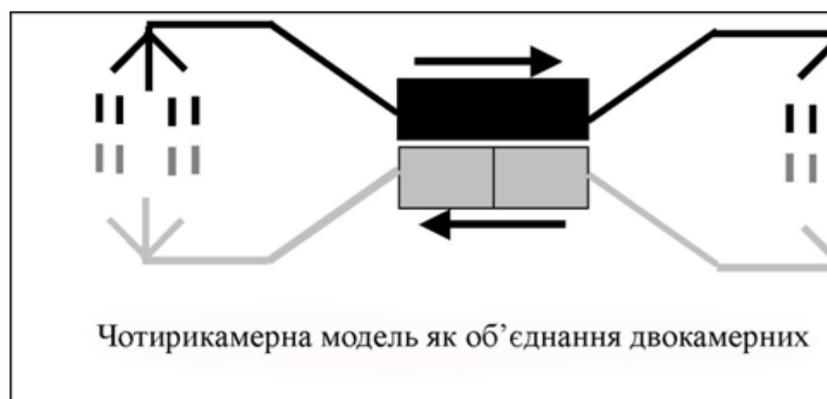


Рис. 9 б

Тут  $Q_V$  ,  $Q_A$  - венозний і артеріальний потоки відповідно. У зв'язку з цим далі будемо розглядати саме моделі двокамерного серця, за допомогою яких можливо моделювання обох кіл кровообігу.

#### 5.4.1. Точкова модель серця.

В серцево-судинній системі серце грає роль насоса, що забезпечує в нормальних умовах періодичне надходження крові в аорту і далі у всю кровоносну систему. Виконання серцем цієї функції можливе лише за умови забезпечення припливу в серце достатньої кількості крові з венозної частини кровоносної системи. Наявні експериментальні дані дозволяють вважати відомою, наприклад, залежність зміни у часі потоку крові ( $Su = q_A(t)$ ) або залежність зміни у часі тиску в посудині ( $p = p_A(t)$ ) на стику серця з аортою.

Тут  $q_A(t)$  і  $p_A(t)$  є задані функції. У місці з'єднання серця з венозною частиною судинної системи можна задавати залежність від часу тиску  $p = p_V(t)$ . Відомо, що при нормальній роботі серця, наближено,  $p_V(t) = 5$  мм.рт.ст.

Реальний процес функціонування серця має більш складний характер і, тому, можлива розробка і використання більш точних математичних моделей серця.

Розглянемо велике коло кровообігу і зіставимо двокамерному серцю дві вершини (рис.10). Одну вершину (з номером  $k_1$ ) зіставимо з передсердям, іншу (з номером  $k_2$ ) зіставимо з шлуночком. Нехай ребро  $i_2$  відповідає висхідній дузі аорти, а ребро  $i_1$  - венозному синусу.

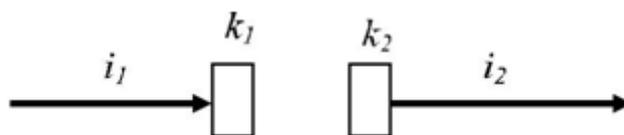


Рис. 10

У простому випадку для моделювання нагнітальної функції серця на вході в аорту можна використовувати періодичні функції у вершині  $k_2$ , тобто може бути задана залежність від часу або потоку крові  $Su = Q_A(t)$ , або артеріального тиску  $p$

$= p_A(t)$ , де  $Q_A(t)$  і  $p_A(t)$  - задані функції, узгоджені з величиною серцевого викиду або тиску відповідно.

У вершині,  $k_1$  відповідно венoзному синусу серця, може бути задана залежність від часу тиску

$$p = p_v(t). \quad (1)$$

Як випливає з графіка представленого на рис.8, тиск в передсерді змінюється незначно і становить приблизно 5-7 мм.рт.ст. Тому тиск в (1) можна, в першому наближенні, взяти постійним  $p = p_v(t) = p_{v,0}$ .

Як випливає з рис.8, характерний вигляд графіка тиску на виході з шлуночка має вигляд (Рис.11)

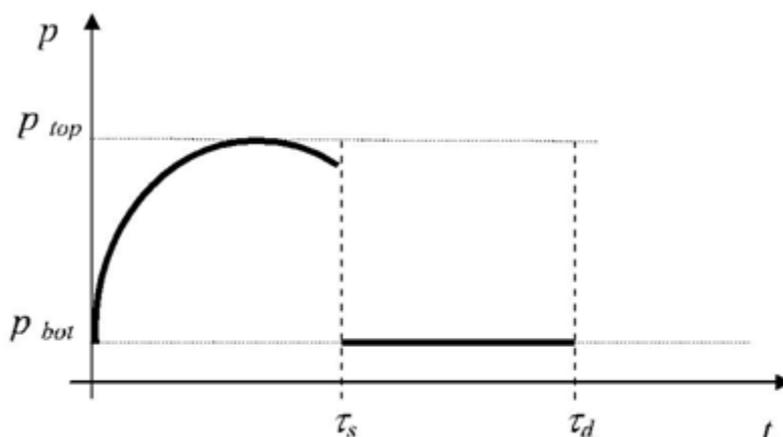


Рис.11

і в межах одного серцевого періоду  $T_p = \tau_s + \tau_d$  може бути наближено описаний функцією

$$p_A(t) = \begin{cases} p_{top} - \frac{1}{\tau_s} (p_{top} - p_{bot})(t - \tau_s)^2, & 0 \leq t \leq \tau_s \\ p_{bot}, & \tau_s < t \leq \tau_s + \tau_d \end{cases} \quad (2)$$

Тут  $\tau_s$  - час систоли,  $\tau_d$  - час діастоли,  $p_{top}$  і  $p_{bot}$  - відповідно максимальне і мінімальне значення тиску на виході з шлуночка за серцевий цикл.

Аналогічно, можна побудувати залежність від часу потоку крові з шлуночка (серцевого викиду)

$$Q_A(t) = \begin{cases} q_{top} - \frac{1}{\tau_s} (q_{top} - q_{bot})(t - \tau_s)^2, & 0 \leq t \leq \tau_s \\ q_{bot}, & \tau_s < t \leq \tau_s + \tau_d \end{cases} \quad (3)$$

Величини параметрів  $q_{top}$  і  $q_{bot}$  пов'язані з величиною серцевого викиду за сердечний період співвідношенням

$$V_S = \int_t^{t+T_p} Q_A(\xi) d\xi = \frac{2q_{top} + q_{bot}}{3} \tau_s + q_{bot} \tau_d \quad (4)$$

Серцевий викид в нормі складає 70 - 90 мл. Величину  $q_{bot}$  в нормі будемо вважати рівною нулю, тому викид з серця здійснюється тільки в період систоли. Зміна параметрів, що входять у формули (2), (3), дозволяє задавати різні режими роботи серця.

В граничній вершині  $k_1$ , яка відповідає венозному синусу серця, можна використовувати умову (1).

У розглянутих моделях серця система кола кровообігу не є замкнутою, оскільки потік крові з шлуночка не залежить від потоку крові в передсерді і загальний обсяг крові в системі, взагалі кажучи, може не зберігатися.

#### 5.4.2. Самоузгоджена модель 2-х і 4-х камерного серця.

Розвитком розглянутих моделей є модель серця, в якій забезпечується сталість сумарного обсягу крові в системі, тобто замкнутість системи кровообігу.

Для відтворення роботи серця може бути використана самоузгоджена модель, найпростіша схема якої виглядає наступним чином. Введемо величину поточного об'єму крові в серці  $V_k$ . Об'єм  $V_k$  визначається потоками на вході і

виході з серця в залежності від часу на одному періоді серцевого циклу за формулами

$$V_k = \begin{cases} V_{KD} - \int_0^t Q_A(\tau) d\tau, & 0 < t \leq \tau_s \\ V_{KS} + \int_0^t Q_V(\tau) d\tau, & \tau_s \leq t < \tau_d + \tau_s \end{cases} \quad (5)$$

Тут  $Q_A(t)$  - потік із серця в аорту, а  $Q_V(t)$  - потік з вени (передсердя) в серце,  $V_{KD}$  і  $V_{KS}$  - скінченнодіастолічний і скінченносистолічний об'єми, відповідно. Об'єм  $V_k$  обмежується величинами  $V_{\min}$  і  $V_{\max}$ . Якщо в процесі надходження крові з передсердя в серце величина  $V_k$  починає перевищувати максимально допустиму величину  $V_{\max}$ , то діастола припиняється ( $Q_V(t) = 0$ ) і починається систола. Аналогічно, якщо в процесі викиду крові із серця в аорту поточний обсяг крові в серце  $V_k$  стає менше величини  $V_{\min}$ , то систола припиняється ( $Q_A(t) = 0$ ) і починається діастола. Таким чином, тривалості систоли і діастоли у такій моделі, взагалі кажучи, виявляються змінними.

Функція серцевого викиду  $Q_A(t)$  в (5) є заданою протягом одного циклу, наприклад, наступним чином (впливає з (3) і (4)):

$$Q_A(t) = Q(t, \tau_s, \tau_d) = \begin{cases} V_S \left(4t - \frac{3t^2}{\tau_s}\right) \frac{1}{\tau_s^2}, & 0 \leq t \leq \tau_s \\ 0, & \tau_s \leq t \leq \tau_s + \tau_d \end{cases} \quad (6)$$

Величина потоку венозної крові в серце  $Q_V(t)$  обчислюється в ході розрахунку всього кола кровообігу.

Регуляція роботи серця (а саме, серцевого викиду) в такій моделі здійснюється шляхом зміни протяжності систоли і діастоли в залежно від наповнення шлуночка серця кров'ю.

У разі необхідності формула (6) може бути доповнена залежностями, моделюючими нервові фактори або зворотні залежності від параметрів

гемодинамічного течії в системі. Наприклад, модифікацією такої моделі є модель, в якій ударний об'єм пропорційний кінечнодіастолічному об'єму крові в передсерді серця. Фракцією викиду називається величина відношення ударного об'єму до кінечнодіастолічному  $V_{KD}$ , виражена у відсотках. У нормі фракція викиду становить біля 50%. Таким чином, в модифікованій самоузгодженій моделі серця функція серцевого викиду розраховується за формулою (6), де величина  $V_S$  вибирається наступним чином  $V_S = k_{\text{fract}} V_{KD}$ , де  $k_{\text{fract}}$  заданий коефіцієнт пропорційності.

Зауважимо, що в такій моделі серця принципово можливе врахування залежностей ударного об'єму, тривалості систоли і діастоли, а також інших параметрів від різних регуляторних факторів.

Такі описи відповідають найпростішій моделі двокамерного серця і можуть бути без труднощів узагальнені на випадок чотирьохкамерного серця.

## 5.5. Математична модель нирки

Суттєву роль в механізмі регуляції артеріального тиску відіграють нирки. Регуляція нирками артеріального тиску і об'єму циркулюючої крові включає в себе декілька механізмів. Першочергове значення при цьому грає фільтраційна функція нирки. В даному випадку ми обмежимося розглядом лише фільтраційної функції нирок, яка відноситься до регуляторних механізмів тривалої дії. Принципово регуляторну функцію нирок можна описати таким чином.

Будемо вважати, що в судини черевної області надходить рідина із шлунково-кишкового тракту. Нехай  $q_v$  – об'ємна швидкість надходження цієї рідини в систему.

Позначимо  $q_{\text{НИР}}^*$  – кількість рідини, що виділяється нирками в одиницю часу (об'ємна швидкість), а  $p_{\text{НИР}}^*$  – середній тиск в нирковій артерії, що відповідає такій витраті в нормі. Таким чином,  $p_{\text{НИР}}^*$ -тиск, на підтримку якого «орієнтується» нирка. Будемо говорити, що кровоносна система знаходиться в рівноважному стані, якщо кількість надходження рідини в одиницю часу дорівнює кількості рідини, що виводиться нирками  $q_v = q_{\text{НИР}}^*$ .

Будемо вважати, що обсяг циркулюючої крові (ОЦК) в рамках даної моделі може змінюватися тільки в результаті зсуву рівноваги між надходженням рідини в кровоносну систему і виділенням рідини нирками.

Видільна функція нирок характеризується тим, що навіть дуже невелике підвищення артеріального тиску порівняно з рівноважним рівнем супроводжується істотним збільшенням виділення рідини нирками. Так при зростанні середнього тиску  $\langle p \rangle$  ниркової артерії на 1 мм.рт.ст. порівняно з рівноважним тиском ниркова екскреція підвищується на 100 %. Падіння артеріального тиску нижче рівноважного рівня супроводжується різким зменшенням виділення рідини нирками, аж до його повного припинення.

Рис.12. ілюструє характерну залежність надходження рідини і виділення рідини нирками від величини артеріального тиску. Точка А на графіку характеризує рівноважний стан системи. Товстою лінією на Рис.1. зазначено споживання рідини.

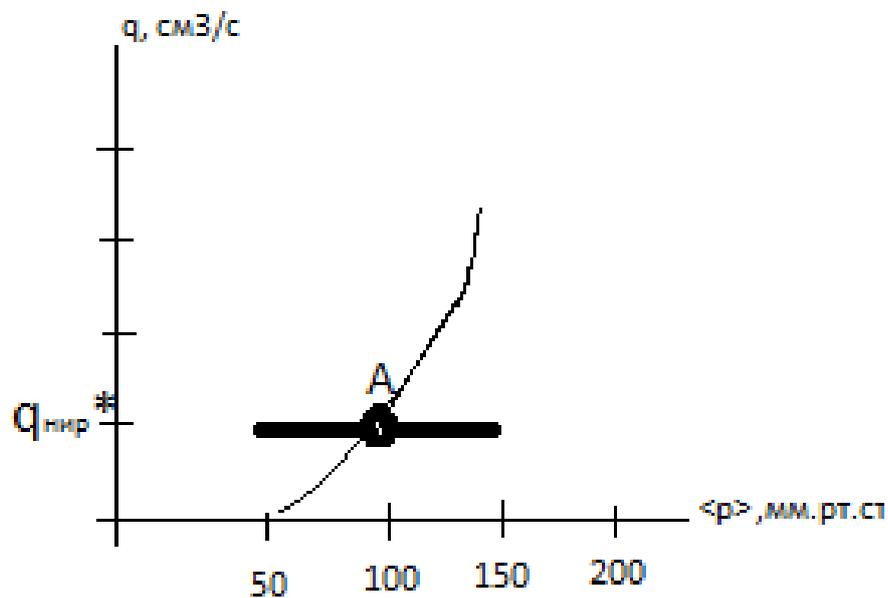


Рис. 12

В нормі надходження і виведення рідини проходить з характерною швидкістю рівною в середньому 1500 мл/добу, що становить приблизно 1 мл/хвилину або 0,017 мл/с. Таку об'ємну швидкість виділення рідини нирками, а, отже, і споживання рідини, позначимо  $q_{\text{опор}}^*$ . Середній нирковий тиск, що відповідає нормальному рівноважному стану позначатимемо  $p_{\text{опор}}^*$ .

Нагадаємо, що у вершинах розгалуження судин в якості умов сполучень використовується, зокрема, закон збереження потоку. У вершині, що відповідає нирці, і у вершині, що відповідає тонкому кишечнику, величина джерела крові  $\Delta Q$  не дорівнює нулю.

В нирці потік рідини  $\Delta Q_4 = q_v$ , де -  $q_v$  задана функція.

Рівняння для вершини, що моделює нирку, відрізняються від розглянутих вище рівнянь для вершин фільтрації крові через тканину. Нагадаємо, що  $p_{НИР}^*$  - це середній тиск, на який орієнтується нирка, а  $q_{НИР}^*$  - витрата, що відповідає такому тиску в рівноважному стані. За нормальних умов життєдіяльності організму величина  $p_{НИР}^*$  збігається з величиною  $p_{ОПОР}^*$ . Припустимо, що потік рідини  $q_{НИР}(t)$ , що виділяється в процесі роботи нирки, залежить від різниці поточного середнього значення тиску в нирковій артерії  $\langle p \rangle$  і параметра нирки  $p_{НИР}^*$ . Нехай формула для потоку рідини  $q_{НИР}$  що виділяється має вигляд:

$$q_{НИР} = q_{НИР}^* \exp(\langle p \rangle - p_{НИР}^*) \quad (1)$$

Будемо надалі величину  $(\langle p \rangle - p_{НИР}^*)$  називати надмірним тиском.

Отже, у вершині, що моделює нирку умова збереження потоку має ненульову величину

$$\Delta Q_2 = q_{НИР}$$

Якщо з деяких причин надлишковий тиск в нирковій артерії став додатним, тобто середній тиск  $\langle p \rangle$  став перевершувати тиск, характерний для нирки  $p_{НИР}^*$ . При перевищенні тиску в нирковій артерії, який нирка «вважає нормальним», тобто тиску  $p_{НИР}^*$ , потік рідини з нирки збільшується згідно різниці тисків  $\langle p \rangle$  і  $p_{НИР}^*$  за формулою (1). Нирка видаляє надлишкову (порівняно з  $q_{ОПОР}^*$ ) кількість рідини до тих пір, поки артеріальний тиск не нормалізується.

## 5.6. Формальний опис серцево-судинної системи в цілому.

### 5.6.1. Граф судин серцево-судинної системи.

Система кровообігу людини являє собою мережу еластичних судин різних типів (граф судин), по якій протікає кров, що надходить в різні органи. Параметри течії - швидкість, тиск, визначаються в кожен момент часу нагнітальною функцією серця, площею перетину судин та їх еластичними властивостями, властивостями капілярних тканин, роботою нирок і т.п. Кров нагнітається серцем в розгалужується систему артеріальній частині судин (аорта і т.д.).

Область, в якій поєднано дві або більше судини, будемо вважати точкою і назвемо вузлом розгалуження. Судини можуть з'єднуватися з тканинами або іншими органами. Після проходження тканин, кров по венозній частині судинної системи знову надходить у серце.

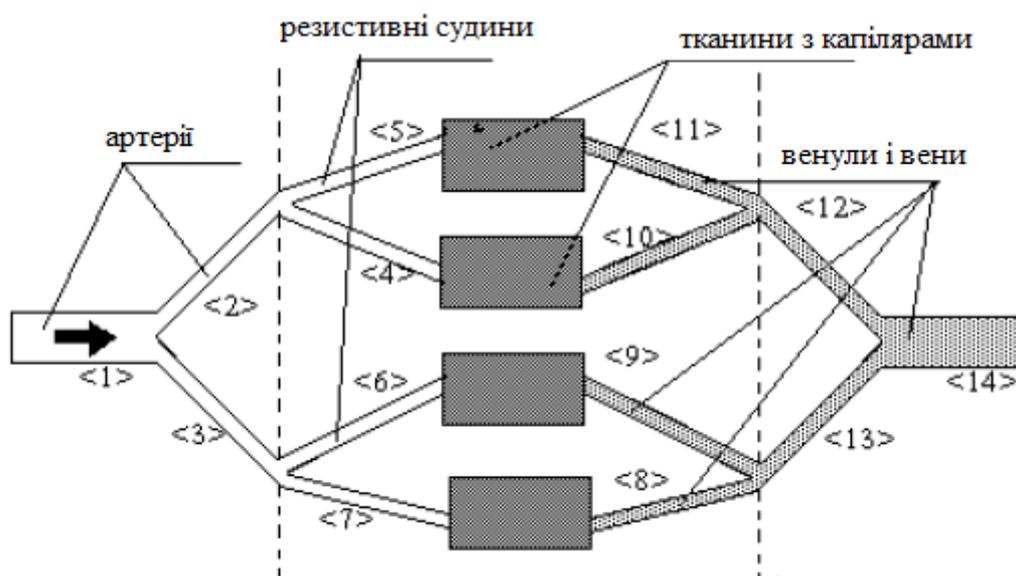


Рис.13

Така система (рис. 13) являє собою граф, ребрами якого є судини, а вершинами (вузлами) - серце, вузли розгалуження, тканини. При цьому, принаймні, дві вершини нерівноправні (умовно назвемо їх "виходом" з серця і "входом" у серце) і які можна було б вважати, відповідно, початкової та кінцевої

вершинами графа. Однак, для більшої спільності та універсальності, будемо припускати, що граф містить довільну кількість вершин «входу» і «виходу» (назвемо їх граничними вершинами), а також містити будь-яку кількість ізольованих підграфів. Пронумеруємо вершини графа довільним чином, і також довільно пронумеруємо ребра графа. Будемо вважати ребра направленими: напрям ребра визначають номери вершин, які його обмежують (від номера меншого до номера більшого). Граф будемо вважати повністю заданим, якщо задані:

- Кількість і нумерація вершин;
- Кількість і нумерація ребер;
- Номери вершин, які є початком і кінцем кожного ребра;
- Номери ребер, що з'єднуються в кожній вершині;
- Граничні вершини графа.

### **5.6.2. Граф великого кола кровообігу.**

Для магістральних судин, як правило, відомі характерні довжини, діаметри, усереднені об'ємні швидкості кровотоку і деякі інші параметри, необхідні для розрахунку. Ці відомості частково утримуються в медичній літературі. Індивідуально для кожної людини ці величини можуть бути уточнені за допомогою сучасних неінвазивних методів діагностики. При завданні початкових об'ємних швидкостей кровотоку на кожному ребрі графа, необхідно стежити за виконанням закону збереження в вершинах розгалуження.

Для більшості судин наведеного графа використовувалося найпростіше рівняння стану, в яке, в якості параметрів, входять величини, які характеризують конкретну судину  $S_{max}$ ,  $S_{min}$ ,  $P_{max}$ ,  $P_{min}$ . Важливу роль у гемодинаміці судини грає його еластичність, тобто величина, що характеризує зміну площі поперечного перерізу судини у відповідь на зміну тиску. Коефіцієнт еластичності для кожної судини описується величиною  $\theta = \frac{S_{max} - S_{min}}{P_{max} - P_{min}}$ .

Всі використовувані в розрахунках початкові дані повинні задовольняти умові дозвукової течії, тобто  $|u| \ll c$ , де  $c$  - швидкість поширення малих збурень.

**Резистивні судини.** У кровоносній системі важливу роль відіграють прикапілярні судини. У кінцевих розгалуженнях артерій (артеріолах) тиск різко падає на невеликому за протяжністю ділянці судинної мережі, досягаючи 30 - 35 мл.рт.ст. в кінці артеріол. Це пов'язано з високим гідродинамічним опором даних судин. У розглянутому графі джгути таких прекапілярних судин моделюються одною ефективною посудиною - резистивом. Площа поперечного перерізу для резистивних судин розраховується виходячи з припущення, що потоком в таких судинах є течією Пуазейля. Для резистивних судин характерно не тільки високу гідродинамічний опір, але і мала місткість.

### 5.6.3. Граф замкнутої серцево-судинної системи.

У розглянутому графі джгути прекапілярних судин моделюються однією ефективною судиною. Резистивних судин - артеріол, типових для великого кола, в легеневому колі кровообігу немає. Ще одну групу модельних судин представляють ємнісні вени. У відсутності ємнісних вен в графі, загальний обсяг крові, взятий у великих магістральних судинах не досягає нормальних 2000 мл. Тому, для коректного опису венозної системи джгути венул і дрібних вен моделювалися окремими ребрами, що містять велику кількість крові.

У граничних вершинах використовується модель серця, що складається з чотирьох вершин (модель чотирьохкамерного серця). Відповідно до описаної раніше моделі, в основу були покладені параметри: максимальний обсяг шлуночка, мінімальний обсяг шлуночка, початковий обсяг, серцевий викид, період роботи серця, тривалість систоли, тиск у передсерді. У нормі ударний об'єм становить 70 - 90 мл, обсяг серцевого викиду для кожного з шлуночків покладался рівним 80 мл. Якщо під час систоли обсяг шлуночка стає менше мінімально допустимого значення, то систола припиняється і починається діастола - період накопичення. Величини потоку крові з шлуночків відповідають :

$$q(V_i, \tau_s, \tau_d) = \begin{cases} V_i * \left( 4 * t - 3 * \frac{t^2}{\tau_s} \right) * \frac{1}{\tau_s^2} , & 0 \leq t \leq \tau_s \\ 0 , & \tau_s < t \leq \tau_d \end{cases}$$

Тут  $V_i$  - серцевий викид шлуночка (лівого при  $i = 0$ , правого при  $i = 1$ ),  $\tau_s$  - час систоли, яке в більшості розрахунків становить 0,3 сек., а  $\tau_d$  - період одного

серцевого скорочення, рівний 0,8 сек. Таким чином, час діастоли становить 0,5 сек. Зазначимо, що серцевий викид покладался однаковим для правого і лівого шлуночка. Початковий задається обсяг шлуночків склав 140 мл. , максимально можливі значення обсягів шлуночків покладалися рівними між собою і склали 150 мл. Шлуночки не спустошуються повністю, в них залишається якийсь не витрачений обсяг, величина якого становить 50 мл для правого і лівого шлуночка. У граничних вершинах, які відповідає предсердиям, задається постійний тиск, рівний 5 мм.рт.ст.

#### **5.6.4. Граф судин головного мозку.**

Для моделювання процесів гемодинаміки в складно організованій системі кровопостачання головного мозку, що включає в себе численні анастомози з артеріями різних басейнів, необхідний досить докладний опис судинної топології. Кров у систему надходить із серця, проходить через судини артеріального русла, тканини, збирається в судинах венозного русла і надходить назад у серце .

Власне кровопостачання мозку здійснюється двома парами магістральних артерій голови: за внутрішніми сонними артеріями (ВСА) і по хребетних артеріях (ХА). Причому 2/3 всієї кількості крові, притікає до мозку, доставляється по ВСА і 1/3 надходить по ХА. Перші утворюють каротидну, другі - вертебро-базилярну систему кровопостачання головного мозку. Описана конфігурація графа відповідає уявленню про правильно сформованих церебральних судинах. Але часто зустрічаються їх аномалії. До них відносяться:

Аплазія - відсутність артерії;

Гіпоплазія - зменшення діаметра артерії.

Залежно від стану артерій, Віллізієве коло може бути роз'єднане по передньому (аплазія ПСА) або задньому відділам (аплазія ЗСА), що значно впливає на характер колатерального кровообігу.

#### **5.6.5. Система кіркових анастомозів.**

Для адекватного опису цереброваскулярної системи в нормі, і особливо при патології, необхідно враховувати основні шляхи колатерального кровопостачання. Крім описаних раніше природних колатералей, істотними

шляхами колатерального кровообігу є коркові анастомози між кінцевими гілками передньої, середньої і задньої мозкових артерій.

### 5.6.6. Рівняння гемодинаміки на графі серцево-судинної системи.

Випишемо рівняння гемодинаміки на довільному ребрі з номером сполучає вершини з номерами  $n_{b,i}$  і  $n_{e,i}$ ,  $n_{b,i} < n_{e,i}$ .

Довжина ребра  $l_i$  і просторова змінна спрямована вздовж осі судини від вершини з меншим номером до вершини з великим номером. Тобто точка  $x = 0$  відповідає вершині  $n_{b,i}$ , а точка  $x = l_i$  відповідає вершині з номером  $n_{e,i}$ .

У кожній точці  $x$  визначені швидкість крові  $u_i(x, t)$ , тиск  $p_i(x, t)$  і рівняння стану

$$S_i(x) = S_i(p_i(x, t)), \text{ яке задовольняє рівнянням гемодинаміки : } \frac{\partial S_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i S_i}{\partial x} = 0,$$

$$0 < x < l_i, t > 0, \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{F_i}{\rho}$$

(1)

$$S_i(x) = S_i(p_i(x, t))$$

Кожному ребру графа (судині) необхідно співставити його рівняння стану (бути може, різні в залежності від типу судини) і параметри судини. Кожній вершині співставляється відповідний тип (вершина розгалуження, тканина, орган тощо), відповідна їй математична модель і її параметри. Як зазначено вище, потік крові в серцево-судинній системі є принципово дозвуким. Надалі ми будемо розглядати саме таку ситуацію, вважаючи

$$|u_i(x, t)| < c_i = \sqrt{\frac{S_i}{(S'_p)_i \rho}}$$

З урахуванням цієї обставини, система рівнянь (1) має гіперболічний тип і повинна супроводжуватися на кожному ребрі двома крайовими умовами, заданими по одному на кожному кінці відрізка по осі  $x$ .

Так як кінцями ребра є вершини, які можуть мати різний тип і сенс, то й умови на краях ребер можуть бути різноманітними. Граничні вершини графа мають сенс входу або виходу з системи судин. У разі, коли граф являє собою фрагмент серцево-судинної системи, в граничних вершинах (їх може бути декілька) можуть бути задані відомі функції тиску (площі перерізу) або швидкості (потіку) -

крайові умови першого роду. Для однорідної запису граничних умов на кінцях ребра графа, введемо допоміжну величину -  $z_{k,i}$ , яка співставляється k-ій вершині i-го ребра. Ця величина показує, чи є дане ребро «вихідним» з вершини k або «вхідним» в цю вершину, тобто якщо номери вершини  $n_{b,i} < n_{e,i}$ . то

$z_{n_{b,i}} = 1$ , якщо  $n_{b,i} < n_{e,i}$ ,

$z_{n_{e,i}} = -1$ , якщо  $n_{b,i} > n_{e,i}$ .

По суті гранична умова в граничній вершині являє собою модель процесу, зіставленого цій вершині.

## 5.7. Течія в трубках з еластичними стінками.

Задача математичного моделювання внутрішнього руху рідини по системі еластичних трубок має велику область наукового та практичного застосування, у тому числі містить і моделювання течії крові по серцево-судинній системі.

### 5.7.1. Закон Гука для еластичного трубопроводу.

Для отримання замкненої системи рівнянь гідромеханіки необхідно задати зв'язок між деформацією еластичної трубки і надлишковим тиском всередині неї.

В простому випадку невеликих деформацій цей зв'язок виражається законом Гука.

У випадку відносно невеликих швидкостей потоку і зміни площі перетину трубки можна використовувати формулу зв'язку надлишкового тиску і площі перерізу трубки у вигляді:

$$P_T = c \frac{\Delta S}{S_0} \quad (1)$$

Де  $\Delta S = S - S_0$

$S$  – площа перетину трубки в даному місці

$S_0$  – площа перетину трубки при нульовому надлишковому тиску  $P_T$

$c$  – еластичність стінок трубки

Із теорії тонких оболонок слідує, що  $c = \frac{Eh}{d}$ , де  $E$ - ефективний модуль пружності стінки трубки,  $h$ - її товщина,  $d$ - середній діаметр трубки.

У випадку більш значних змін площі перетину можна використовувати закон Гука у вигляді:

$$dP_T = c \frac{dS}{S} \quad (2)$$

Тут зберігається лінійний зв'язок зміни надлишкового тиску від відносної деформації площі перетину трубки, але залежність площі від надлишкового тиску носить нелінійний характер:

$$S = S_0 \exp\left(\frac{P_T}{c}\right) \quad (3)$$

В першому випадку розложена в ряд формула (1.3) переходить в (1.1)

Якщо швидкість зміни площі перетину трубки досить велика, то в закон Гука мають входити параметри, які характеризують рух рідини по еластичній трубці.

У цьому випадку закон Гука можна записати у вигляді:

$$P_T = c \frac{\Delta(dv)}{dv} \quad (4)$$

Де  $dv = Sdx$  – елемент об'єма трубки.

Якщо рідина нерухома, то  $dv = Sdl$ , де  $dl$  – незмінна довжина частини трубки.

Тоді формула (4) переходить у формулу (2). Якщо ж рідина рухається, то перетворення носить більш складний характер

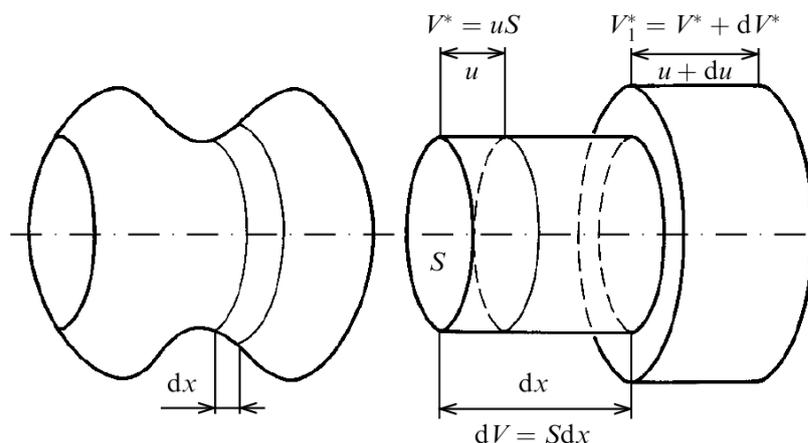


Рис. 14

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dv)}{dv} = \frac{v_1^* - v^*}{dv} = \left( v^* + \frac{dv^*}{dv} dv - v^* \right) \frac{1}{dv} = \frac{dv^*}{dv} = \frac{\partial(uS)}{S \partial x} \quad (5)$$

Де  $\varepsilon$  – відносна деформація елемента об'єма трубки  $dv$  в процесі зміщення рідини вздовж неї на відстань  $u$ , а  $v_1^* - v^*$  – зміна елемента об'єма трубки при цьому (рис. 14).

При  $S = const$  формула (5) переходить у звичайний вираз для відносної деформації в твердому тілі:  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

Якщо в еластичній трубці виникли високочастотні автоколивання стінки і потоку то на усереднений рух рідини із швидкістю  $v_k$ , і сумарна швидкість дорівнює:

$$v = v_0 + v_k \quad (6)$$

$u$  – зміщення елемента об'єму рідини в процесі повздовжніх коливань відносно точки, яка рухається зі швидкістю  $v_k$ , і сумарна швидкість дорівнює:

$$P_T = c \frac{\partial(uc)}{s \partial x} \quad (7)$$

Формули (1 - 4) і (7) зв'язують надлишковий тиск з геометрією трубки. Але якщо записується рівняння коливань, то необхідно використовувати зв'язок між реакцією стінки еластичної трубки і її геометрією. Реакція стінки трубки  $P$  – сила, що діє із сторони одиниці площі внутрішньої поверхні трубки на рідину. Так як  $P = -P_T$ , то у формулах (1-4) і (7) потрібно врахувати знак мінус.

### 5.7.2. Автоколивальний режим течії в еластичній трубці.

Для виконання флатерного режиму течії зовсім необов'язково наявність хвиль тиску. Він може з'явитися і при незмінній витраті в еластичній трубці, тобто коли перепад тиску по довжині трубки постійний. Рух рідини по еластичній трубці принципово нестійкий процес.

Будь яке випадкове збільшення швидкості рідини викликає у відповідності з «ефектом Бернуллі» зниження статичного тиску в ній. Це приводить до зменшення площі перерізу трубки, що ще більше збільшує швидкість потоку, але необхідність прокачування певного об'єму рідини розкриває трубку. Виникають автоколивання по типу нескінченності «потік-стінка». Процес не пов'язаний з в'язкістю рідини, тому будемо розглядати виникнення автоколивального режиму течії в ідеальній рідині, а вплив в'язкості будемо враховувати в подальшому.

Виведемо рівняння імпульсу для процесу який розглядаємо.

Зміна площі поперечного перерізу трубки на півхвилі коливань, що виникли, складається з двох частин: дифузорна та конфузорна.

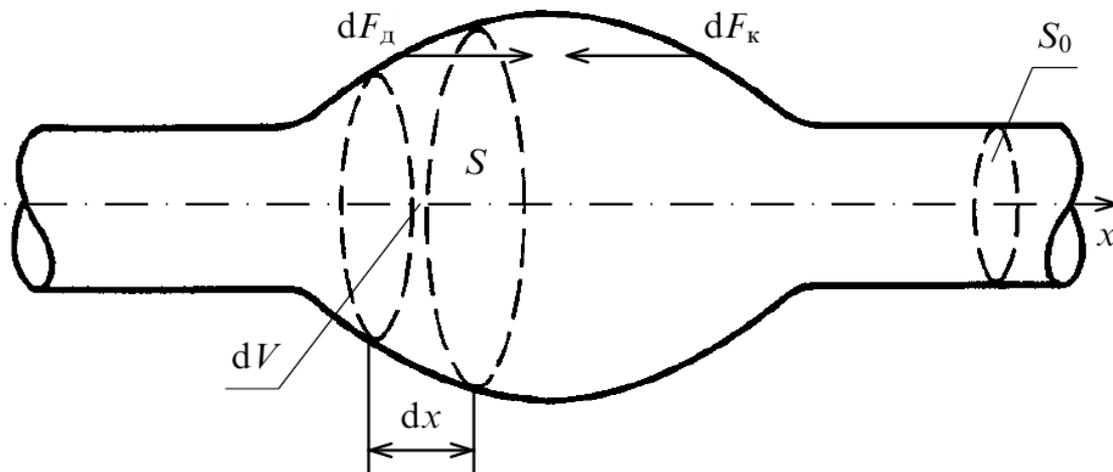


Рис. 15

Схема повздовжніх сил, які діють на елемент об'єма зі сторони дифузорної та конфузорної частин стінок трубки наведена на рис. 15.

Другий закон Ньютона в проекції на вісь  $x$  на елемент об'єму рідини можна записати у вигляді:

$$dF_D + N - (N + dN) - dF_k = \rho dv \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Де  $dF_D = dF_k = Pds$  – повздовжні складові сил, що діють на елемент об'єма  $dv$ , із сторони дифузорної та конфузорної частин стінок трубки (згідно з 3-м законом Ньютона вони рівні між собою).

$N = PS$  – поздовжня складова сил тиску, яка забезпечує рух рідини,  $\rho$  – густина.

Сила  $F_D$  урівноважується силою  $F_k$ , яка діє із сторони конфузорної частини.

Якщо  $dF_k = 0$  (дифузор відкритий): (1) =>

$$-\frac{dP}{dx} = \rho \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

Такий же вигляд має рівняння імпульсу при  $S = const$ , але у випадку існування дифузорної частин симетричної геометрії рівняння імпульсу (1) приймає вигляд:

$$-\frac{d(PS)}{Sdx} = \rho \frac{dv}{dt} \quad (3^*)$$

Підставляючи в (3\*) закон Гука (7) з урахуванням знаку, а також використовуючи (6) і враховуючи, що  $\frac{dv_0}{dt} = 0$  будемо мати:

$$c \frac{\partial^2(us)}{\partial x^2} = \rho \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \quad (4)$$

Швидкість розповсюдження автоколивань по трубопроводу знаходиться як:

$$a = \sqrt{\frac{c}{\rho}} = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}} \quad (5)$$

Використовуючи те, що  $v_k = \frac{du}{dt}$ , а також (5):

$$a \frac{\partial^2(us)}{\partial x^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6)$$

(6) – двопараметричне хвильове рівняння.

Друге рівняння, яке пов'язує невідомі величини  $u$  і  $S$  – це рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(v_k)}{\partial x} = 0 \quad (7^*)$$

Будемо шукати розв'язок системи рівнянь (6) і (7) методом розділення змінних Фур'є.

Нехай

$$u = F_1(x)\Phi_1(t); S = F_2(x)\Phi_2(t)$$

$$u = F_1(x)F_2(x)\Phi_1(t)\Phi_2(t) = F(x)\Phi(t) \quad (8)$$

(8)→(6) і скорочуючи на  $\Phi_2(t)$  розділимо змінні:

$$\frac{1}{\Phi_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\omega^2 = const \quad (9)$$

Маємо два рівняння:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \omega^2 \Phi_1 = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 F = 0 \quad (10)$$

Розв'язок яких має вигляд:

$$\Phi_1(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (11)$$

$$F(x) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{a}x + \varphi_1\right) \quad (12)$$

Де  $\omega$  – циклічна частота автоколивань,  $A_i, \varphi_i$  – сталі інтегрування.

Із (7), враховуючи, що  $v_k = \frac{\partial u}{\partial t}$  маємо:

$$F_2 \frac{d\Phi_2}{dt} + \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dt} \frac{dF}{dx} = 0 \quad (13)$$

Розпадається на два рівняння:

$$\frac{1}{F_2} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{\Phi_2} \frac{d\Phi_2}{d\Phi_1} = \theta \quad (14)$$

Де  $\theta$  – стала

Розв'язок яких з урахуванням (12) мають вигляд:

$$\Phi_2 = A_2 \exp(-\theta \Phi_1)$$

$$F_2 = \frac{A_1 \omega}{\theta a} \cos\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \quad (15)$$

$F_1$  знаходиться з умови:

$$F_1 = \frac{F}{F_2} = \frac{a\theta}{\omega} \tan\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \quad (16)$$

Система функцій (11), (15), (16) дозволяє отримати розв'язок рівнянь (6), (7):

$$S = F_2 \Phi_2 = \frac{A_1 A_2 \omega}{\theta a} \left| \cos\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \right| \exp[-\theta A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)] \quad (17)$$

$$u = F_1 \Phi_1 = \frac{a\theta A_0}{\omega} \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \right| \sin \omega t + \varphi_0 \quad (18)$$

Знайдемо швидкість рідини і тиск в ній:

$$v = v_0 + \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 + a\theta A_0 \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x + \varphi_1\right) \right| \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (19)$$

Тиск знайдемо, виходячи співвідношення (7):

$$P_T = c \frac{\partial(us)}{\partial x} = c \frac{\partial(F\Phi)}{F_2 \Phi_2 \partial x} = c\theta \Phi_1$$

$$P_T = c\theta A_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (20)$$

Позначимо  $\varepsilon_{max}$  – максимальне відносна деформація і враховуючи, що  $P_{Tmax} = c\varepsilon_{max}$  то із (20)  $\Rightarrow \varepsilon_{max} = \theta A_0$

Задамо наступні граничні умови, виходячи із моделі вимірювання артеріального тиску по методу Короткова:

При  $x = 0$  маємо  $S = S_0$ ,  $u = u_0 = 0$ ,  $v = v_0$

Де  $S_0, u_0, v_0$  - площа перерізу, переміщення і швидкість рідини.

Із (19)  $\Rightarrow \varphi_1 = 0$

Приймаючи до уваги початкові умови:

$$u|_{t=0} = u_0 = 0$$

$$S|_{t=0} = S_0$$

Із (18) будемо мати  $\varphi_0 = 0$ , а з (17) –  $\frac{A_1 A_2 \omega}{\theta a} = S_0$

Кінцевий розв'язок системи рівнянь (6, 7) при даних початкових і граничних умов має вигляд:

$$u = \varepsilon_{max} \frac{a}{\omega} \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x\right) \right| \sin(\omega t)$$

$$v = v_0 + a \varepsilon_{max} \left| \tan\left(\frac{\omega}{a} x\right) \right| \cos(\omega t)$$

$$S = S_0 \left| \cos\left(\frac{\omega}{a} x\right) \right| \exp(-\varepsilon_{max}) \sin(\omega t)$$

$$P_T = c \varepsilon_{max} \sin(\omega t) \quad (21)$$

Побудуємо графіки зміни площі перерізу еластичної трубки і швидкості рідини в ній в залежності від її довжини в момент часу, який відповідає  $\sin(\omega t) = 1$ , при  $t = 2k\pi/\omega$ ,  $k = 0, 1, 2 \dots$  Графіки побудовані відповідно формул (21)

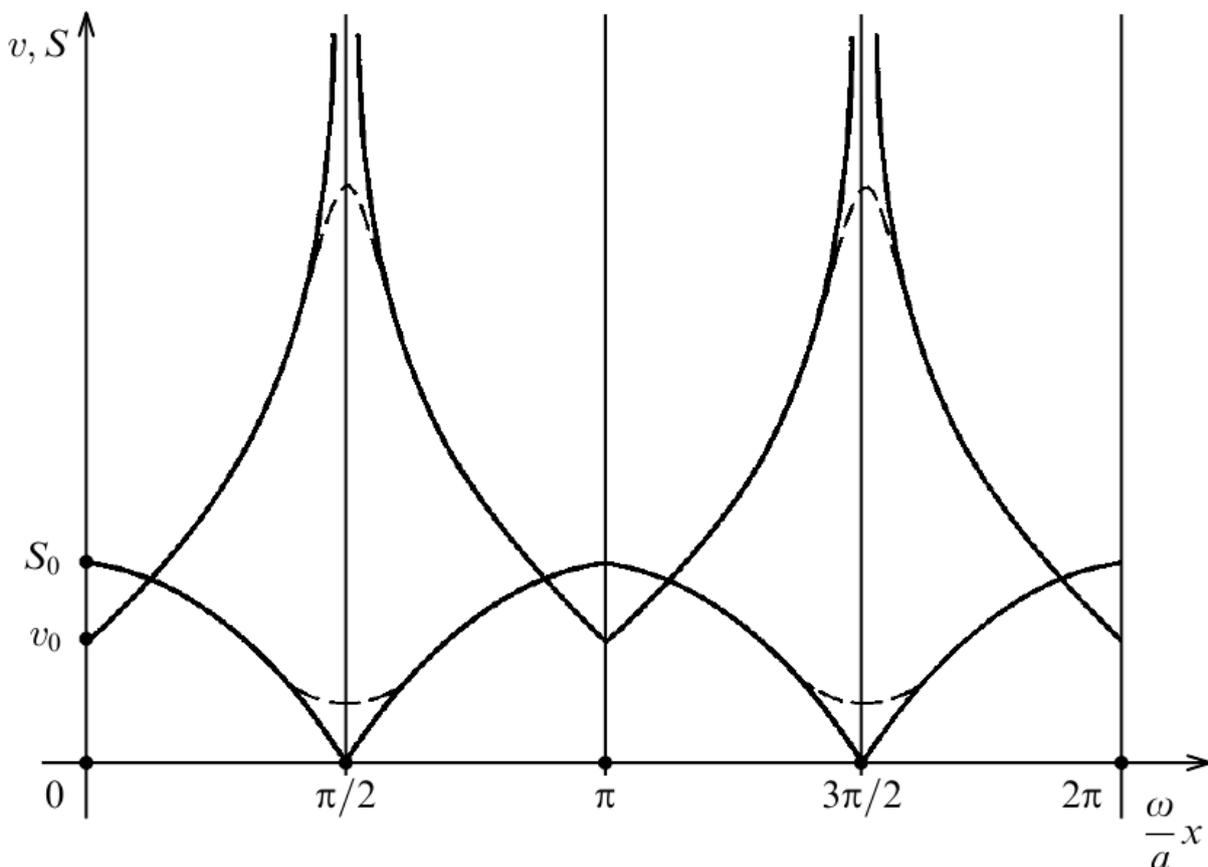


Рис. 16

Із рис.16 видно, що в момент часу схлопування трубки, там, де  $S = 0$  швидкість рідини зростає до нескінченності. Це пов'язано з тим, що формули для швидкості і площі відносяться до нев'язкої рідини.

Штриховими лініями показаний реальний хід кривих з урахуванням в'язкості рідини.

Визначимо можливі частоти авто коливань при вимірюванні артеріального тиску по методу Короткова. Нехай довжина манжетки сфігмометра =  $l$ . Тоді при  $x = l$  в будь-який момент часу  $v = v_0$ . Із (21)  $\Rightarrow \frac{\omega l}{a} = \pi k, k = 0, 1, 2 \dots$

Частота автоколивань буде наступною:

$$\vartheta = \frac{ka}{l} \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}} \quad (22)$$

Отриманий вираз дає можливість знайти ефективний модуль пружності стінки судини в живій системі шляхом вимірювання частоти тонів Короткова.

### 5.7.3. Відокремлені хвилі в еластичній трубці на основі моделі Кортвега де Фриза.

Розглянемо процес розповсюдження відокремленої хвилі на моделі тонкостінної еластичної трубки при моментальній ежекції в неї об'єму рідини.

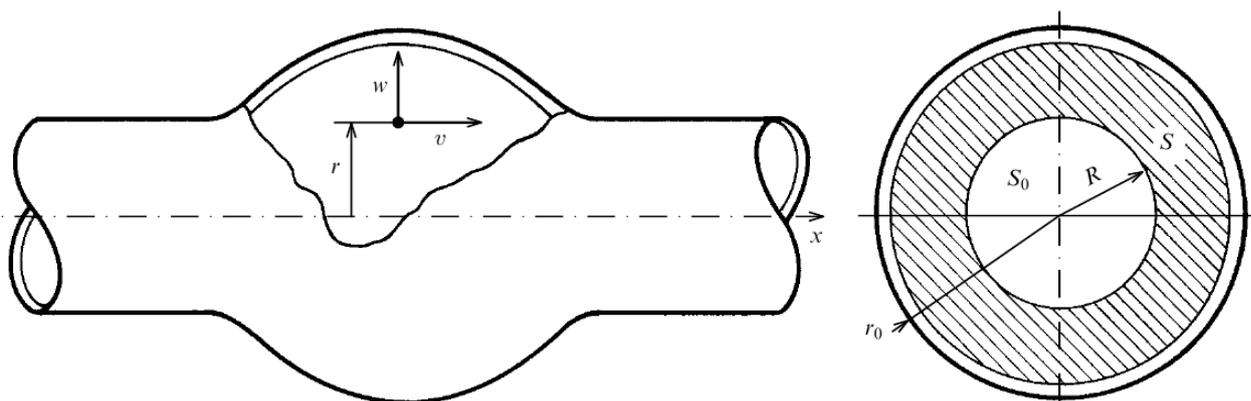
Рівняння нерозривності потоку в осесиметричній геометрії для цього випадку можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial w_r}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

Де  $v$  – поздовжня;

$w$  – поперечна складова швидкості рідини;

$x, r$  – поздовжня і радіальна координати (рис. 17).



Рівняння імпульсу запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{\rho(S_0+S)} \frac{\partial(P(S_0+S))}{\partial x} \quad (2)$$

Розв'язок системи (1, 2) будемо шукати, використовуючи потенціал швидкостей:

$$\varphi = \varphi(x, r, t):$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (3)$$

Введемо безрозмірні змінні:

$$x = M_x x^*, \quad r = M_r r^*, \quad S = M_S S^*, \\ \varphi = M_\varphi \varphi^*, \quad t = M_t t^*, \quad v = M_v v^*.$$

$$P = M_P P^* \quad (4)$$

Нехай

$$S_{\max}/S = \varepsilon,$$

Вважаємо амплітуду відокремленої хвилі набагато менше її діаметра:

$$M_S = \varepsilon S_0 = S_{\max}, \quad M_x = \sqrt{\frac{S_0}{\varepsilon}}, \quad M_r = \sqrt{S_0}.$$

Розкладемо потенціал швидкостей в ряд по степеням  $r^*$ :

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} r^{*n} \varphi_n^*(x^*, t^*). \quad (5)$$

(5)  $\rightarrow$  (1), враховуючи (3), (4) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $r^*$  маємо:

$$\varphi_{n+2}^* = - \frac{\varepsilon}{(n+2)^2} \frac{\partial^2 \varphi_n^*}{\partial x^{*2}}. \quad (6)$$

Із умови симетрії моделі течії при  $r^* = 0$  на осі потоку маємо  $w = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial r^*} = 0$ .

Використовуючи (5) маємо  $\varphi_1^* = 0$ , а також враховуючи (6) знайдемо  $\varphi_{2n+1}^* = 0$ . Крім того, якщо  $\varphi_0^*$  - безрозмірний потенціал швидкості на осі потоку, то

$$\varphi^* = \varphi_0^* - r^{*2} \frac{\varepsilon}{2^2} \frac{\partial^2 \varphi_0^*}{\partial x^{*2}} + r^{*4} \frac{\varepsilon^2}{2^2 \cdot 4^2} \frac{\partial^4 \varphi_0^*}{\partial x^{*4}} - \dots \quad (7)$$

Знайдемо розклад рівняння імпульсу (2) в безрозмірній формі. Для цього виберемо масштаби із формул:

$$\frac{M_\varphi M_t}{S_0} = \frac{M_P M_t}{\rho M_\varphi} = 1. \quad (8)$$

Вводячи в розгляд безрозмірну швидкість на осі потоку  $v_0^* = \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial x^*}$ ,

Використовуючи (7) і нехтуючи доданками порядку  $\varepsilon^2$  і вищих будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left[ S^* \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{v_0^{*2}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial P^* S^*}{\partial x^*} - \frac{r^{*2}}{2^2} \frac{\partial^3 v_0^*}{\partial t^* \partial x^{*2}} \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9)$$

При виведенні рівняння (9) враховано, що

$$v^2 + w^2 = \frac{M_\varphi^2}{S_0} \left[ \varepsilon \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] = \frac{M_\varphi^2}{S_0} \varepsilon \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)^2,$$

Для коректного описання процесу розповсюдження відокремленої пульсової хвилі необхідно ввести «повільний час»:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{8\pi} t^*,$$

Коефіцієнт  $\frac{1}{8\pi}$  взятий для комфорту в подальших перетвореннях.

Враховуючи, що  $v_0^* = v_0^*(t^*, \tau)$  замість  $\frac{\partial v_0^*}{\partial t^*}$  маємо:

$$\frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau},$$

(9) =>

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left[ \frac{1}{8\pi} \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau} + S^* \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + v_0^* \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} + \right. \\ \left. + \frac{\partial P^* S^*}{\partial x^*} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 v_0^*}{\partial t^* \partial x^{*2}} \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Також маємо записати зв'язок між надлишковим тиском трубки і її площею перерізу:

$$P = C \frac{S}{S_0}. \quad (11)$$

В безрозмірній формі закон Гука має вигляд:

$$P^* = \frac{CM_S}{S_0 M_P} S^* = \frac{C\varepsilon}{M_P} S^* = S^*. \quad (12)$$

В (12) масштаб тиску вибраний у вигляді  $M_P = C\varepsilon$ , підставляючи цей вираз в (10) знайдемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial S^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left[ \frac{1}{8\pi} \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau} + v_0^* \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} + S^* \left( \frac{\partial v_0^*}{\partial t^*} + 2 \frac{\partial S^*}{\partial x^*} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 v_0^*}{\partial t^* \partial x^{*2}} \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) можна розділити змінні, вводячи нові незалежні змінні:

$$r_- = x^* - t^*, \quad l_+ = x^* + t^*. \quad (14)$$

Будемо шукати розв'язок (13) у вигляді:

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{3}{4\pi} [f(r_-; \tau) + g(l_+; \tau)], \\ v_0^* &= \frac{3}{4\pi} [f(r_-; \tau) - g(l_+; \tau)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставляючи (14), (15) в (13) будемо мати:

$$\varepsilon \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r_-} + \frac{\partial^3 f}{\partial r_-^3} \right) + \left( -\frac{\partial g}{\partial \tau} + 6g \frac{\partial g}{\partial l_+} + \frac{\partial^3 g}{\partial l_+^3} \right) \right] = O(\varepsilon^2). \quad (16)$$

(16) представляє собою фактично суму двох незалежних рівнянь Кортевега де Фриза. Правий доданок описує відокремлену хвилю, яка поширюється в право, а другий в ліво. Ці хвилі просторово розділені і не впливають один на одного.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r_-} + \frac{\partial^3 f}{\partial r_-^3} &= 0, \\ -\frac{\partial g}{\partial \tau} + 6g \frac{\partial g}{\partial l_+} + \frac{\partial^3 g}{\partial l_+^3} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'язок рівняння (17) має вигляд:

$$f = \frac{2k^{*2}}{\cosh^2 [k^*(r_- - 4k^{*2} \tau - r_{-0})]}, \quad (18)$$

Перейдемо до змінних  $x^*, t^*$  маємо:

$$f = \frac{2k^{*2}}{\cosh^2 [k^*(x^* - t^* - k^{*2} \varepsilon t^*/2\pi - r_{-0})]}. \quad (19)$$

Розв'язок (19) згідно формулам (15) справедливий як для  $v_0$  так і для  $s^*$ ,

Розглянемо відокремлену хвилю площею  $s^*$ .

Безрозмірна амплітуда хвилі знаходиться як:

$$2k^{*2} = f_{\max} = \frac{4\pi}{3} S_{\max}^* = \frac{4\pi}{3} \frac{S_{\max}}{M_S} = \frac{4\pi}{3} \quad (20)$$

Сумарна площа перерізу відокремленої хвилі дорівнює:

$$\begin{aligned} S_s &= S_0 + S = S_0 + \\ &+ S_{\max} \left\{ \cosh \left[ \sqrt{\frac{2\pi S_{\max}}{3S_0^2}} \left( x - x_0 - a \left( 1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right) t \right) \right] \right\}^{-2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$a = M_x / M_t.$$

Із (21) => хвиля рухається зі швидкістю:

$$a_s = a \left( 1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right). \quad (22)$$

Розглянемо відокремлену хвилю швидкості . Амплітуда хвилі записується як:

$$2k^*2 = f_{\max} = \frac{4\pi}{3} v_{0\max}^* = \frac{4\pi}{3} \frac{v_{0\max}}{M_v},$$

$$v_0 = v_{0\max} \left\{ \cosh \left[ \sqrt{\frac{2\pi S_{\max}}{3S_0^2}} \left( x - x_0 - a \left( 1 + \frac{S_{\max}}{3S_0} \right) t \right) \right] \right\}^{-2}. \quad (23)$$

Враховуючи (3) маємо:

$$v^* = v_0^* - r^{*2} \frac{\varepsilon}{2^2} \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial x^{*2}}. \quad (24)$$

Перейшовши до розмірних змінних, маємо:

$$v = v_0 - \frac{r_0^2}{4} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}.$$

Обрахуємо додатковий об'єм рідини, яку вбирає в себе відокремлена хвиля, приймаючи  $x_0 = 0$  за початок координат (рис. 18).

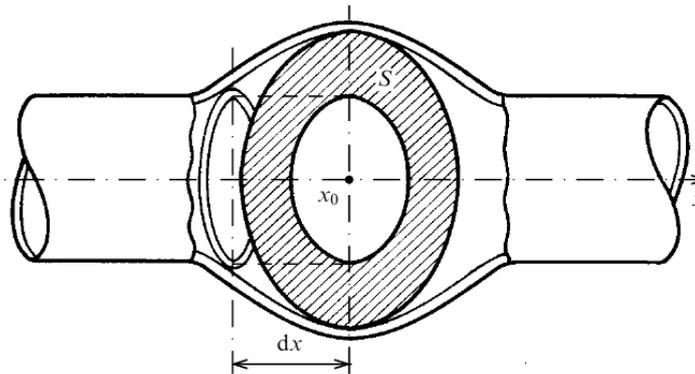


Рис. 18

Інтегруючи (21) при  $t=0$  маємо:

$$V_{\text{уд}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{S_{\max}}{\cosh^2(kx)} dx = \frac{2S_{\max}}{k} \tanh(kx) \Big|_0^{\infty} = \frac{2S_{\max}}{k}.$$

Таким чином форма відокремленої хвилі має вигляд:

$$S_s = S_0 + \frac{S_{\max}}{\cosh^2[2(S_{\max}/V_{\text{уд}})(x - a_s t)]} . \quad (25)$$

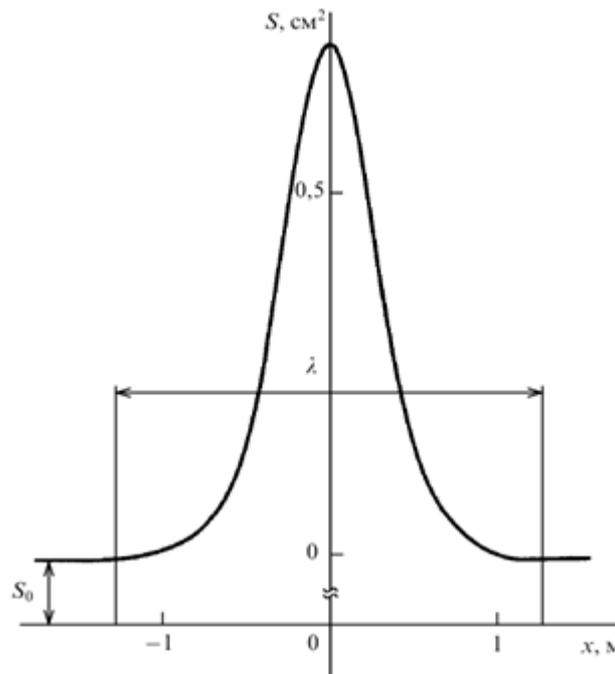


Рис. 19

Рис. 19 характеризує зміну площі перерізу еластичної трубки по її довжині при розгляді відокремленої хвилі.

Довжину відокремленої хвилі, для артерії – пульсуючої хвилі, знайдемо із умови:

$$k = 2S_{\max}/V_{\text{уд}} = 2\pi/\lambda.$$

=>

$$\lambda = \pi V_{\text{уд}}/S_{\max}.$$

Згідно (11) вираз для хвилі тиску буде мати вигляд:

$$P = \frac{P_{\max}}{\cosh^2[2(S_{\max}/V_{\text{уд}})(x - a_s t)]} , \quad (26)$$

Знайдемо кінцеву швидкість розповсюдження хвилі тиску. Із (8) використовуючи те, що

$$M_P = C\varepsilon,$$

будемо мати

$$\bar{M}_\varphi = \sqrt{C\varepsilon S_0/\rho}.$$

Крім того, із (8) випливає те, що

$$M_t = S_0/\bar{M}_\varphi = \sqrt{\rho S_0/(C\varepsilon)}.$$

Враховуючи, що

$$a = \frac{M_x}{M_t} = \frac{\sqrt{S_0/\varepsilon}}{\sqrt{\rho S_0/(C\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{C}{\rho}},$$

Із (22) знаходимо:

$$a_s = \sqrt{\frac{C}{\rho}} \left(1 + \frac{S_{\max}}{3S_0}\right) = \sqrt{\frac{C}{\rho}} \left(1 + \frac{P_{\max}}{3C}\right). \quad (27)$$

Знайдемо дисперсійне співвідношення для відокремленої хвилі. Виходячи з означення групової швидкості:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = a_s = a \left(1 + \frac{S_{\max}}{3S_0}\right),$$

Де  $\omega$  - циклічна частота. Маючи на увазі, що хвильове число

$k = (2\pi S_{\max}/3S_0^2)^2$ , і враховуючи, що  $\omega = 0$  при  $k = 0$  маємо:

$$\omega = a \left(k + \frac{S_0}{6\pi} k^3\right).$$

#### 5.7.4. Моделювання відокремленої хвилі в еластичній трубці на основі нелінійного рівняння Шредінгера.

Розглянемо рівняння імпульсу у вигляді (3\*). Будемо вважати поперечну складову швидкості  $w$  маленькою. Тоді рівняння імпульсу буде наступним:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (PS)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Рівняння нерозривності запишемо у вигляді (7\*):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (vS)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Зв'язок між надлишковим тиском всередині еластичної трубки і площею її перерізу запишемо наступним чином:

$$P_T = C \frac{\Delta S}{S}. \quad (3)$$

Розв'язок системи рівнянь (1), (2) будемо шукати використовуючи комплексний потенціал швидкостей:  $\varphi = \varphi(x, t)$ .

Розкладемо його в ряд по малому параметру  $\lambda$  по аналогії з тим як це робиться в квантовій механіці при переході від рівняння Шредінгера до рівняння Гамільтона-Якобі:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\lambda}{i} \varphi_1 + \left(\frac{\lambda}{i}\right)^2 \varphi_2 + \dots, \quad (4)$$

$i$  – уявна одиниця.

Перейдемо до функції  $\Phi$  за допомогою формули:

$$\Phi = \exp\left(\frac{i}{\lambda} \varphi\right). \quad (5)$$

Використовуючи перші два члени розкладу (4) маємо:

$$\Phi = |\Phi| \exp\left(\frac{i}{\lambda} \varphi_0\right). \quad (6)$$

Де  $|\Phi|$  – модуль функції  $\Phi$ ;

$v = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$  – швидкість рідини в трубці, так як  $\varphi_0$  з точністю до  $\lambda^2$ - дійсна частина потенціалу швидкостей.

Нехай,  $|\Phi| = \sqrt{\frac{S}{S_0}}$ , тоді використовуючи (3) можна написати:

$$PS = -C(S - S_0) = -CS_0(|\Phi|^2 - 1). \quad (7)$$

З урахуванням (7) останній член в рівності (1) приймає вигляд:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (PS)}{S \partial x} = -2a^2 \frac{\partial (\ln |\Phi|)}{\partial x} = -2a^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad (8)$$

Де  $a = \sqrt{\frac{c}{\rho}}$  – швидкість розповсюдження хвилі тиску по еластичному трубопроводу.

$$\varphi_1 = \ln |\Phi|$$

Використовуючи потенціал швидкостей, рівняння імпульсу можна однократно проінтегрувати. Тоді система рівнянь (1), (2) приймає вигляд:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - 2a^2 \varphi_1 = O(\lambda^2), \quad (9)$$

$$\frac{\partial |\Phi|^2}{\partial t} + \frac{\partial (v|\Phi|^2)}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Далі покажемо, що система (9), (10) еквівалентна нелінійному рівнянню Шредінгера

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{2a^2}{\lambda} \varphi_1 \Phi. \quad (11)$$

Враховуючи у відповідності з (5), що

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{i}{\lambda} \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\lambda^2} \Phi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{i}{\lambda} \Phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

Після розділення дійсної і уявної частини в (11) будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 - 2a^2 \varphi_1 &= \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right] = O(\lambda^2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) повністю еквівалентне (10), якщо враховувати, що:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{1}{2|\Phi|^2} \frac{\partial |\Phi|^2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{2|\Phi|^2} \frac{\partial |\Phi|^2}{\partial x}.$$

Рівняння (13), (14), (11) повністю еквівалентні системі (9), (10). Запишемо нелінійне рівняння Шредінгера у вигляді:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{a}{k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\omega \Phi \ln |\Phi|, \quad (15)$$

Де  $\omega = \frac{2a^2}{\lambda}$  - циклічна частота,  $k = 2a/\lambda$  - хвильове число. Розв'язок рівняння (15)

будемо шукати у вигляді:

$$\Phi = f(kx - \omega t) \exp[i(rx - \delta t)],$$

Де постійні  $r, \delta$ , а також функція  $f(kx - \omega t)$  поки що невідомі. Враховуючи (6), можна зробити висновок, що  $|\Phi| = f(kx - \omega t)$ .

Підставляючи (16) в (15) будемо мати:

$$ak \frac{d^2 f}{d\xi^2} + i \frac{df}{d\xi} (-\omega + 2ar) + f \left( \delta - \frac{ar^2}{k} \right) + \omega f \ln f = 0. \quad (17)$$

У рівнянні (17) диференціювання проводиться по змінній  $\xi = kx - \omega t$ , а так як функція  $f = |\Phi|$  представляє собою дійсну величину, то рівняння (17) не повинно містити уявних членів.

Нехай  $r = \omega/2a$ , і враховуючи, що  $\omega = ka$  будемо мати:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + f \left( \frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{4} \right) + f \ln f = 0. \quad (18)$$

Розв'язок рівняння (18) будемо шукати у вигляді:

$$f = C_1 \exp \left[ \frac{C_2}{2} (kx - \omega t)^2 \right], \quad (19)$$

Підставивши (19) у (18) знайдемо:

$$C_2 + \left( \frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{4} \right) + \ln C_1 + (kx - \omega t)^2 \left( C_2^2 + \frac{C_2}{2} \right) = 0. \quad (20)$$

Останній член повинен залежати від змінної  $x$  і часу  $t$ , тобто  $C_2 = -1/2$ ,  $C_1 = \exp \left( \frac{3}{4} - \frac{\delta}{\omega} \right)$

$$f = |\Phi| = \exp \left( \frac{3}{4} - \frac{\delta}{\omega} \right) \exp \left[ - \frac{(kx - \omega t)^2}{4} \right]. \quad (21)$$

Враховуючи площу поперечного перерізу, а також враховуючи граничну умову, знайдемо форму відокремленої хвилі яка поширюється по еластичній трубці:

$$S = S_0 + \Delta S_a \exp\left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{2}\right], \quad (22)$$

де

$$\Delta S_a = S_0 \exp\left(\frac{3}{2} - \frac{2\delta}{\omega}\right).$$

Де  $\delta$ -величина, яка пов'язана з характеристикою матеріалу еластичного трубопроводу. Великі значення  $\delta$  характерні жорстким стінкам, малі – еластичним.

Значення надлишкового тиску знайдемо, використовуючи (3):

$$P_T = C \frac{S - S_0}{S} = C \frac{\Delta S_a}{S} \exp\left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{2}\right].$$

Враховуючи, що

$$P_{\max} = C \Delta S_a / S$$

- максимальний надлишковий тиск у відокремленій хвилі знайдемо у вигляді:

$$P_T = P_{\max} \exp\left[-\frac{(kx - \omega t)^2}{2}\right]. \quad (23)$$

Таким чином, із (22) і (23) => що закони зміни площі перерізу еластичного трубопроводу і тиску подібні один одному. Форма відокремленої хвилі відповідає кривій Гауса.

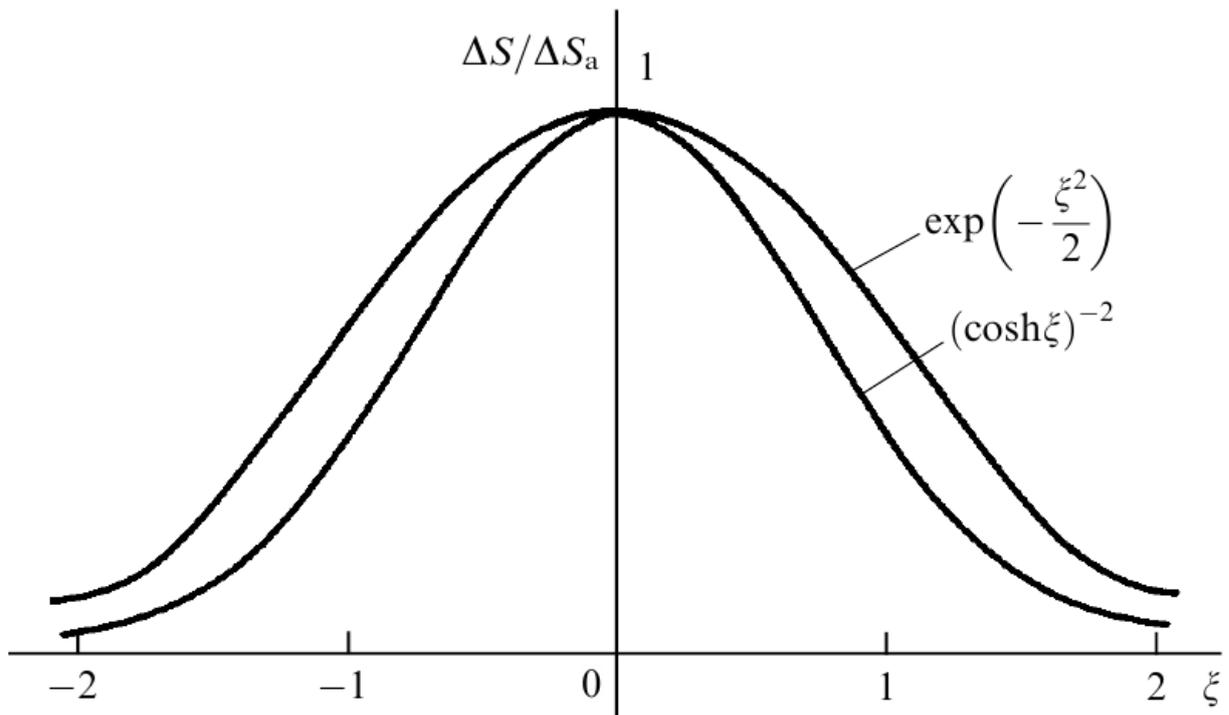


Рис. 20

На рис. 20 показано різницю між формами відокремлених хвиль, які описуються моделлю Кортевега де Фриза і нелінійним рівнянням Шредінгера.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – Изд. 3-е. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – Изд. 2-е, испр. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
3. Скобцов Ю.А., Родин Ю.В., Оверко В.С. Моделирование и визуализация поведения потоков крови при патологических процессах. — Донецк: Издатель Заславский А.Ю., 2008. — 212 с.. Бранков, «Основы биомеханики», пер. В. Джупанова, под ред. И. Кнетса, М. – «Мир», 1981, - 255 с.
4. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. - М.: Мир, 1983. - 400 с. Л.Г.
5. Лущик У.Б., Новицький В.В., Браніцька Н.С., Алексеева Т.С., Францевич К.А. Деякі сучасні математичні моделі гемодинаміки // Вопросы механики и ее приложения. Т. 44 / Ин-т математики НАНУ. – К., 2002. – С. 18–23.
6. Кепич Т.Ю., Куценко О.Г., Харитонов О.М. Основы механіки суцільних середовищ, К.: ЛОГОС, 2006, 197 с.
7. Лойцянский, Механика жидкости и газа, М.: Наука, 1973, 547 с.
8. Бахрушин В.Є. Математичне моделювання. - Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2004.