Тема 2 АПРОКСИМУВАННЯ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ ФУНКЦІЯМИ ДВОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ПОБУДОВА ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОБА-ДУГЛАСА.

Мета вивчення теми:

- засвоїти метод точкового квадратичного апроксимування емпіричних даних лінійною функцією двох змінних;
- знати основні ідеї методу, способи отримання розв'язку задачі апроксимації, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів і методи її розв'язання;
- вміти реалізовувати алгоритм методу точкової квадратичної апроксимації лінійної функції двох змінних засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) та за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
- засвоїти економічні поняття, що характеризують виробничу функцію Кобба-Дугласа;
- засвоїти основні принципи пошуку функції Кобба-Дугласа методом найменших квадратів.

Основні поняття теми:

- апроксимація чисельних даних в просторі;
- квадратичне відхилення методу точкової квадратичної апроксимації функції двох змінних.

Теоретичні відомості

§1 Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних методом найменших квадратів. Постановка задачі

Розглянемо сукупність точок в просторі $\left\{\left(x_k, y_k z_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$, де $z_k = f(x_k, y_k), k = \overline{1,n}$. Тут функція двох змінної $f(x,y)$ визначає емпіричні дані.

Потрібно знайти емпіричну функцію

$$z = \tilde{f}\left(x, y, a_1, a_2, ..., a_m\right), \tag{2.1}$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами $a_1, a_2, ..., a_m$, при цьому їх кількість $m \ll n$. (Якщо $m = n$, то функція (1) є інтерполюючою)

Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = \left|\tilde{f}\left(x_k, y_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - z_k\right| = \left|\tilde{f}\left(x_k, y_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - f(x_k, y_k)\right|,\ k = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Формула $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon_k\right)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє знайти апроксимуючу функцію (1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, є *методом найменших квадратів (МНК).*

§2 Трипараметричне точкове квадратичне апроксимування функції двох змінної лінійною функцією

Розглянемо сукупність точок в просторі $\left\{\left(x_k, y_k, z_k\right)\right\}_{k=0}^{n}$, де $z_k = f(x_k, y_k),\ k = \overline{0,n}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$z = P\left(x, y, a_0, a_1, a_2\right) = a_0 + a_1 x + a_2 y. \qquad (2.1a)$$

Квадратичне відхилення визначається формулою

$$Q\left(a_0, a_1, a_2\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(P\left(x_k, y_k, a_0, a_1, a_2\right) - z_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)^2. \qquad (2.2)$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Знайдемо критичну точку функції ТРЬОХ змінних Q:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)\cdot 1 = 0; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)\cdot x_k = 0; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)\cdot y_k = 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} a_0\cdot(n+1) + a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} x_k + a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} y_k = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k; \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} x_k + a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k\right)^2 + a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} x_k y_k = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k z_k; \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} y_k + a_1\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} x_k y_k + a_2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(z_k\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k z_k. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Уведемо матриці [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_m \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Система (2.4) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$M^t M A = M^t Z, \qquad (2.6)$$

а її розв’язок –

$$A = \left(M^t M\right)^{-1} M^t Z . \qquad (2.7)$$

Якщо точки попарно нерівні, то визначник добутку матриць, $M^t M$, не дорівнює нулю. Це означає існування єдиного розв'язку СЛАР (2.4). До того ж, унаслідок невід'ємності квадратичного відхилення, цей розв'язок може відповідати лише точці локального мінімуму функції Q.

§3 Побудова виробничої функції Кобба-Дугласа

Розглянемо [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] так звану виробничу функцію, яка являє собою математичну модель, що виражає залежність обсягу виробленої продукції від обсягу матеріальних і трудових витрат. В мікроекономіці найчастіше використовують двофакторні функції типу $Z = F(x, y)$, однією з яких є функція Кобба-Дугласа. На базі статистичних даних в оброблювальній промисловості США Charles Cobb і Paul Douglas в 1928 р. отримали залежність вигляду:

$$q = a\, x^{\alpha} y^{\beta} . \qquad (2.8)$$

Тут a, α, β – додатні константи, де a – технологічний коефіцієнт, α – коефіцієнт еластичності по трудовим ресурсам, β – коефіцієнт еластичності по вкладеному капіталу, q – обсяг виробленої продукції, x, y – обсяг використаних ресурсів(труда і капіталу).

Якщо сума коефіцієнтів еластичності (показників степеня функції (2.8)) $\alpha + \beta$ дорівнює 1, тоді функція є однорідною, тобто вона вказує на постійну віддачу при зміні обсягів виробництва. Якщо $\alpha + \beta > 1$, то функція виражає зростаючу віддачу, а якщо $\alpha + \beta < 1$ – спадну.

Нехай відома статистична інформація $\{(q_i, x_i, y_i), i = 1,...,N\}$. Потрібно визначити параметри виробничої функції a, α, β, які найкраще апроксимують статистичні дані.

Логарифмуємо обидві частини функції Кобба-Дугласа (2.8):

$$\ln q = \alpha \ln x + \beta \ln y . \qquad (2.9)$$

Позначимо

$$\begin{gathered} A_0 = \ln a,\ A_1 = \alpha,\ A_2 = \beta, \\ Z_i = \ln q_i,\ X_i = \ln x_i,\ Y_i = \ln y_i. \end{gathered} \qquad (2.10)$$

Отримаємо сукупність точок в просторі $\left\{\left(X_i, Y_i, Z_i\right)\right\}_{i=0}^{N}$, де $Z_i = f(X_i, Y_i), i = \overline{0, N}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$Z = P\left(X, Y, A_0, A_1, A_2\right) = A_0 + A_1 X + A_2 Y . \qquad (2.11)$$

Після застосування МНК буде отримано точку мінімуму $\left(A_0, A_1, A_2\right)$ квадратичного відхилення, звідки можна знайти параметри функції Кобба-Дугласа:

$$a = e^{A_0},\ \alpha = A_1,\ \beta = A_2 . \qquad (2.12)$$