Тема 3 ІНТЕГРАЛЬНИЙ і ТОЧКОВИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета вивчення теми:

– засвоїти поняття повної система функцій та її лінійно незалежної підсистеми;
– знати принципи вибору функцій цієї системи.
– знати інтегральний метод найменших квадратів (МНК) розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: основні ідеї, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів;
– знати точковий метод найменших квадратів (МНК) розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь;
– знати недоліки і переваги інтегрального і точкового МНК;
– вміти реалізовувати алгоритм інтегрального методу найменших квадратів за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
– вміти реалізовувати алгоритм точкового методу найменших квадратів за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
– вміти доводити збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Основні поняття теми:

– повна система функцій та її підсистема;
– квадратичне відхилення інтегрального методу найменших квадратів розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння;
– квадратичне відхилення точкового методу найменших квадратів.

Теоретичні відомості

§1 Загальні положення

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{3.1}$$

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{3.2}$$

де функції $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на $[a;b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0,\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розглянемо систему лінійно незалежних функцій

$$\left\{u_j(x)\right\}_{j=0}^{n}, \tag{3.3}$$

яка утворюється з таких функцій, що

- $u_0(x)$ задовольняє ті самі крайові умови (3.2), що і невідома функція $y(x)$:

$$\Gamma_a(u_0) = A,\ \Gamma_b(u_0) = B, \tag{3.4}$$

- $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ задовольняють однорідні крайові умови:

$$\Gamma_a(u_j) = 0,\ \Gamma_b(u_j) = 0 \text{ при } j = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Для прикладу, якщо крайова умова має вигляд

$$y(a)=A,\quad y(b)=B, \tag{3.6}$$

то за потрібну систему можна обрати

$$u_0(x)=A+\frac{B-A}{b-a}(x-a),\ u_j(x)=(x-a)^j(x-b),\quad j=\overline{1,n} \tag{3.7}$$

або

$$u_0(x)=A+(B-A)\sin\frac{\pi(x-a)}{2(b-a)},\ u_j(x)=\sin\frac{\pi j(x-a)}{2(b-a)},\quad j=\overline{1,n} \tag{3.8}$$

залежно від вигляду функцій $p(x), q(x), f(x)$ і передбачуваного вигляду розв'язку даної крайової задачі.

Наближений розв'язок крайової задачі (1), (2) подається сумою

$$\bar{y}(x)=u_0(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j u_j(x), \tag{3.9}$$

в якій коефіцієнти $\left\{C_j\right\}_{j=1}^{n}$ підлягають визначенню.

Розглянемо <u>**нев'язку**</u>

$$R(x,C_1,C_2,...,C_n)=L(\bar{y})-f(x)=L(u_0)-f(x)+\sum_{j=1}^{n}C_jL(u_j). \tag{3.10}$$

Дана нев'язка у всіх точках $x\in[a;b]$ за абсолютним значенням повинна бути близькою до 0.

§2 Інтегральний МНК

Дана модифікація методу найменших квадратів передбачає мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]

$$Q(C_1,C_2,...,C_n)=\int_a^b R^2(x,C_1,C_2,...,C_n)\,dx. \tag{3.11}$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1,C_2,...,C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_1}=\displaystyle\int_a^b R\frac{\partial R}{\partial C_1}\,dx=0;\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_2}=\displaystyle\int_a^b R\frac{\partial R}{\partial C_2}\,dx=0;\\ \ldots\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_n}=\displaystyle\int_a^b R\frac{\partial R}{\partial C_n}\,dx=0.\end{cases} \tag{3.12}$$

Наведена система є СЛАР і має єдиний розв'язок.

§3 Точковий МНК

Дана модифікація методу найменших квадратів початково передбачає розбиття відрізку $[a;b]$ на m рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{m}k,\ \ k = \overline{1,m}\,, \tag{3.13}$$

де $m > n$. Випадок $m = n$ відповідає методу колокацій.

Квадратичне відхилення у цьому випадку визначається сумою, що утворюється із значень квадратів нев'язки в точках розбиття. А саме [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

$$Q(C_1, C_2, ..., C_n) = \sum_{k=1}^{m} R^2(x_k, C_1, C_2, ..., C_n)\,. \tag{3.14}$$

Саме воно й підлягає мінімізації. Точку мінімуму шукаємо описаним вище методом на основі системи (3.12).