Тема 4 ІТЕРАЦІЙНІ ТА НЕІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета вивчення теми:

- засвоїти основні принципи класифікації інтегральних рівнянь;
- знати умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
- засвоїти основні теоретичні засади неітераційного методу найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду: принципи вибору координатних функцій, основні ідеї методу, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів;
- засвоїти основні теоретичні засади неітераційних методів моментів і колокацій розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду: принципи вибору координатних функцій, основні ідеї методу, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів;
- вміти реалізовувати алгоритм методу найменших квадратів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду засобами системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
- вміти реалізовувати алгоритми методів моментів і колокацій розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду засобами системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).

Основні поняття теми:

- інтегральне рівняння Фредгольма другого роду;
- система координатних функцій;
- квадратичне відхилення методу найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Теоретичні відомості

§1 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Основні поняття

Розглянемо інтегральне рівняння виду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds - f(x) = 0, \tag{4.1}$$

В ньому

невідома функція – це $y(x)$,

відомими є

$\lambda = const \in \mathbb{R}$ – *параметр* інтегрального рівняння,

функція $f(x)$ (як правило, неперервна на $[a;b]$), яку називають *вільним членом*,

функція $K(x,s)$ (як правило, неперервна на $[a;b]\times[a;b]$) – *ядро* інтегрального рівняння.

Таке рівняння називають інтегральним рівнянням другого роду. Воно є лінійним, оскільки невідома функція входить в нього лінійно.

Розрізняють ітераційні та не ітераційні методи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь.

§2 Ітераційний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду: метод послідовних наближень

Ідея методу послідовних наближень (МПН).

Крок 0. За нульове наближення $y_0(x)$ можна обрати будь-яку функцію із простору розв'язків. Таким простором може бути $C_{[a;b]}$ або $L_2[a;b]$. Однак, як правило обирають

$$y_0(x)=0 \text{ або } y_0(x)=f(x). \tag{4.2}$$

Крок 1. Перше наближення (перша ітерація):

$$y_1(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y_0(s)\,ds+f(x).$$

Крок 2. Друге наближення (друга ітерація):

$$y_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y_1(s)\,ds+f(x).$$

Крок n. n-е наближення (n-а ітерація):

$$y_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y_{n-1}(s)\,ds+f(x). \tag{4.3}$$

....

Постає питання: чи збігається послідовність наближених розв'язків до точного? Відповідь на це питання НЕ завжди позитивна!

МПН може бути застосований у наступних випадках.

Випадок 1. Розв'язок шукаємо у просторі $C_{[a;b]}$. Якщо функції $f(x)$ і $K(x,s)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ або на квадраті $[a;b]\times[a;b]$ відповідно, тобто $f(x)\in C_{[a;b]}$ і $K(x,s)\in C_{[a;b]\times[a;b]}$, тоді єдиний розв'язок рівняння (4.1) у просторі $C_{[a;b]}$ можна знайти методом послідовних наближень, а послідовність наближених розв'язків буде збігатися до точного розв'язку рівняння (4.1), якщо

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}, \tag{4.4}$$

де

$$M=\max_{\substack{a\le x\le b\\ a\le s\le b}}|K(x,s)|. \tag{4.5}$$

Випадок 2. Розв'язок шукаємо у просторі $L_2[a;b]$. Якщо $f(x)\in L_2[a;b]$ і $K(x,s)\in L_2([a;b]\times[a;b])$, тоді єдиний розв'язок рівняння (1) у просторі $L_2[a;b]$ можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$|\lambda|<\frac{1}{B}, \tag{4.6}$$

де

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds}\,. \tag{4.7}$$

Швидкість збіжності послідовності наближень (4.3) має порядок

$$\frac{q^n}{1-q},$$

де

$$q = |\lambda|\, M(b-a),$$

якщо виконується нерівність (4.4) для розв'язків в просторі $C_{[a;b]}$, або

$$q = |\lambda|\, B,$$

якщо має місце умова (4.6) для розв'язків в $L_2[a;b]$.

§3 Неітераційні методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

До таких методів відносять:

- метод найменших квадратів;
- метод колокацій;
- метод моментів.

3.1 Загальні положення

Розглянемо інтегральне рівняння

$$R(y) \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds - f(x) = 0, \tag{4.1a}$$

Всі зазначені методи беруть початок з вибору системи *координатних функцій*

$$u_0(x), \left\{u_j(x)\right\}_{j=1}^{n},$$

де функції $\left\{u_j(x)\right\}_{j=1}^{n}$ – лінійно незалежні.

Наближений розв'язок рівняння (4.1a) подається сумою

$$\overline{y}_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(x), \tag{4.8}$$

в якій коефіцієнти $\left\{C_j\right\}_{j=1}^{n}$ підлягають визначенню.

Розглянемо **нев'язку**

$$\begin{gathered} R(\overline{y}_n) = W(x, C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda) = \overline{y}_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, \overline{y}_n(s)\, ds - f(x) = \\ = u_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \left[u_0(s) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(s) \right] ds - f(x). \end{gathered} \tag{4.9}$$

Уведемо позначення

$$\varphi_0(x,\lambda)=u_0(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\,u_0(s)\,ds-f(x);$$

$$\varphi_j(x,\lambda)=u_j(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\,u_j(s)\,ds,\;\; j=\overline{1,n}.$$

Тоді нев'язку (4.9) можна переписати у вигляді

$$R(\bar{y}_n)=W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,\lambda). \qquad (4.10)$$

3.2 Метод найменших квадратів (інтегральний).

Метод передбачає [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом

$$Q(C_1,C_2,...,C_n,\lambda)=\int\limits_a^b W^2(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)\,dx=\int\limits_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]^2 dx. \qquad (4.11)$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1,C_2,...,C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_1}=\displaystyle\int\limits_a^b W\dfrac{\partial W}{\partial C_1}\,dx=\int\limits_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]\varphi_1(x,\lambda)\,dx=0;\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_2}=\displaystyle\int\limits_a^b W\dfrac{\partial W}{\partial C_2}\,dx=\int\limits_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]\varphi_2(x,\lambda)\,dx=0;\\ ...\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_n}=\displaystyle\int\limits_a^b W\dfrac{\partial W}{\partial C_n}\,dx=\int\limits_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]\varphi_n(x,\lambda)\,dx=0.\end{cases} \qquad (4.12)$$

Уведення позначень $\left(\varphi_k,\varphi_l\right)=\int\limits_a^b \varphi_k(x,\lambda)\,\varphi_l(x,\lambda)\,dx$ призводить до системи

$$\begin{cases}C_1\cdot\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+C_2\cdot\left(\varphi_1,\varphi_2\right)+...+C_i\cdot\left(\varphi_1,\varphi_i\right)+...+C_n\cdot\left(\varphi_1,\varphi_n\right)=-\left(\varphi_0,\varphi_1\right);\\ C_1\cdot\left(\varphi_2,\varphi_1\right)+C_2\cdot\left(\varphi_2,\varphi_2\right)+...+C_i\cdot\left(\varphi_2,\varphi_i\right)+...+C_n\cdot\left(\varphi_2,\varphi_n\right)=-\left(\varphi_0,\varphi_2\right);\\ C_1\cdot\left(\varphi_3,\varphi_1\right)+C_2\cdot\left(\varphi_3,\varphi_2\right)+...+C_i\cdot\left(\varphi_3,\varphi_i\right)+...+C_n\cdot\left(\varphi_3,\varphi_n\right)=-\left(\varphi_0,\varphi_3\right);\\ ...\\ C_1\cdot\left(\varphi_j,\varphi_1\right)+C_2\cdot\left(\varphi_j,\varphi_2\right)+...+C_i\cdot\left(\varphi_j,\varphi_i\right)+...+C_n\cdot\left(\varphi_j,\varphi_n\right)=-\left(\varphi_0,\varphi_j\right);\\ ...\\ C_1\cdot\left(\varphi_n,\varphi_1\right)+C_2\cdot\left(\varphi_n,\varphi_2\right)+...+C_i\cdot\left(\varphi_n,\varphi_i\right)+...+C_n\cdot\left(\varphi_n,\varphi_n\right)=-\left(\varphi_0,\varphi_n\right).\end{cases} \qquad (4.13)$$

Наведена система є СЛАР. Головна матриця системи є симетричною. Якщо її визначник не дорівнює нулю, то система (13) має єдиний розв'язок.

Ті значення параметра λ, при яких $D(\lambda)=0$, дозволяють знайти наближені власні значення $\{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{n}$ інтегрального рівняння. Якщо розглянути

$f(x)=0,\ u_0(x)=0,\ \lambda=\overline{\lambda}_k$, то система (4.13) перетворюється на однорідну, з якої можна знайти наближені власні функції рівняння (1).

3.3 Метод моментів

Першою відмінністю методу моментів наближеного розв'язання інтегрального рівняння (4.1а) [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] є вибір функції $u_0(x)=f(x)$. Це призводить до зміни вигляду наближеного розв'язку

$$\overline{y}_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j u_j(x), \tag{4.14}$$

а також нев'язки:

$$R(\overline{y}_n)=W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}C_j\left[u_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,u_j(s)\,ds\right]-\lambda\int_a^b K(x,s)\;f(s)\,ds. \tag{4.15}$$

По-друге, невідомі коефіцієнти потрібно знаходити із умови ортогональності нев'язки до координатних функцій:

$$\begin{cases}\int_a^b W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)\,u_1(x,\lambda)\,dx=0;\\ \int_a^b W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)\,u_2(x,\lambda)\,dx=0;\\ ...\\ \int_a^b W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)\,u_n(x,\lambda)\,dx=0.\end{cases} \tag{4.16}$$

Підставляючи (4.15) до системи (4.16), перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}C_j\left[\int_a^b u_i(x)\,u_j(x)\,dx-\lambda\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\,u_i(x)\,u_j(s)\,ds\right]=\\ \qquad =\lambda\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\,u_i(x)\;f(s)\,ds,\ i=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{4.17}$$

В позначеннях

$$a_{i,j}=\int_a^b u_i(x)\,u_j(x)\,dx;\quad b_{i,j}=\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\,u_i(x)\,u_j(s)\,ds;$$

$$g_i=\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\,u_i(x)\;f(s)\,ds$$

система (4.17) набуде вигляду:

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}C_j\left[a_{i,j}-\lambda b_{i,j}\right]=\lambda g_i,\ i=\overline{1,n}\right. . \tag*{4.(18)}$$

Щодо існування єдиного розв'язку системи (4.18), який визначатиме наближений розв'язок інтегрального рівняння (4.1а), то висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК в пп. 4.3.3.

3.4 Метод колокацій

Метод колокацій наближеного розв'язання інтегрального рівняння (4.1а) початково передбачає розбиття відрізку $[a;b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k,\ k = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Тобто кількість точок, що обирається, дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів НА ВІДМІНУ ВІД ТОЧКОВОГО МНК для диференціальних рівнянь.

Сутність методу полягає в пошуку тих коефіцієнтів, за яких нев'язка дорівнює нулю в кожній із точок розбиття (19). Тобто система відносно невідомих коефіцієнтів набуде вигляду:

$$\left\{ W(x_k, C_1, C_2, ..., C_n, \lambda) = 0,\ k = \overline{1,n} \right. \tag{4.20}$$

або

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(x_k, \lambda) = -\varphi_0(x_k, \lambda),\ k = \overline{1,n}. \right. \tag{4.21}$$

Щодо існування єдиного розв'язку системи (4.21), який визначатиме наближений розв'язок інтегрального рівняння(1а), то висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК.

Питання про **збіжність послідовності наближених розв'язків** $\{\overline{y}_n(x)\}$ **інтегрального рівняння (1) до точного** $y(x)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y}_n(x) = y(x)$ вимагає глибинних досліджень методами функціонального аналізу.