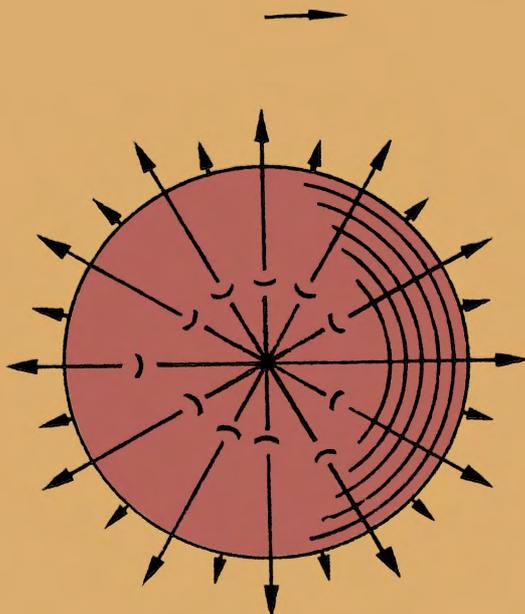


***ВЕКТОРНЫЙ  
АНАЛИЗ  
И НАЧАЛА  
ТЕНЗОРНОГО  
ИСЧИСЛЕНИЯ***

---

А.И.Борисенко  
И.Е.Тарапов



# **ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И НАЧАЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

---

**А. И. БОРИСЕНКО,  
И. Е. ТАРАПОВ**

**ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ**

*Допущено Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР в качестве учебного  
пособия для студентов высших учебных заведений*

**ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ „ВИЩА ШКОЛА“  
1978**

517.3

Б 82

УДК 512.94:512.97(075)

**Векторный анализ и начала тензорного исчисления.**

Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, 216 с.

В книге излагаются основные сведения из векторной и тензорной алгебры, понятия тензорных полей и тензорный анализ, включающий интегральные теоремы; содержится ряд задач тензорного исчисления в применении к механике сплошных сред и электромагнетизму.

Все операции подробно разобраны в ортогональных системах координат и дано обобщение на случай произвольной криволинейной системы координат.

Книга предназначена для студентов, изучающих аэрогидромеханику, теорию упругости и другие предметы, использующие тензорный аппарат.

Ил. 90.

Рецензент: *Н. В. Ефимов*, Московский государственный университет

Редакция естественнонаучной литературы  
И. о. зав. редакцией *Н. Н. Сорочун*

Б  $\frac{20204-563}{M226(04)-78}$  БЗ—25—5—77

Необходимость применения тензорного исчисления в современной физике вызвана не столько удобством и наглядностью математических формулировок законов, сколько объективными свойствами изучаемых явлений. Векторное исчисление давно уже применяется в гидромеханике, теории упругости, электротехнике. Углубление теоретической базы технических наук требует от современного инженера умения свободно оперировать аппаратом тензорного исчисления, особенно части, связанной с введением декартовой системы координат.

Современная научно-техническая литература изобилует примерами широкого использования тензорного и векторного исчисления. Лучшие учебники для вузов по специальным дисциплинам учитывают эту тенденцию совершенствования математического аппарата современных естественных наук. Программы по математике наших вузов включают необходимый материал по важному разделу основ векторной алгебры и векторного анализа. Однако иногда изложение этих разделов носит формальный характер, и это естественно, ибо физическое содержание этого математического аппарата наиболее полно может быть раскрыто в тех специальных дисциплинах, которые используют его.

Нам представляется, что наиболее эффективный способ овладения векторным и тензорным исчислением состоит в рассмотрении возможных его применений в современной физике, в первую очередь в таких ее разделах, как гидромеханика, теория упругости, теория электромагнетизма. Поэтому мы пытались наполнить содержание книги примерами из этих дисциплин.

В этой книге собран материал, который может понадобиться студентам современных инженерных специальностей. Чтобы не стать на путь преподнесения голых правил и приемов, авторам пришлось пойти на некоторое расширение излагаемых сведений.

Поэтому книга содержит материал, являющийся предметом изучения на физических и механических специальностях университетов. Большую часть этих сведений пришлось добавить во втором издании этого пособия, идя навстречу пожеланиям многих учащихся и преподавателей.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность профессорам Я. П. Бланку, В. Л. Герману, Г. И. Дринфельду, Н. В. Ефимову, В. А. Марченко, А. Д. Мышкису, П. К. Рашевскому за ценные замечания, способствовавшие улучшению предыдущих изданий книги, а также издания на английском языке в Индии. Особую признательность авторы выражают профессору Н. И. Ахизеру, проявлявшему постоянный интерес и внимание к книге.

АВТОРЫ

# Основные сведения из векторной алгебры

В главе рассматриваются основные алгебраические действия над векторами, основанные на широко распространенном определении вектора. В дальнейшем будет дано естественное обобщение этих действий и основных понятий, составляющих предмет тензорной алгебры.

### 1.1. Векторы и скаляры

Величины, для определения которых достаточно знать одно число (положительное, отрицательное или нуль), называются *скалярами*. Таковы температура, плотность, масса, работа силы. Сравниваться могут скаляры одинаковой размерности. Два скаляра одинаковой размерности равны, если их знаки и численные значения, получающиеся при измерении одной и той же единицей измерения, одинаковы.

Часто приходится иметь дело с величинами, для определения которых, кроме численного значения, необходимо указать направление в пространстве. Это перемещение, скорость, ускорение, сила, момент силы, напряжение электрического поля, диэлектрическая поляризация и т. п. Изучение такого рода величин приводит к понятию вектора\*.

Действия над векторами подчиняются правилам векторной алгебры, которые будут приведены ниже.

Многие величины, рассматриваемые в математике и физике, имеют более сложную структуру, чем векторы и скаляры. Для определения их недостаточно знать числовые значения и направления. Такие величины называются тензорами второго и высших рангов. Так, совокупность векторов упругих напряжений на всевозможных площадках, которые можно провести через некоторую точку в упругом теле, приводит к понятию тензора 2-го ранга упругих напряжений, анализ деформаций произвольного элементарного объема упругого тела — к понятию тензора деформаций.

Вначале более подробно остановимся на векторах.

---

(\*) Вектор — направленный отрезок, от латинского слова *vehere* — влечь, тянуть.

Вектор  $A$  изображается отрезком прямой, направление которого совпадает с направлением рассматриваемой величины, а длина в выбранном масштабе характеризует ее численное значение (модуль вектора  $A = |A|$ ).

**Нулевым вектором** называется вектор, модуль которого равен нулю. Такому вектору нельзя приписать определенное направление; он может иметь любое направление в пространстве. Для обозначения нулевого вектора применяется обычный нуль.

Сравнивать можно только векторы, имеющие одинаковую размерность, т. е. одинаковый физический или геометрический смысл.

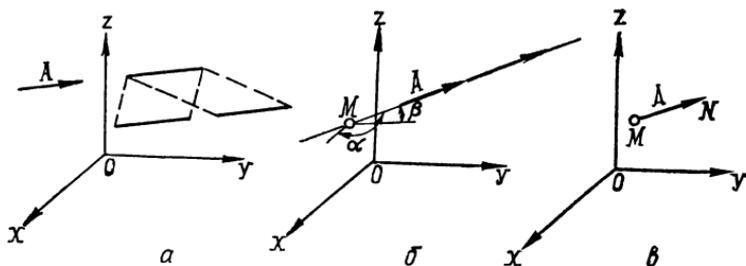


Рис. 1.1. Свободные и скользящие векторы:

а) свободный вектор может быть перенесен параллельно самому себе; б) скользящий вектор может быть перенесен по линии его действия; в) связанный вектор.

При сравнении двух векторов одинаково существенны как величины, так и направления их.

*Два вектора  $A$  и  $B$  одинаковой размерности равны, если модули их одинаковы и направления совпадают.*

Тогда пишут  $A = B$ .

**Векторы свободные, скользящие, связанные.** Иногда различают векторы свободные, скользящие и связанные.

*Свободный* вектор можно переносить параллельно самому себе и прилагать в любой точке (например, скорость поступательного движения тела). Свободный вектор (рис. 1.1, а) в пространстве полностью определяется тремя числами, например, тремя его проекциями на оси декартовой системы координат; его можно задать величиной (длиной отрезка, модулем вектора) и двумя независимыми углами, образуемыми вектором с осями координат и т. п.

*Скользящие* векторы можно переносить по прямой, определяющей направление вектора (например, вектор силы, приложенной к твердому телу). Скользящий вектор (рис. 1.1, б) требует для своего определения в пространстве пяти чисел, например, координат точки  $M$  пересечения прямой, на которой лежит вектор, с какой-либо координатной плоскостью (два числа), длины вектора (одно число) и двух независимых углов  $\alpha$  и  $\beta$  с осями (два числа).

*Связанный* вектор относится к определенной точке (например, скорость и ускорение точки твердого тела, движущегося произвольным образом). Связанный вектор (рис. 1.1, в) определяется шестью числами, например, координатами начала и конца вектора (точки  $M$  и  $N$ ).

Свободные векторы являются наиболее общим случаем задания величин, определяемых численным значением и направлением. Изучение скользящих и связанных векторов можно свести к изучению свободных векторов. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать только свободные векторы.

## 1.2. Сложение и вычитание векторов. Проекция вектора на ось

Сложение векторов и его свойства. Определением векторного сложения служит следующее правило.

Суммой двух векторов ( $A$  и  $B$ ) является третий вектор ( $C$ ), изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах (рис. 1.2, а).

Следствием этого определения является правило суммирования нескольких векторов:

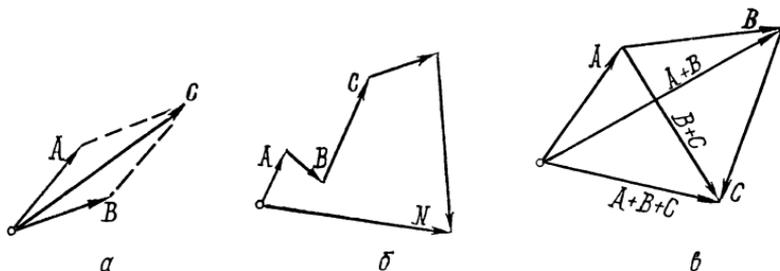


Рис. 1.2. Сложение векторов:

а) сумма двух векторов; б) сумма нескольких векторов; в) ассоциативность векторного сложения:  $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$ .

Суммой нескольких векторов ( $A, B, C, \dots$ ) является вектор ( $N$ ), представляющий замыкающую многоугольника, построенного на слагаемых векторах (рис. 1.2, б).

Это правило приобретает ясный физический смысл, если под слагаемыми векторами понимать последовательные перемещения некоторой точки в пространстве. Тогда их сумма будет результатом этих последовательных перемещений и даст общее перемещение точки.

Из определения векторного сложения следует, что действие сложения векторов обладает характерными свойствами обычного алгебраического суммирования, а именно:

- 1) коммутативностью, т. е.  $A + B = B + A$ ;
- 2) ассоциативностью, т. е.

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C.$$

Таким образом, при векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и сумму более чем двух векторов можно писать без скобок (рис. 1.2, в).

Что касается сложения любого вектора с нулем, то справедливо правило  $A + 0 = A$ .

Величина вектора характеризуется численным значением и направлением. Это необходимый, но отнюдь не достаточный признак того, что данная величина является вектором. Она обязательно должна подчиняться действиям векторной алгебры, в частности векторному (геометрическому) сложению.

Для иллюстрации этого положения рассмотрим поворот твердого тела вокруг некоторой оси; он может быть представлен отрезком, равным по величине углу поворота и направленным по оси вращения, например, в ту сторону, откуда поворот виден против хода часовой стрелки. Однако можно показать, что такие отрезки не подчиняются правилу векторного сложения, причем их сумма зависит от порядка слагаемых.

А. Пусть сфера (рис. 1.3, а) повернулась вокруг оси  $Oy$  на угол  $\alpha_1$  так, что некоторая точка сферы из положения  $A_1$  переместилась в положение  $A_2$ ; изобразим этот поворот в виде направленного отрезка  $\alpha_1$ . Пусть второй поворот сферы совершается вокруг оси  $Oz$  на угол  $\alpha_2$ , так что точка перейдет из положения  $A_2$  в  $A_3$ . Этот поворот изобразится направленным отрезком  $\alpha_2$ .

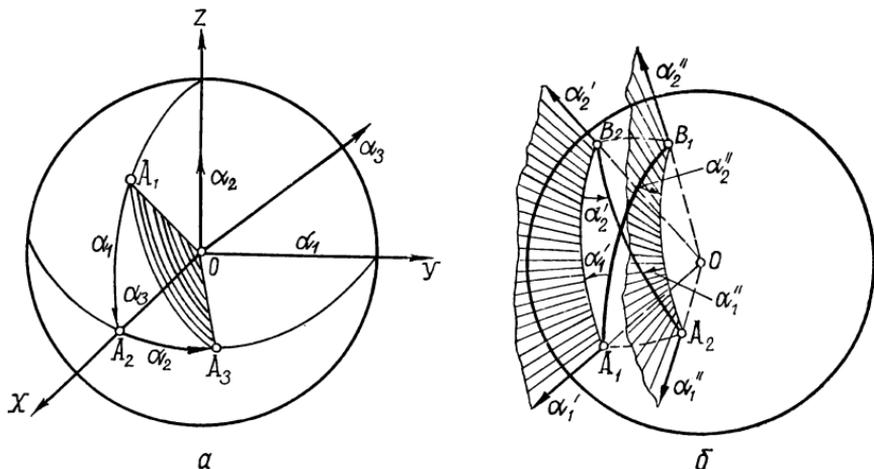


Рис. 1.3. Конечные повороты твердого тела:

а) конечные повороты не могут быть представлены векторами: направленный отрезок  $\alpha_3$ , изображающий суммарный поворот, не лежит в плоскости отрезков  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , представляющих слагаемые повороты; б) два способа перевода дуги из положения  $A_1B_1$  в  $A_2B_2$  путем последовательных конечных поворотов,

Тогда по определению введенных нами направленных отрезков поворот сферы, переводящий точку из положения  $A_1$  в  $A_3$ , с одной стороны, должен быть суммой отрезков  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а с другой — изображен отрезком  $\alpha_3$ , перпендикулярным к плоскости  $A_1OA_3$ . Поскольку  $\alpha_3$  не лежит в плоскости  $zOy$ , этот отрезок не может быть суммой  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Этот пример особенно нагляден для случая

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Б. Поворот сферы, переводящий некоторую дугу на ней из положения  $A_1B_1$  в положение  $A_2B_2$ , может быть осуществлен двумя путями (рис. 1.3, б): а) поворот вокруг оси  $OA_1$  на угол  $\alpha_1'$  («вектор»  $\alpha_1'$ ) + поворот вокруг оси  $OB_2$  на угол  $\alpha_2'$  («вектор»  $\alpha_2'$ );

б) поворот вокруг оси  $OB_1$  на угол  $\alpha_2''$  («вектор»  $\alpha_2''$ ) + поворот вокруг оси  $OA_2$  на угол  $\alpha_1''$  («вектор»  $\alpha_1''$ ).

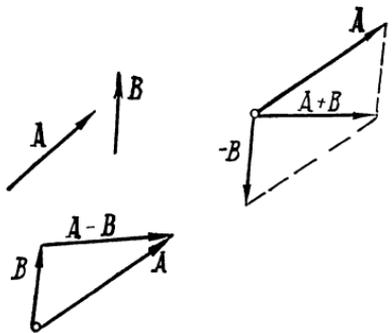
Хотя слагаемые поворота равны по величине и изменение их последовательности не меняет результата (дуга из  $A_1B_1$  перейдет в  $A_2B_2$ ), нетрудно видеть, что изображение поворота в виде векторов влечет за собой некоммутативность суммы «векторов», т. е.

$$\alpha_1' + \alpha_2' \neq \alpha_2'' + \alpha_1''.$$

В противоположность конечным поворотам твердого тела, бесконечно малые повороты являются векторами (см. задачу 11 этой главы).

**Вычитание векторов и нулевой вектор.** Рассмотрим действие вычитания векторов.

Под вектором  $-A$  (минус  $A$ ) подразумевается вектор, величина которого равна величине вектора  $A$ , а направление противоположное. Будем считать в этом случае, что векторы  $A$  и  $-A$  *противоположны*.



Очевидно, вектор, равный своему противоположному вектору, есть нулевой.

Вычитание как действие, обратное сложению, сводится к определению одного из слагаемых  $X$  по известной сумме  $A$  и другому слагаемому — вектору  $B$ :  $B + X = A$ .

Используя понятие противоположных векторов, нетрудно получить

$$X = A + (-B) = A - B.$$

Рис. 1.4. Построение разности двух векторов.

Таким образом, *вычитание векторов сводится к сложению уменьшаемого с вектором, противоположным вычитаемому* (рис. 1.4).

**Проекция вектора на ось.** Проекцией  $A_u$  вектора  $A$  на ось ( $u$ ) (рис. 1.5) называется длина отрезка, отсекаемого на этой оси перпендикулярными к ней плоскостями, проведенными через концы вектора  $A$ . Эта длина отрезка берется со знаком плюс, если направление от проекции начала вектора на ось к проекции его конца совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус — в противном случае.

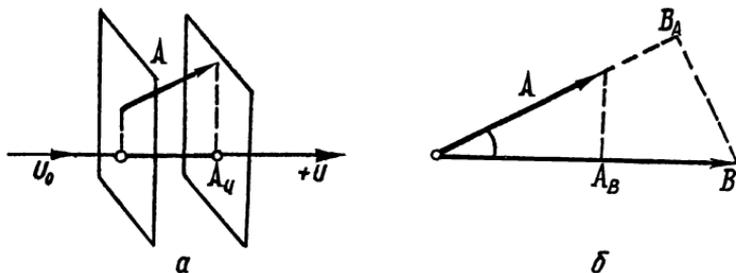


Рис. 1.5. Проекция вектора:

а) проекция вектора на ось; б) проекция одного вектора на направление другого.

*Ортом оси ( $u$ ) называется вектор  $u_0$ , направленный в положительную сторону оси и равный по величине единице, т. е.*

$$u_0 = |u_0| = 1.$$

Обозначим угол \* между векторами  $A$  и  $u_0$  через  $\varphi = (A, u_0)$ .

\* Угол между векторами всегда берется в пределах от 0 до  $\pi$ .

Проекцию  $A_u$  вектора  $\mathbf{A}$  на ось ( $u$ ) можно вычислять по формуле  $A_u = A \cos \varphi = A \cos(\mathbf{A}, \mathbf{u}_0)$ .

Действительно, легко видеть, что  $|\mathbf{A} \cos \varphi|$  всегда дает длину отрезка оси ( $u$ ) между плоскостями, проведенными через концы вектора перпендикулярно к оси. Если  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , то направление от проекции начала вектора к проекции конца вектора совпадает с положительным направлением ( $u$ ). В этом случае  $\cos \varphi > 0$ , так что и  $A_u > 0$ . Если  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \varphi < 0$  и  $A_u < 0$  в соответствии с определением проекции.

Следовательно, проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением оси.

Нетрудно показать, что проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагающих этой суммы на эту же ось (упражнение 1 настоящей главы).

### ***1.3. Умножение вектора на скаляр. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора***

**Умножение вектора на скаляр.** Произведение вектора  $\mathbf{A}$  на скаляр  $m$  представляет собой вектор  $\mathbf{B}$ , модуль которого в  $|m|$  раз больше модуля вектора  $\mathbf{A}$ , а направление совпадает с  $\mathbf{A}$  при  $m > 0$  и противоположно  $\mathbf{A}$ , если  $m < 0$ .

Таким образом,  $m\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ;  $|\mathbf{B}| = B = |m| \cdot |\mathbf{A}| = |m|A$ .

В частном случае  $m = -1$ , векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  противоположны.

Векторы  $\mathbf{A}$  и  $m\mathbf{A}$  ( $m \geq 0$ ) параллельны между собой. Они представляют простейший случай линейно зависимых векторов.

Умножение вектора на число удовлетворяет правилам:

$$m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A}, \quad m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}, \quad (m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}.$$

**Линейная зависимость векторов.** Векторы коллинеарные и компланарные. Векторы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \dots$  (всего  $n$ ) называются линейно зависимыми, если существуют скаляры  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , не все равные нулю, такие, что  $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C} + \dots + c_n\mathbf{N} = 0$ , т. е. если существует линейная комбинация векторов, обращающаяся в нуль.

Два линейно зависимых вектора параллельны между собой.

Действительно, пусть  $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} = 0$ , причем, по крайней мере,  $c_2 \neq 0$ . Тогда, обозначая  $\frac{c_1}{c_2} = -m$ , получим  $\mathbf{B} = m\mathbf{A}$ . Отсюда следует параллельность векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Такие векторы называются коллинеарными.

Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости (или параллельны одной плоскости).

Действительно, пусть  $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C} = 0$ , причем, по крайней мере,  $c_3 \neq 0$ . Тогда, обозначая  $\frac{c_1}{c_3} = -m$ ,  $\frac{c_2}{c_3} = -n$ , получим

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}.$$

Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{C}$  лежит в одной плоскости с векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  (ибо  $\mathbf{C}$  является суммой векторов  $m\mathbf{A}$  и  $n\mathbf{B}$ , коллинеарных  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ). Такие векторы называются *компланарными*.

**Разложение векторов.** Рассмотрим два принципиально важных утверждения, касающихся представления любого вектора в виде линейной комбинации двух или трех других векторов (разложение вектора по двум или трем другим векторам).

1. Если два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  линейно независимы (не являются коллинеарными векторами), то любой вектор  $\mathbf{C}$ , компланарный с  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , может быть единственным образом разложен по этим векторам, т. е. справедлива формула

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}. \quad (1.1)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  компланарны, имеет место равенство

$$c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C} = 0. \quad (*)$$

Так как векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  по условию линейно независимы, то  $c_3 \neq 0$ . Разделив (\*) на  $c_3$  и обозначив  $\frac{c_1}{c_3} = -m$ ,  $\frac{c_2}{c_3} = -n$ , получим разложение (1.1). Покажем, что оно единственно. Пусть наряду с (1.1) имеет место другое разложение:

$$\mathbf{C} = m'\mathbf{A} + n'\mathbf{B}.$$

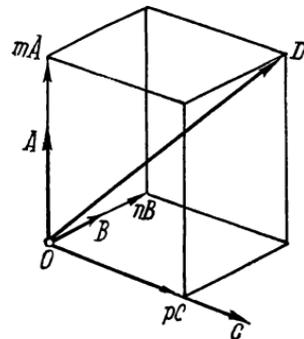
Вычитая это равенство из (1.1), получим  $(m - m')\mathbf{A} + (n - n')\mathbf{B} = 0$ . Отсюда следует, что  $m = m'$ ,  $n = n'$ , ибо по условию  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  линейно независимые векторы.

Таким образом, разложение (1.1) единственно.

11. Если три вектора  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  линейно независимы (не являются компланарными векторами), то любой вектор  $\mathbf{D}$  может быть единственным образом разложен по этим векторам, т. е. справедлива формула

$$\mathbf{D} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + p\mathbf{C}. \quad (1.2)$$

Рис. 1.6. Разложение векторов. Любой вектор  $\mathbf{D}$  может быть единственным образом разложен по трем некопланарным векторам  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ .



Отложим четыре вектора  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  от общего начала  $O$  (рис. 1.6.). Через конец вектора  $\mathbf{D}$  проведем плоскости, параллельные плоскостям векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ ; эти три плоскости вместе с плоскостями векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  образуют параллелепипед. Одной из диагоналей этого параллелепипеда является вектор  $\mathbf{D}$ . Векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , исходящие из начала  $O$ , направлены соответственно по трем его ребрам. В силу коллинеарности векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $m\mathbf{A}$ ,  $n\mathbf{B}$ ,  $p\mathbf{C}$ , имеющих

модули, равные длинам ребер параллелепипеда, можно показать справедливость формулы (1.2).

Если наряду с разложением (1.2) имеет место также и разложение  $D = m'A + n'B + p'C$ , то  $(m - m')A + (n - n')B + (p - p')C = 0$ . Отсюда  $m = m'$ ,  $n = n'$ ,  $p = p'$ , ибо по условию  $A, B, C$  — линейно независимые векторы.

Таким образом, из (1.2) следует: *любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы* (см. 3.10, с. 108).

**Векторный базис.** Система любых трех линейно независимых векторов  $e_1, e_2, e_3$  образует, по определению, базис трехмерного пространства.

В силу доказанного выше, тройка базисных векторов обладает тем свойством, что для всякого вектора  $A$  существует разложение

$$A = te_1 + ne_2 + pe_3, \quad (1.3)$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Подчеркнем, что в качестве базиса могут быть выбраны три *любых некопланарных вектора*.

Откладывая тройку базисных векторов  $e_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) от общего начала  $O$  и обозначая через  $Ox^k$  прямые, на которых лежат базисные векторы ( $k$  — индекс, а не степень; удобство такого обозначения станет ясным из дальнейшего), получим косоугольную декартову систему координат с осями  $Ox^1, Ox^2, Ox^3$  и началом  $O$  (рис. 1.7). Базисные векторы  $e_k$  называются *масштабными векторами*, а концы этих векторов, отложенных от начала координат, — *единичными точками осей координат*.

Если базисные векторы  $e_1, e_2, e_3$  взаимно-ортогональны и модули их равны единице, то они называются *ортами* прямоугольной декартовой системы координат и обозначаются через  $i_1, i_2, i_3$  для осей  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  (рис. 1.8).

Положение точки  $M$  в пространстве определяется ее *радиусом-вектором*  $r$ . Это вектор  $r$  ( $M$ ), проведенный из начала координат в точку  $M$  (рис. 1.7 и 1.8). Координатами точки  $M$  в прямоугольной декартовой системе координат будут расстояния (со знаком)  $x_1, x_2, x_3$  до плоскостей  $x_2Ox_3, x_3Ox_1, x_1Ox_2$ , и поэтому

$$r = i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3.$$

Одно из важнейших достоинств векторного исчисления состоит в том, что уравнения, описывающие то или иное физическое явление, можно формулировать безотносительно к координатным системам. Однако при решении конкретных задач, всегда связанных с вычислениями, каждую задачу обычно преобразуют к виду, содержащему скалярные величины. Это можно сделать, пользуясь подходящей (удобной) системой координат, когда векторное (тензорное) уравнение разлагается на эквивалентную систему скалярных уравнений, содержащих только скаляры (числа), подчиняющиеся правилам арифметического счета.

Каждое такое разложение связано с выбором подходящего базиса, который строится в соответствии с выбранной системой координат. На практике чаще всего пользуются прямоугольными системами координат — прямолинейной (декартовой) или криволинейными: цилиндрическими, сферическими, эллиптическими и т. п. В прямолинейной системе координат базисные векторы одинаковы во всех точках по величине и направлению, в криволинейных — направления базисных векторов меняются от точки к точке.

Рассмотрим сначала для простоты точку на плоскости — ее положение полностью определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  относи-

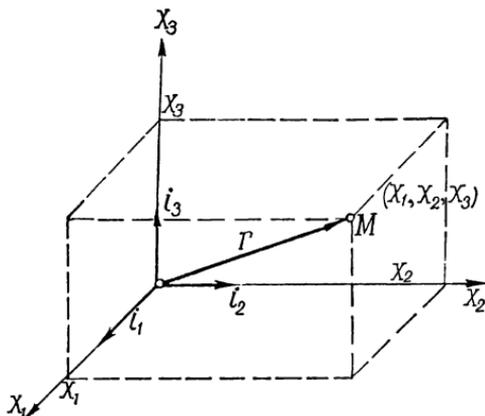
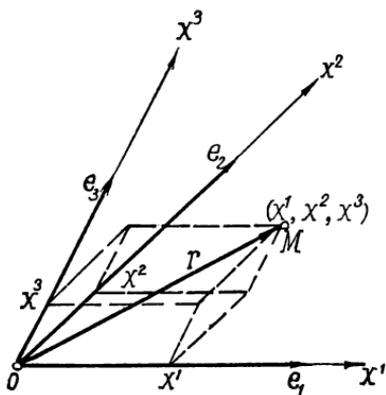


Рис. 1.7. Координатный базис косоугольной декартовой системы координат.

Рис. 1.8. Координатный базис прямоугольной декартовой системы координат и представление радиуса-вектора точки.

тельно некоторой фиксированной точки (полюса)  $O$ , который, конечно, не связан ни с какой системой координат и не зависит от нее. Чтобы производить вычисления, нужно выбрать какую-либо систему координат, и тогда положение точки на плоскости будет определяться двумя числами-координатами: назовем их  $p$  и  $q$ . Эти числа уже будут зависеть от принятой системы координат, от принятой системы отсчета.

В прямоугольной декартовой системе координат, например, это будут расстояния (со знаком)  $p \equiv x_1$  и  $q \equiv x_2$  до двух взаимноперпендикулярных прямых, проходящих через начало координат.

Если сохранять постоянным значение одной координаты, например,  $p = \text{const}$ , и изменять непрерывно другую, получим координатную линию. Через каждую точку на плоскости проходят две координатные линии. В прямоугольной декартовой системе это прямые, параллельные осям координат.

Если определять положение точки на плоскости двумя такими числами — расстоянием  $R$  ( $0 \leq R < +\infty$ ) от некоторой фиксированной точки  $O$  на плоскости (полюса) и углом  $\Theta$  ( $0 \leq \Theta < 2\pi$ )

между прямой, проведенной из полюса  $O$  в рассматриваемую точку, и фиксированной полупрямой из полюса (полярной осью), получим так называемую полярную систему координат. Координатные линии — это окружности радиуса  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  и полупрямые (лучи)  $\Theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}$ , и обратно:  $x_1 = R \cos \Theta$ ,  $x_2 = R \sin \Theta$  (предполагается, что начало декартовых прямоугольных координат совпадает с полюсом и ось  $Ox_1$  — с полярной осью). В этой системе криволинейных координат направления базисных векторов в каждой точке различны, но пересекаются все они под прямым углом — полярная система координат ортогональна (рис. 1.9, а).

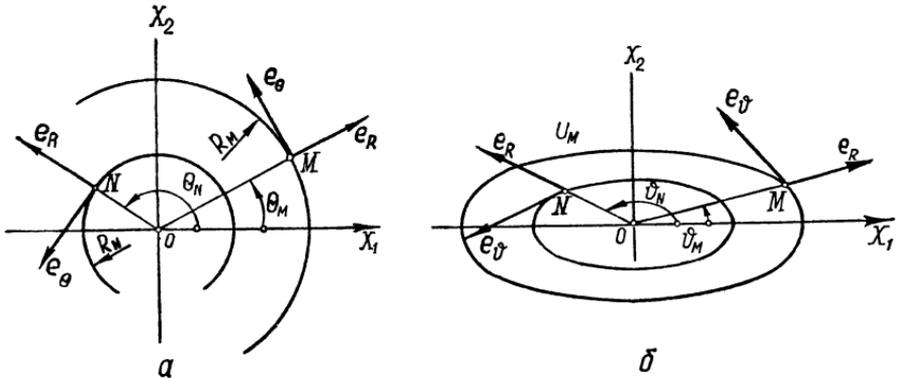


Рис. 1.9. Криволинейные системы координат на плоскости:

а) полярная (координатные оси — лучи и касательные к окружностям); б) обобщенная полярная (координатные оси — лучи и касательные к эллипсам).

Координатными линиями обобщенной полярной системы координат являются эллипсы  $u^2 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$  и лучи  $\vartheta = \arctg \frac{a}{b} \frac{x_2}{x_1}$  ( $0 \leq u < +\infty$ ,  $0 \leq \vartheta < 2\pi$ ;  $a > 0$ ;  $b > 0$ ;  $a \neq b$ ); обратно:  $x_1 = au \cos \vartheta$ ,  $x_2 = bu \sin \vartheta$ .

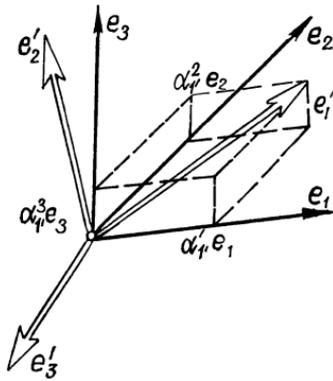
Подробно криволинейные координаты рассмотрены в специальном разделе второй главы.

Подчеркнем еще раз, что при решении конкретных задач обычно пользуются ортогональными системами координат. Однако многие свойства их становятся значительно яснее, если рассматривать их как предельный случай обобщенных криволинейных координат, базис которых не прямоугольный, а координатные линии не прямые. Поэтому в дальнейшем основные свойства векторов (тензоров) рассматриваются главным образом в декартовой прямоугольной системе координат, хотя в некоторых местах применяются неортогональные базисы.

**Прямое и обратное преобразование векторов двух произвольных базисов с общим началом.** Пусть в некоторой точке  $O$  выбраны два векторных базиса  $(e_1, e_2, e_3)$  и  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ . Любой из

векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса, и наоборот (рис. 1.10).

Обозначим через  $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3$  (цифры сверху — индексы) коэффициенты разложения вектора  $e_i'$  по векторам базиса  $e_1, e_2, e_3$ , будем называть эти девять ( $i = 1, 2, 3$ ) величин *коэффициентами прямого преобразования*, так что в соответствии с (1.3)



$$\begin{aligned} e_1' &= \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \alpha_1^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_1^k e_k, \\ e_2' &= \alpha_2^1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \alpha_2^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_2^k e_k, \\ e_3' &= \alpha_3^1 e_1 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_3^k e_k, \end{aligned} \quad (1.4)$$

или в общем виде  $e_i' = \sum_{k=1}^3 \alpha_i^k e_k$ .

Рис. 1.10. Разложение вектора  $e_1$  по векторам  $e_1, e_2, e_3$ .

Аналогично коэффициенты разложения вектора  $e_j$  по векторам  $e_1', e_2', e_3'$  обозначим через  $\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3$  ( $j = 1, 2, 3$ ), и эти девять величин будем называть *коэффициентами обратного преобразования*:

$$e_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_j^k e_k'. \quad (1.5)$$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразований существует связь. Подставив разложение каждого вектора  $e_k$  из (1.5) в (1.4), после перегруппировки слагаемых найдем

$$\begin{aligned} e_i' &= \alpha_i^1 e_1 + \alpha_i^2 e_2 + \alpha_i^3 e_3 = \alpha_i^1 (\alpha_1^1 e_1' + \alpha_1^2 e_2' + \alpha_1^3 e_3') + \\ &+ \alpha_i^2 (\alpha_2^1 e_1' + \dots) + \alpha_i^3 (\alpha_3^1 e_1' + \dots) = (\alpha_i^1 \alpha_1^1 + \alpha_i^2 \alpha_2^1 + \\ &+ \alpha_i^3 \alpha_3^1) e_1' + (\alpha_i^1 \alpha_1^2 + \dots) e_2' + (\alpha_i^1 \alpha_1^3 + \dots) e_3' = \\ &= e_1' \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^1 + e_2' \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^2 + e_3' \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^3 = \sum_{k=1}^3 e_k' \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^k. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Аналогичным путем можно найти

$$e_i = e_1 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^1 + e_2 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^2 + e_3 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^3 = \sum_{k=1}^3 e_k \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^k. \quad (1.6a)$$

Отсюда ясно, что для каждого значения индекса  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют место следующие 18 соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^j &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \\ \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^j &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Эти соотношения будут использованы в дальнейшем.

## 1.4. Скалярное и векторное произведения двух векторов

**Скалярное произведение.** Скалярным произведением  $A \cdot B$  двух векторов  $A$  и  $B$  называется произведение их модулей на косинус угла между векторами.

Таким образом,

$$A \cdot B = AB \cos(A, B).$$

Отсюда также следует, что скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора и проекции другого вектора на направление первого (рис. 1.5), т. е.

$$A \cdot B = A_B B = A B_A.$$

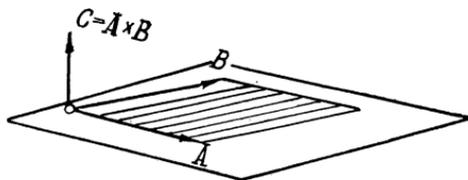
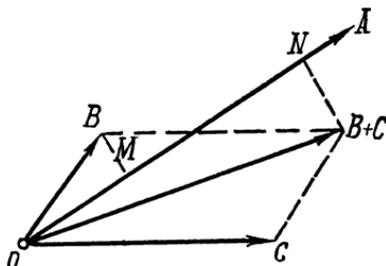


Рис. 1.11. Дистрибутивность скалярного произведения. Поскольку  $ON = OM + MN$ , то  $|A|ON = |A|OM + |A|MN$ , т. е.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

Рис. 1.12. Векторное произведение.

Скалярное произведение векторов обладает коммутативностью и дистрибутивностью:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (\text{коммутативность}).$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{дистрибутивность}) \quad (\text{рис. 1.11}).$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов  $A$  и  $B$  выражается следующим равенством:  $A \cdot B = 0$ .

Необходимость и достаточность этого условия очевидна (если  $A \perp B$ , то  $\cos(A, B) = 0$ ; если один вектор есть нуль, то ему можно приписать направление, перпендикулярное ко второму вектору).

Проекция вектора на ось равна скалярному произведению орта оси на вектор:  $A_u = A \cdot u_0 = A \cos(A, u_0)$ .

Это следует из определения проекции вектора на ось.

Если  $(x_1), (x_2), (x_3)$  — оси прямоугольной декартовой системы координат, то любой вектор  $A$  может быть разложен по ортам  $i_1, i_2, i_3$  этих осей, и, следовательно, (см. формулу (1.2))  $A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$ .

В силу взаимной перпендикулярности координатных осей имеем

$$i_l \cdot i_k = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq k, \\ 1, & \text{если } l = k. \end{cases} \quad (1.8)$$

Тогда  $A \cdot i_1 = A_1$ ;  $A \cdot i_2 = A_2$ ;  $A \cdot i_3 = A_3$ .

Таким образом,  $A_1, A_2, A_3$  суть проекции вектора  $A$  на координатные оси.

Итак, любой вектор  $A$  может быть записан в виде

$$A = (A \cdot i_1) i_1 + (A \cdot i_2) i_2 + (A \cdot i_3) i_3. \quad (1.9)$$

Скалярное произведение векторов может быть записано через произведения проекций этих векторов на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3) \times (B_1 i_1 + B_2 i_2 + B_3 i_3) = \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь использованы свойства дистрибутивности скалярного произведения, формула (1.9) разложения вектора по осям декартовой системы и условия (1.8).

**Векторное произведение.** Векторным произведением  $A \times B$  двух векторов называется вектор  $C \equiv A \times B$  (рис. 1.12), направленный перпендикулярно к плоскости векторов-сомножителей в ту сторону, откуда поворот от первого сомножителя ко второму на меньший угол виден против хода часовой стрелки, и равный по величине площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т. е.

$$\begin{aligned} |C| &= |A \times B| = \\ &= AB \sin(A, B). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, направление векторного произведения соответствует движению правого винта при его вращении от  $A$  к  $B$ .

В отличие от скалярного произведения, векторное произведение не обладает коммутативностью, а именно:  $A \times B = -B \times A$ , но, как и скалярное, оно удовлетворяет закону дистрибутивности, т. е. (рис. 1.13)  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ .

Рис. 1.13. Дистрибутивность векторного произведения:

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ . Спроектируем векторы  $B, C$  и  $B + C$  на плоскость, перпендикулярную к  $[A]$ . Стороны полученного треугольника  $Ocb$  увеличим в  $[A]$  раз и повернем полученный треугольник  $Ode$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  так, чтобы направление поворота и направление  $A$  составляли правый винт, до положения  $Od_1e_1$ . Введем векторы  $\vec{Od}_1, \vec{Oe}_1, \vec{e}_1 d_1$ . Из того, что  $\vec{Od}_1 = A \times (B + C)$ ;  $\vec{C}_1 d_1 = A \times C$ ;  $\vec{Oe}_1 = A \times B$  и  $Od_1 = \vec{Oe}_1 + e_1 d_1$ , следует дистрибутивность векторного произведения.

Необходимое и достаточное условие параллельности двух векторов  $A$  и  $B$  имеет вид  $A \times B = 0$ .

Необходимость этого условия следует из того, что  $\sin(A, B) = 0$ , если  $A \parallel B$ , а при установлении достаточности следует помнить, что вектору, равному нулю, можно приписать любое направление.

Если принять вышеприведенное определение векторного произведения, то для ортов  $i_1, i_2, i_3$  правой системы координат,

в которой оси расположены, как показано на рис. 1.14, а, имеем

$$\begin{aligned} i_1 \times i_2 = i_3, \quad i_2 \times i_3 = i_1, \quad i_3 \times i_1 = i_2; \\ i_1 \times i_1 = i_2 \times i_2 = i_3 \times i_3 = 0, \end{aligned}$$

или

$$i_k \times i_l = i_m; \quad i_n \times i_n = 0, \quad (1.12)$$

где индексы  $k, l, m$  составляют циклическую\* (четную) перестановку чисел 1, 2, 3.

Можно было бы иначе определить направление векторного произведения: по движению не правого, а левого винта при вращении от  $A$  к  $B$ . Тогда векторное произведение будет направлено

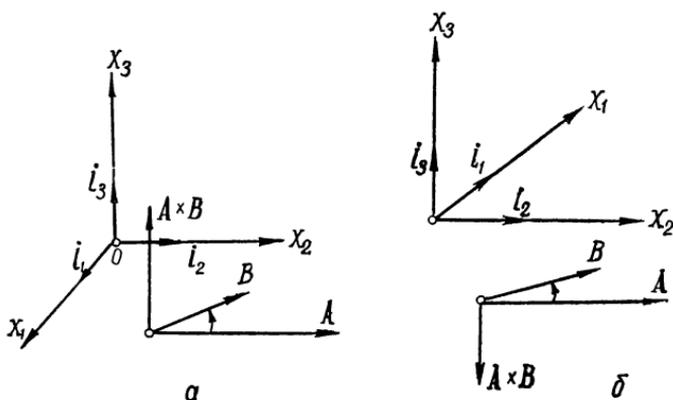


Рис. 1.14. Направление произведения  $A \times B$  в правой (а) и левой (б) системах координат.

в противоположную сторону. При этом формулы (1.12) имели бы место в левой системе координат, в которой оси расположены так, как показано на рис. 1.14, б, а векторное произведение имело бы направление противоположное тому, которое определено для правой системы координат (рис. 1.14, а).

Векторы, направление которых устанавливается соглашением и которые в силу этого изменяют свое направление при замене правой системы координат на левую, называются *аксиальными* (момент силы, угловая скорость и т. п.). Векторы, направление которых определяется только физическим смыслом (сила, скорость и т. п.) и которые в силу этого не меняют своего направления при изменении системы координат, называются *полярными*.

Для определения природы вектора можно представить отражение его в зеркале, перпендикулярном к нему. Если отражение сохраняет направление величины, описывающей явление, то вектор аксиальный (рис. 1.15).

Более подробно об аксиальных векторах (псевдовекторах) и подобных им величинах будет сказано в главе 3.

\* Циклические перестановки чисел 1, 2, 3 суть 123, 231, 312.

В дальнейшем всюду мы будем пользоваться только правой системой координат.

Выразим проекции векторного произведения через проекции сомножителей:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3) \times (B_1\mathbf{i}_1 + B_2\mathbf{i}_2 + B_3\mathbf{i}_3) = \\ &= \mathbf{i}_1 (A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{i}_2 (A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{i}_3 (A_1B_2 - A_2B_1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$C_1 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = A_2B_3 - A_3B_2;$$

$$C_2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2 = A_3B_1 - A_1B_3;$$

$$C_3 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 = A_1B_2 - A_2B_1,$$

или

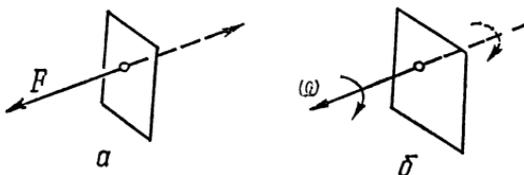
$$C_l = A_k B_l - A_l B_k, \quad (1.13)$$

где  $(i, k, l)$  составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Векторное произведение удобно записать в виде определителя:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Рис. 1.15. Полярные и аксиальные векторы: а) сила  $F$  — полярный вектор; направление ее действия изменяется на противоположное при отражении в зеркале; б) угловая скорость  $\omega$  — аксиальный вектор; вращение сохраняет свое направление при отражении в зеркале.



Векторное и скалярное произведения тесно связаны со многими физическими понятиями.

Работа силы, приложенной к точке, измеряется произведением величины перемещения точки и проекции силы на направление перемещения. Сила, перпендикулярная к перемещению, «работы не совершает». В связи с этим, если  $F$  — сила, а  $s$  — перемещение, работа  $A$  силы по определению равна

$$A = F_s s = F s \cos(F, s) = F \cdot s.$$

Если сила и перемещение составляют тупой угол (силы сопротивления), то их работе приписывают знак минус, что полностью согласуется с определением работы как скалярного произведения.

Простейшим физическим образом векторного произведения является момент силы  $F$  относительно некоторой точки  $O$ :  $M_0 = r \times F$ , где  $r$  — вектор, проведенный из точки  $O$  к началу вектора  $F$ .

Направление вектора  $M_0$  выбирается условно, точно так же, как и направление вектора угловой скорости вращения, вызываемого этим моментом силы. Положительное направление устанавливается в зависимости от выбора системы координат.

Если  $E$  — напряженность электрического поля в точке, где расположен электрический заряд  $e$ , то сила, действующая на этот заряд, равна  $F_e = eE$ .

На электрический заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $v$  в магнитном поле, напряженность которого в точке, где расположен заряд, равна  $H$ , действует

сила  $F_M = \frac{e}{c} (v \times H)$ . Таким образом, полная сила действия электромагнитного поля на заряд  $F = eE + \frac{e}{c} (v \times H)$ .

Если за время  $dt$  заряд перемещается на расстояние  $dr$ , то работа электромагнитного поля

$$F \cdot dr = F \cdot \frac{dr}{dt} dt = F \cdot v dt = \left[ eE + \frac{e}{c} (v \times H) \right] \cdot v dt.$$

Работа эта идет на изменение кинетической энергии  $U$  заряда. Так как сила  $F_M$  магнитного поля в каждый момент перпендикулярна к скорости  $v$ , то работа магнитного поля равна нулю, и вся работа электромагнитного поля определяется работой только электрического поля, равной за единицу времени

$$\frac{dU}{dt} = eE \cdot v.$$

Магнитное поле, не изменяя величины скорости, изменяет только направление движения электрического заряда.

## 1.5. Произведения трех векторов

Здесь мы отметим два типа произведений.

**Векторно-скалярное произведение**  $(A \times B) \cdot C$ . В силу определения скалярного произведения можно записать

$$V \equiv (A \times B) \cdot C = |A \times B| C_{A \times B} = |A \times B| h.$$

Здесь  $C_{A \times B} = h$  — проекция вектора  $C$  на направление вектора  $A \times B$  (рис. 1.16) — является высотой параллелепипеда, пост-

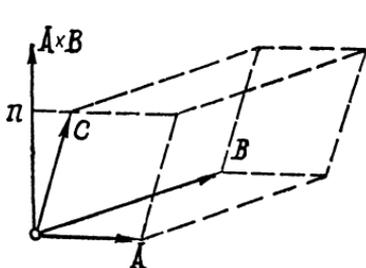


Рис. 1.16. Векторно-скалярное произведение трех векторов.

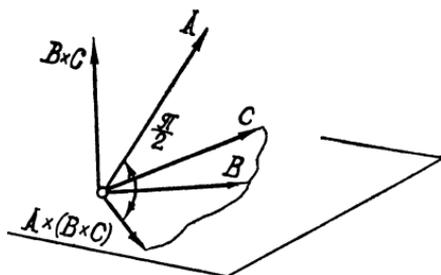


Рис. 1.17. Двойное векторное произведение трех векторов.

роенного на векторах  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Поскольку  $|A \times B|$  — площадь основания этого параллелепипеда, то векторно-скалярное произведение представляет собой объем параллелепипеда со знаком  $(+)$  или  $(-)$  в зависимости от того, будет ли острым или тупым угол между векторами  $C$  и  $A \times B$ .

Используя представления (1.10) и (1.14), получим удобную запись векторно-скалярного произведения через проекции сомножителей на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \cdot (C_1 i_1 + C_2 i_2 + C_3 i_3) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Отсюда вытекает важное следствие о неизменяемости значения векторно-скалярного произведения при циклической перестановке его векторов:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}. \quad (1.16)$$

Если два вектора в векторно-скалярном произведении одинаковы (или параллельны), то это произведение равно нулю:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Если три вектора  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  лежат в одной плоскости (компланарны), то объем параллелепипеда, построенного на них, равен нулю.

Отсюда необходимое и, как нетрудно видеть, достаточное условие компланарности векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  можно записать в виде

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.17)$$

Итак, если  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq 0$ , то векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  образуют базис. При этом, по определению, если  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) > 0$ , то базис  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  называется правым, если  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) < 0$ , то базис называется левым.

Тройка ортов правой системы декартовых координат образует правый базис, а тройка ортов левой системы — левый.

**Двойное векторное произведение  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ .** Это произведение трех векторов представляет собой вектор, который лежит в плоскости векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  и перпендикулярен к  $\mathbf{A}$ .

Поскольку векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  неколлинеарны, то на основании (1.1) существует единственное представление вида

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = m\mathbf{B} + n\mathbf{C}. \quad (1.18)$$

Определим скалярные множители  $m$  и  $n$ .

Обозначим  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ;  $\mathbf{D} \equiv (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ .

Вычислим проекции  $E_1, E_2, E_3$  вектора  $\mathbf{E}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат, введенной произвольно.

Согласно (1.13) получим  $E_1 = A_2 D_3 - A_3 D_2$ . В свою очередь,  $D_2 = (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_2 = B_3 C_1 - B_1 C_3$ ;  $D_3 = (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_3 = B_1 C_2 - B_2 C_1$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_1 &= A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) = \\ &= B_1 (A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_2 B_2 + A_3 B_3). \end{aligned}$$

Добавим и вычтем справа величину  $A_1 B_1 C_1$ . Тогда, учитывая (1.10), получим

$$\begin{aligned} E_1 &= B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) = \\ &= B_1 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_1 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Аналогично найдем  $E_2 = B_2(A \cdot C) - C_2(A \cdot B)$ ;

$$E_3 = B_3(A \cdot C) - C_3(A \cdot B).$$

Следовательно,  $m = A \cdot C$  и  $n = -A \cdot B$ .

Таким образом, окончательно

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B). \quad (1.19)$$

Как следствие, отсюда можно получить

$$(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C). \quad (1.20)$$

Формула (1.19) может быть получена и без введения координатной системы (см. например, Н. Е. Кочин «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления»).

**Замечание о «делении» векторов.** Решение уравнений обычно связано с действием деления, которое в векторном исчислении определяется неоднозначно. Действительно, определяя деление как действие, обратное умножению, прежде всего нужно рассматривать его отдельно для каждого из приведенных типов произведений. Но даже в простейшем случае скалярного произведения уравнение, определяющее неизвестный вектор  $x$ ,  $a \cdot x = m$  ( $a \neq 0$ ), имеет бесчисленное множество решений.

Аналитически это уравнение определяет только одну проекцию неизвестного вектора  $x$  на направление вектора  $a$  (рис. 1.18). Поэтому в векторном исчислении предпочитают вовсе отказаться от операции деления на вектор.

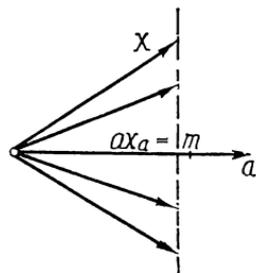


Рис. 1.18. Уравнение  $x \cdot a = ax_a = m$ . Это уравнение определяет только проекцию неизвестного вектора  $x$  на заданный вектор  $a$ .

## 1.6. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора. Сокращенные обозначения

**Взаимные базисы вектора.** Нахождение проекции некоторого вектора  $A$  на оси прямоугольной системы координат с ортами  $i_1, i_2, i_3$  сводится к определению скалярных произведений  $A \cdot i_1, A \cdot i_2, A \cdot i_3$ . Эти скаляры определяют разложение данного вектора по трем заданным взаимно-перпендикулярным направлениям, характеризуемым векторами  $a_1, a_2, a_3$ . Если учесть, что  $i_1 = a_1 : a_1, i_2 = a_2 : a_2, i_3 = a_3 : a_3$ , то такое разложение может быть записано в виде

$$A = \sum_{k=1}^3 \left( A \cdot \frac{a_k}{a_k^2} \right) a_k. \quad (1.21)$$

Задача разложения заданного вектора  $B$  по трем произвольным некомпланарным векторам  $b_1, b_2, b_3$  сводится к определе-

нию трех неизвестных  $B^1, B^2, B^3$  (числа 1, 2, 3 — индексы, а не степени\*) из системы трех скалярных уравнений, получаемых проектированием выражения  $\mathbf{B} = B^1 \mathbf{b}_1 + B^2 \mathbf{b}_2 + B^3 \mathbf{b}_3$  на оси какой-либо системы координат.

Прямой путь решения этой важной задачи — использование взаимных базисов векторов.

Два базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  и  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  называются взаимными (биортогональными), если их векторы удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (1.22)$$

Подчеркнем, что  $\mathbf{e}_k$  расположены друг к другу под произвольными углами (косоугольная система координат) и модули их могут отличаться от единицы.

Из этого определения видно, что каждый вектор одного базиса перпендикулярен к двум векторам взаимного базиса, а с третьим вектором, индекс которого имеет то же численное значение, составляет острый угол\*\*.

Таким образом, если на двух взаимных базисах построить параллелепипеды с объемами  $|V_1| = |\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|$  и  $|V'| = |\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)|$ , то ребра одного из них будут перпендикулярны к граням другого, и наоборот.

Условие  $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 = 1$ , например, означает, что

$$|\mathbf{e}^3| = \frac{1}{|\mathbf{e}_3| \cos(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3)} = \frac{1}{h} \quad (1.23)$$

(рис. 1.19), т. е. модули векторов одного базиса равны обратным значениям параллельных им высот параллелепипеда взаимного базиса.

Рассмотрим построение базиса, взаимного данному.

Пусть дан базис  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Вектор  $\mathbf{e}^1$  взаимного базиса должен быть перпендикулярен к векторам  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ :  $\mathbf{e}^1 = m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ .

Скаляр  $m$  определяется из условия  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1$ , т. е.  $m \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1$ .

Поскольку  $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$  (векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  составляют базис), получим

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V}.$$

\* Верхний индекс в обозначениях координат, а впоследствии и векторов  $\mathbf{e}^k$  не означает показателя степени. Удобство такого обозначения станет ясным позже, при рассмотрении контравариантных составляющих вектора.

\*\* Например, так как  $|\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}^1| \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^1) > 0$ , то  $\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^1) > 0$  и, следовательно, угол между  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}^1$  — острый.

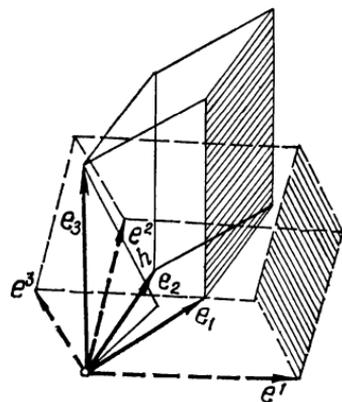


Рис. 1.19. Взаимные базисы и построенные на них параллелепипеды.

Здесь  $|V'|$  — объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

Аналогично строятся векторы  $\mathbf{e}^2$  и  $\mathbf{e}^3$ :

$$\mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V'}; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V'}.$$

Эти соотношения можно записать короче:

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n)}, \quad (1.24)$$

где  $(i, j, k)$  и  $(l, m, n)$  составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3.

Полученные формулы дают выражения для векторов  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$  через векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Аналогично можно получить выражения векторов первого базиса через векторы второго:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)} = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{V'}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{V'}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{V'},$$

где  $|V'|$  — объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ .

Сокращенная запись этих соотношений имеет вид

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k}{\mathbf{e}^l \cdot (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n)}. \quad (1.25)$$

Отметим два важных свойства взаимных базисов.

1) Если  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  — базис прямоугольной системы координат, то взаимный к нему базис  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  совпадает с основным, т. е.

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}_1; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = \mathbf{i}_2; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = \mathbf{i}_3.$$

Доказательство следует из свойств (1.8) и (1.12) ортов прямоугольной системы координат.

2) Взаимные базисы либо оба правые, либо оба левые. Это следует из того, что  $V'V = 1$  (доказательство этого утверждения предоставляется читателю). Таким образом, если  $V' > 0$ , то  $V > 0$ .

Для определения  $B^k$  из векторного уравнения

$$\mathbf{B} = B^1 \mathbf{b}_1 + B^2 \mathbf{b}_2 + B^3 \mathbf{b}_3 = \sum_{k=1}^3 B^k \mathbf{b}_k, \quad (1.26)$$

где  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  — некопланарные векторы, умножим скалярно  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{b}^i$  — вектор взаимного базиса.

Тогда

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}^i = \sum_{k=1}^3 B^k \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}^i = B^i. \quad (1.27)$$

Это и есть искомое решение. Так, например,

$$B^1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}. \quad (1.28)$$

Таким образом, разложение вектора по базису выражается через проекции вектора на взаимный базис, т. е.  $B = \sum_{k=1}^3 (B \cdot b^k) b_k$ .

Используя построение взаимного базиса, можно легко решить задачу об определении вектора  $A$ , удовлетворяющего трем уравнениям:

$$A \cdot a_1 = m_1; A \cdot a_2 = m_2; A \cdot a_3 = m_3, \quad (*)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — некопланарные векторы,  $m_1, m_2, m_3$  — скаляры.

Единственное решение этой задачи имеет вид

$$A = m_1 a^1 + m_2 a^2 + m_3 a^3.$$

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет заданной системе. Если  $A'$  — второе решение, т. е.

$$A' \cdot a_1 = m_1; A' \cdot a_2 = m_2; A' \cdot a_3 = m_3, \quad (**)$$

то, вычитая из каждого уравнения системы соответствующее уравнение системы (\*\*), получим  $(A - A') \cdot a_1 = (A - A') \cdot a_2 = (A - A') \cdot a_3 = 0$ .

Вектор  $A - A'$ , перпендикулярный ко всем векторам базиса  $a_1, a_2, a_3$ , может быть только нулем, т. е.  $A = A'$ , и найденное решение единственно.

**Сокращенные обозначения.** В современной физической и математической литературе принято считать:

1. Каждый буквенный индекс, встречающийся в выражении один раз, может принимать значения 1, 2, 3.

При этом, поскольку для обозначения координатных осей выбраны буквы с индексами (например,  $x_1, x_2, x_3$  или  $x^1, x^2, x^3$ ), под записью  $A_i$ , например, будем понимать совокупность трех величин  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$ ; запись  $A_{ik}$  означает совокупность  $3^2 = 9$  величин:  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ ; запись  $A^{ik}$  — совокупность девяти величин:  $A^{11}, A^{12}, \dots, A^{33}$ .

2. По дважды повторяющемуся в одночлене индексу следует производить суммирование от 1 до 3.

Таким образом, выражения  $A_{ii}, A_i B^i, A_i B^k C^i$  означают

$$A_{ii} = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

$$A_i B^i = \sum_{i=1}^3 A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3,$$

$$A_i B^k C^i = B^k \sum_{i=1}^3 A_i C^i = B^k (A_1 C^1 + A_2 C^2 + A_3 C^3).$$

Равенства (1.4) и (1.5) можно поэтому записать в виде

$$e'_i = \alpha_i^k e_k; e_j = \alpha_j^{k'} e'_k.$$

Эти обозначения распространяются и на более сложные суммы, например, равенства (1.6) можно записать так:

$$e'_i = \alpha_i^l \alpha_l^{k'} e'_k; e_i = \alpha_i^{l'} \alpha_l^k e_k.$$

Индексы суммирования часто называются «немыми» в том смысле, что сумма, очевидно, не меняет значения, если заменить «немой» индекс другой буквой:  $A_{ii} \equiv A_{kk} \equiv A_{11} + A_{22} + A_{33}$  и т. п.

Кроме этих общепринятых обозначений, условимся, что если имеются две системы координат  $(K)$  и  $(K')$ , то координаты какой-то точки в системе  $(K)$  будем обозначать через  $x_i$  (или  $x^i$ , если система  $(K)$  не является декартовой прямоугольной системой координат), а координаты той же самой точки в системе  $(K')$  будем обозначать через  $x'_i$  (или  $x'^i$ , если система  $(K')$  не является декартовой прямоугольной системой координат).

Аналогичных обозначений будем придерживаться и для компонент векторов (и тензоров вообще).

Условность здесь заключается в том, что, например,  $A_1$  и  $A'_1$  суть компоненты одного и того же вектора  $A$  по первой оси системы  $(K)$  и по первой оси системы  $(K')$  соответственно, а отнюдь не компоненты двух разных векторов в какой-то одной системе.

**Ковариантные и контравариантные компоненты вектора.** При рассмотрении вопроса о взаимных базисах было показано, что один и тот же вектор (рис. 1.20) можно представить разложенным по векторам основного базиса

$$\begin{aligned} A &= A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = \\ &= \sum_{k=1}^3 A^k e_k \equiv A^k e_k; \quad (1.29) \\ A^k &= A \cdot e^k \end{aligned}$$

и взаимного

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3 = \\ &= \sum_{k=1}^3 A_k e^k \equiv A_k e^k, \quad (1.30) \\ A_k &= A \cdot e_k \end{aligned}$$

(последние записи равенств даны в сокращенных обозначениях).

Числа  $A^k$  называются *контравариантными*, а числа  $A_k$  *ковариантными* компонентами вектора  $A$ .

Читателю следует обратить внимание на рис. 1.20, где изображен вектор  $A$ , лежащий в плоскости векторов  $e_1$  и  $e_2$  и его ко- и контравариантные компоненты.

Названия компонент вектора связаны с тем, что *прямое* преобразование *ковариантных* компонент выполняется с помощью коэффициентов  $\alpha_i^k$  *прямого* преобразования, т. е.

$$A'_i = \alpha_i^k A_k, \quad (1.31)$$

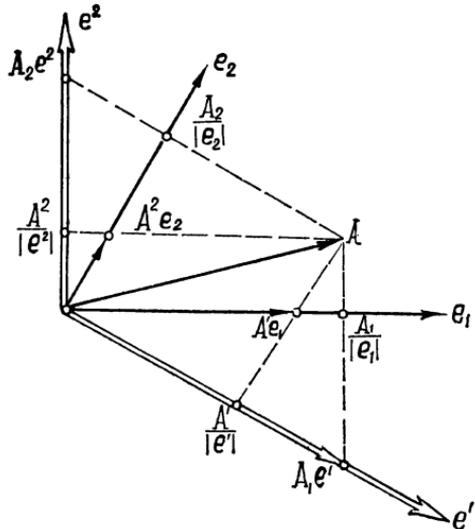


Рис. 1.20. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора на плоскости. Ковариантные компоненты  $A_1, A_2$  могут быть найдены либо по составляющим  $A_1 |e^1|, A_2 |e^2|$  вектора  $A$  по направлениям взаимного базиса, либо по проекциям  $\frac{A_1}{|e_1|}, \frac{A_2}{|e_2|}$  вектора на оси основного базиса. Контравариантные компоненты  $A^1, A^2$  можно найти из составляющих  $A^1 e_1, A^2 e_2$  по направлениям основного базиса, а также из проекций на оси взаимного базиса  $\frac{A^1}{|e^1|}, \frac{A^2}{|e^2|}$ .

а *контравариантных* компонент — с помощью коэффициентов  $\alpha_k^{i'}$  *обратного* преобразования, т. е.

$$A'^i = \alpha_k^{i'} A^k. \quad (1.32)$$

В случае обратного преобразования имеют место «обратные» формулы

$$A_i = \alpha_i^{k'} A'_k; \quad A^i = \alpha_k^i A'^k. \quad (1.33)$$

Действительно, пусть в системе координат, определяемой базисом  $(e_1, e_2, e_3)$ , мы имеем ковариантные компоненты  $A_i$  и контравариантные  $A^i$  вектора  $A$ .

Определим в другой координатной системе с базисом  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  ковариантные компоненты  $A'_i$  (*того же вектора A*) через его компоненты  $A_i$  и контравариантные компоненты  $A'^i$  через  $A^i$ .

Заметим прежде всего, что из (1.4) и (1.5) § 1.3 следуют выражения для коэффициентов прямого и обратного преобразования:

$$\alpha_i^{k'} = e'_i \cdot e^k; \quad \alpha_k^i = e_i \cdot e'^k. \quad (1.34)$$

Умножим обе части разложения  $A = A_k e^k$  скалярно на вектор  $e'_i$ . Получим  $A \cdot e'_i = A_k e_i \cdot e^k$ .

В силу (1.30) и (1.34) получаем закон преобразования (1.31).

Аналогично, умножая разложение  $A = A^k e_k$  скалярно на  $e'^i$ , в силу (1.29) и (1.34) получаем закон (1.32).

Читателю предоставляется самостоятельно получить формулы (1.33) обратного преобразования.

В связи с понятием контравариантных компонент вектора важно отметить, что *косоугольные декартовы координаты* точки следует писать с индексом вверху  $x^1, x^2, x^3$ . Это становится ясным, если учесть, что такие координаты являются контравариантными компонентами радиуса-вектора данной точки (см. рис. 1.7) так, что  $r = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \equiv x^k e_k$ .

**Физические компоненты вектора.** Следует отметить, что размерности компонент  $A^i$  и  $A_i$  одного и того же вектора  $A = A^i e_i = A_i e^i$  различны: они определяются размерностями базисных векторов и соотношением  $e_i \cdot e^i = 1$ .

При определении операций векторы рассматриваются геометрически как направленные отрезки с длиной, пропорциональной величине вектора, и физическая размерность их не принимается во внимание (за исключением основного правила, что все векторы, входящие в уравнение слагаемыми, должны иметь одинаковую физическую размерность).

Можно, однако, ввести так называемые «физические» (иногда «фактические») компоненты вектора, размерности которых будут совпадать с размерностями рассматриваемого вектора. Для этого определим *векторный единичный* базис  $e_i^*$  и, соответственно, взаимный ему  $e^{*i}$  с помощью соотношений

$$e_i^* = \frac{e_i}{|e_i|}; \quad e^{*i} = e^i |e_i|, \quad (1.35)$$

и тогда

$$A = A^{*i} e_i^* = A_i^* e^{*i}, \quad (1.36)$$

где  $A^{*i}, A_i^*$  — физические компоненты вектора  $A$ .

Связь физических компонент с ко- и контравариантными компонентами найдется без труда:

$$A^{*i} = A^i |e_i|; \quad A_i^* = \frac{A_i}{|e_i|} \quad (\text{нет суммирования по } i). \quad (1.37)$$

Как видно (рис. 1.21),  $A^{*i}$  являются *компонентами* (параллельными проекциям) вектора  $A$  при разложении его по ортам  $e_i^*$  основного базиса, а

$A_i^*$  — проекции (ортогональные) этого же вектора  $A$  на оси того же базиса.

Можно за основу принять взаимный базис и определить единичный векторный базис соотношениями:

$$e^{**k} = \frac{e^k}{|e^k|}; \quad e_k^{**} = e_k |e^k|. \quad \text{Это дает} \quad e^{**k} = e^{*k} \cos(e^k, e_k); \quad e_k^{**} = \frac{e_k^*}{\cos(e^k, e_k)}$$

и  $A_k^{**} = \frac{A_k^*}{\cos(e^k, e_k)}$ ;  $A^{**k} = A^{*k} \cos(e^k, e_k)$ , т. е. оба определения равнозначны и все сводится к выбору масштаба для единицы.

Подчеркнем, что все вычисления почти всегда производятся с обычными ко- и контравариантными компонентами и только в конце, если нужно, делается пересчет на физические компоненты.

**Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора.** Выражение ковариантных компонент вектора через его контравариантные компоненты, и наоборот, можно получить, если разложения (1.29) умножить скалярно на  $e_i$ , а (1.30) — на  $e^i$ :

$$A \cdot e_i = A^k (e_k \cdot e_i), \quad A \cdot e^i = A_k (e^k \cdot e^i). \quad (1.38)$$

Введем обозначения:

$$e_k \cdot e_i = g_{ik} = g_{ki}, \quad e^k \cdot e^i = g^{ik} = g^{ki}, \quad (1.39)$$

$$e^k \cdot e_i = g_i^k \equiv \delta_i^k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Тогда из (1.38) следуют формулы

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad (1.40)$$

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad (1.41)$$

которые и дают искомые выражения.

Девять величин  $g_{ik}$  (и соответственно  $g^{ik}$  и  $g_i^k \equiv \delta_i^k$ ), как в дальнейшем будет показано, составляют тензор второго ранга — так называемый *метрический тензор*. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства этих величин, ибо они являются основной характеристикой пространства, арифметизированного введенной системой координат с базисом  $(e_1, e_2, e_3)$ .

Рассмотрим квадрат длины дуги  $\Delta_s$  между двумя бесконечно близкими точками  $x^i$  и  $x^i + \Delta x^i$  в системе координат с базисом  $(e_1, e_2, e_3)$ .

Получим  $\Delta s^2 = |\Delta r|^2 = \Delta r \cdot \Delta r = e_i \Delta x^i \cdot e_k \Delta x^k = e_i \Delta x^i \cdot e^k \Delta x_k = e^i \Delta x_i \cdot e^k \Delta x_k$ .

Используя обозначения (1.39), имеем  $\Delta s^2 = g_{ik} \Delta x^i \Delta x^k$ ,

$$\Delta s^2 = g^{ik} \Delta x_i \Delta x_k, \quad \Delta s^2 = \Delta x_i \Delta x^i, \quad (1.42)$$

где  $\Delta x_i$  — ковариантные, а  $\Delta x^i$  — контравариантные компоненты вектора  $\Delta r$ .

Формулы (1.42) определяют квадрат элементарной дуги в выбранной системе координат через  $g_{ik}$  (или  $g^{ik}$ ). Говорят, что величины  $g_{ik}$  (или  $g^{ik}$ ) определяют *метрику пространства*, арифметические свойства которого устанавливаются введенной системой координат  $x^1, x^2, x^3$ .

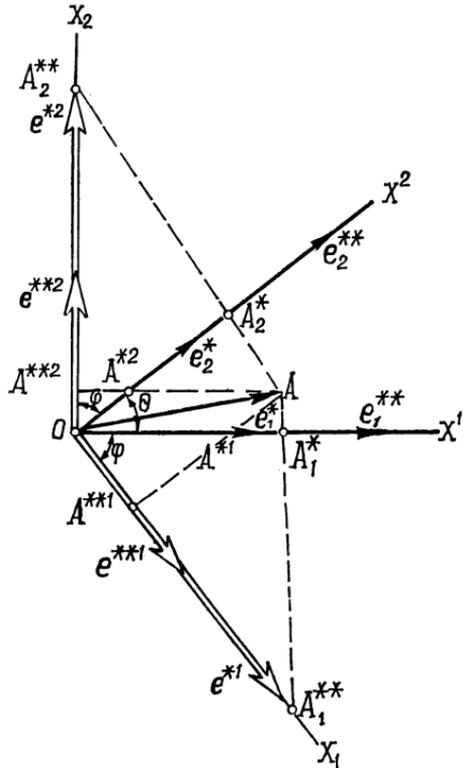


Рис. 1.21. Физические составляющие вектора.

Связь между величинами  $g_{ik}$  и  $g^{ik}$  можно установить, если рассмотреть выражения  $A_i = g_{ik}A^k$  ( $i = 1, 2, 3$ ) как систему трех линейных уравнений относительно  $A^1, A^2, A^3$ . Решение этой системы имеет вид

$$A^i = \frac{\sum_{k=1}^3 G^{ik}A_k}{G} = \frac{G^{ik}A_k}{G}, \quad (1.43)$$

где

$$G = \det \| g_{ik} \| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix};$$

$G^{ik}$  — алгебраическое дополнение, соответствующее члену  $g_{ik}$  детерминанта  $G$ , может быть записано в виде

$$G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix},$$

где индексы  $(i, p, r)$  и  $(k, s, t)$  составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3. Таким образом, например, имеем

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22}g_{33} \\ g_{32}g_{33} \end{vmatrix}; \quad G^{12} = \begin{vmatrix} g_{23}g_{31} \\ g_{33}g_{31} \end{vmatrix}; \quad G^{13} = \begin{vmatrix} g_{21}g_{22} \\ g_{31}g_{32} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая теперь (1.43) с (1.41), получим искомую связь:

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G}. \quad (1.44)$$

Аналогичным путем можно получить выражение

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \quad (1.45)$$

где

$$G' = \det \| g^{ik} \|, \quad G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{ps} & g^{pt} \\ g^{rs} & g^{rt} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением, учитывая (1.39) и (1.24), получим

$$g^{ik} = e^i \cdot e^k = \frac{1}{V^2} (e_p \times e_r) \cdot (e_s \times e_t) = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} e_p \cdot e_s & e_p \cdot e_t \\ e_r \cdot e_s & e_r \cdot e_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} g_{ps}g_{pt} \\ g_{rs}g_{rt} \end{vmatrix}.$$

Здесь использовано свойство (1.15) векторно-скалярного произведения и выражение (1.19) для двойного векторного произведения.

Сравнивая это выражение для  $g^{ik}$  с (1.40), получим

$$G = V^2; \quad V = \pm \sqrt{G}. \quad (1.46)$$

В соответствии с принятыми определениями (см. § 1.5) знак у корня в случае правой системы выбирается положительным.

Поскольку аналогичным путем можно получить

$$V' = \pm \sqrt{G'}, \quad (1.47)$$

то, учитывая  $V \cdot V' = 1$ , найдем как следствие

$$G \cdot G' = 1. \quad (1.48)$$

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен  $\sqrt{G}$ , а на векторах взаимного базиса —  $\sqrt{G'}$ .

**Случай ортогональных базисов.** Рассмотрим его особо, так как ортогональные системы координат наиболее распространены в приложениях.

Как уже отмечалось, ортогональный базис совпадает со своим взаимным. В этом случае из величин  $g_{ik}$  согласно (1.39) отличны от нуля только  $g_{11}$ ,  $g_{22}$ ,  $g_{33}$ .

Тогда из (1.40) и (1.41) следует

$$A_1 = g_{11}A^1; A_2 = g_{22}A^2; A_3 = g_{33}A^3; A^1 = g^{11}A_1; A^2 = g^{22}A_2; A^3 = g^{33}A_3. \quad (1.49)$$

Значит,

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}; g_{22} = \frac{1}{g^{22}}; g_{33} = \frac{1}{g^{33}}; \quad (1.50)$$

и, кроме того, имеем  $\Delta s^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 + g_{33}(\Delta x^3)^2$ . (1.51)

Коэффициенты  $H_i = \sqrt{g_{ii}}$  (не суммируется по  $i$ ) носят название *коэффициентов Лямэ*. (1.52)

В случае ортогональных координат физические компоненты  $A^{*i}$  и  $A_i^*$  совпадают. В прямоугольной декартовой системе координат физические, ковариантные и контравариантные компоненты совпадают.

**Замечание по поводу «верхних» и «нижних» индексов.** Для контроля написания формул может служить правило, носящее в некоторой степени мнемонический характер. Оно гласит: *суммирование может производиться только по разноименным (верхний и нижний) «немым» индексам.*

Например, формулы  $A_i B^i$ ,  $g^{ik} A_k$  и т. п. означают правильно написанные суммы. Но выражения  $A^k B^k$ ,  $g^{ik} A^k$  не имеют смысла как суммы.

В связи с этим о выражении  $A^i = g^{ik} A_k$  иногда говорят как об операции «поднятия индекса», а о выражении  $A_i = g_{ik} A^k$  — как об операции «опускания индекса» (оператор—совокупность девяти коэффициентов  $g_{ik}$  или  $g^{ik}$ ).

Эти замечания полезно иметь в виду и в дальнейшем, особенно при алгебраических действиях с тензорами. Все сказанное выше относится к компонентам тензоров в системах обобщенных координат. В прямоугольной декартовой системе, конечно, допустимы записи  $A_i B_i$ ,  $C_{ik} A_k$  и т. п. (см. также стр. 100).

## 1.7. Переменные векторы

**Вектор-функция скалярного аргумента.** Векторы, так же как и скаляры, могут изменяться в пространстве от точки к точке и с течением времени:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ .

Здесь рассматриваются векторы, зависящие только от одной скалярной величины — *вектор-функции скалярного аргумента*. Ее определение строится аналогично определению скалярной функции скалярного аргумента.

Если каждому допустимому численному значению скалярной величины  $t$  соответствует одно вполне определенное значение вектора  $\mathbf{A}$ , то говорят, что задана вектор-функция от скалярного аргумента  $t: \mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ . При этом, вообще говоря, все компоненты являются функциями  $t: A_i = A_i(t)$ .

Изменение вектор-функции означает изменение как величины, так и направления вектора.

Изменение вектор-функции от скалярного аргумента графически изображается *годографом вектора*.

Годографом вектора  $\mathbf{A}$  называется геометрическое место, образованное концами вектора при изменении  $t$ , если вектор откладывать (рис. 1.22) из некоторой фиксированной точки (полюса).

Если вектор меняется только по величине, его годографом является прямая (рис. (1.23), если вектор меняется только по направлению, — сферическая кривая (рис. 1.23).

Если вектор имеет годографом прямую, то в общем случае он может меняться как по величине, так и по направлению (рис. 1.23), но всегда может быть представлен в виде суммы постоянного вектора и вектора переменного только по величине:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{c} + \mathbf{a}(t),$$

где  $\mathbf{c}$ ,  $\frac{a_i}{|\mathbf{a}|}$  — постоянные величины.

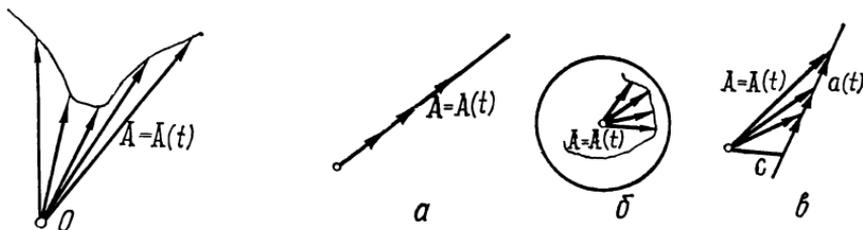


Рис. 1.22. Годограф вектор-функции скалярного аргумента. Геометрической характеристикой вектор-функции служит ее годограф — кривая, описываемая концом вектора.

Рис. 1.23. Примеры годографов:

а) годограф вектор-функции, меняющейся только по величине, — прямая; б) годограф вектор-функции, меняющейся только по направлению, — сферическая кривая; в) вектор-функция, имеющая годографом прямую, может быть представлена в виде суммы постоянного вектора и вектора, меняющегося только по величине.

**Векторная производная.** Если для переменного вектора  $\mathbf{A}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  существует такой постоянный вектор  $\mathbf{A}_0$ , что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_0| = 0,$$

то вектор  $\mathbf{A}_0$  называется пределом при  $t \rightarrow t_0$  вектор-функции  $\mathbf{A}(t)$ .

Производной  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  от вектор-функции по скалярному аргументу (векторной производной) называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (1.53)$$

Поскольку вектор  $\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}$  направлен по секущей к годографу, вектор  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ , являющийся пределом  $\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , направлен по касательной к годографу вектора  $\mathbf{A}(t)$  (рис. 1.24).

Векторная производная  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  всегда направлена по касательной к годографу вектора  $\mathbf{A}(t)$ .

Если выбрать *постоянные* (не зависящие от изменения аргумента  $t$ ) *оси декартовой прямоугольной системы координат*, то

$$\mathbf{A}(t) = A_k(t) \mathbf{i}_k,$$

где  $\mathbf{i}_k$  — постоянные векторы.

Тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}_k \frac{dA_k}{dt}; \quad \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_k = \frac{dA_k}{dt}.$$

Компоненты векторной производной  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  являются производными от компонент вектор-функции  $\mathbf{A}(t)$ , если координатная система не меняется с течением аргумента  $t$ . При этом величина векторной производной может быть вычислена по формуле

$$\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dA_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_3}{dt}\right)^2}. \quad (1.54)$$

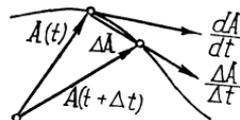


Рис. 1.24. Производная вектор-функции скалярного аргумента. Это вектор, направленный по касательной к годографу этой функции.

Если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор материальной точки, а  $t$  — время, то движение точки в самом общем случае характеризуется ее уравнением движения или вектор-функцией  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

Истинной скоростью  $\mathbf{V}$  в момент времени  $t$  является вектор-функция  $\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , а истинным ускорением  $\mathbf{W}$  — вектор-функция  $\mathbf{W}(t) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ .

Правила дифференцирования вектор-функций устанавливаются из определения производной вектор-функции и имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \quad 2) \frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{A}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{A} + \varphi \frac{d\mathbf{A}}{dt}; \quad 3) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \quad 4) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Рассмотрим, например, доказательство правила (4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \times (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \Delta\mathbf{B}) + (\Delta\mathbf{A} \times \Delta\mathbf{B})}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \times \mathbf{B}\right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{A} \times \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \times \Delta\mathbf{B} = \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \end{aligned}$$

Заметим, что при использовании правила (4) следует всегда учитывать некоммутативность векторного произведения.

**Неопределенный интеграл от вектор-функции.** Неопределенным интегралом от вектор-функции  $\mathbf{A}(t)$  называется вектор-функ-

ция  $\mathbf{B}(t) \equiv \int \mathbf{A}(t) dt$ , векторная производная которой равна  $\mathbf{A}(t)$ , т. е.  $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{A}(t)$ .

Таким образом,

$$\mathbf{B}(t) = \int \mathbf{A}(t) dt + \mathbf{C}, \quad (1.56)$$

где  $\mathbf{C}$  — постоянный вектор.

Если выбрана неизменная (не зависящая от  $t$ ) система координат, то компоненты неопределенного интеграла полностью определяются неопределенными интегралами от компонент вектор-функции, т. е.

$$B_i = \int A_i(t) dt + C_i. \quad (1.57)$$

Величины  $B_i$  являются компонентами вектора.

Аналогично можно ввести понятие определенного интеграла.

## Задачи с решениями

**Задача 1.** Получить формулы линейного ортогонального преобразования координат.

**Решение.** Пусть в пространстве введены две прямоугольные декартовы системы координат  $(K)$  и  $(K')$  (рис. 1.25). Задача состоит в выражении координат  $(x_1, x_2, x_3)$  произвольной точки  $M$  в системе  $(K)$  через координаты  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  в системе  $(K')$ , и наоборот.

Пусть  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — соответственно радиусы-векторы точки  $M$  в системах  $(K)$  и  $(K')$ , орты которых  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  и  $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$ . Положение начала  $O_1$  системы  $(K')$  в системе  $(K)$  определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}_{01}$ , а положение начала системы  $(K)$  в системе  $(K')$  — радиусом-вектором  $\mathbf{r}'_0$ , так что  $\mathbf{r}_{01} = -\mathbf{r}'_0$ . Пусть, наконец,  $\alpha_{i'k}$  — косинус угла между  $i$ -й осью системы  $(K')$  и  $k$ -й осью системы  $(K)$ , так что

$$\alpha_{i'k} = \cos(x'_{i'}, x_k) = \mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_k. \quad (*)$$

Тогда (рис. 1.25)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{01}; \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_0.$$

Используя выражение для радиуса-вектора, получим\*

$$x_k \mathbf{i}_k = x'_k \mathbf{i}'_k + x_{k01} \mathbf{i}_k; \quad (**)$$

$$x'_k \mathbf{i}'_k = x_k \mathbf{i}_k + x_{k0} \mathbf{i}'_k. \quad (***)$$

Умножая (\*\*), скалярно на  $\mathbf{i}_i$ , а (\*\*\*) на  $\mathbf{i}'_i$  и используя (1.8) и (\*), найдем  $x_i = (\mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}_i) x'_k + x_{i01} = \alpha_{k'i} x'_k + x_{i01}$ ;  $x'_i = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}'_i) x_k + x_{i0} = \alpha_{i'k} x_k + x_{i0}$ .

Эти выражения и представляют формулы линейного ортогонального преобразования координат.

Коэффициенты  $\alpha_{i'k}$  удовлетворяют условиям ортогональности, которые можно получить, используя формулу (1.9) для разложения ортов  $\mathbf{i}_k$  системы  $(K)$  по ортам  $\mathbf{i}'_k$  системы  $(K')$  и ортов  $\mathbf{i}'_k$  по ортам  $\mathbf{i}_k$ .

Полагая в (1.9)  $\mathbf{A} = \mathbf{i}'_i$ , получим  $\mathbf{i}'_i = \alpha_{i'j} \mathbf{i}_j$ . Аналогично  $\mathbf{i}_i = \alpha_{i'j} \mathbf{i}'_j$ .

\* Следует помнить, что  $x_k \mathbf{i}_k \equiv \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{i}_k = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3$ .

Умножая первое разложение скалярно на  $i'_k$ , а второе — на  $i_k$ , найдем

$$i'_i \cdot i'_k = \alpha_{i' i} \alpha_{k' i}; \quad i_i \cdot i_k = \alpha_{i' i} \alpha_{i' k}.$$

Используя (1.8) и вводя символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}$$

получим

$$\alpha_{i' i} \alpha_{k' i} = \delta_{i' k}, \quad \alpha_{i' i} \alpha_{i' k} = \delta_{ik}.$$

**Задача 2.** Доказать теорему косинусов в треугольнике.

**Решение.** Изобразим стороны треугольника  $ABC$  в виде векторов  $AB \equiv c$ ,  $AC \equiv b$ ,  $CB \equiv a$ . Тогда  $a + b = c$ . Возведем это выражение в квадрат:

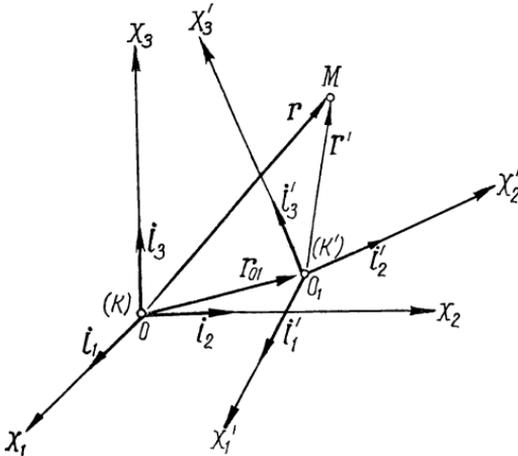


Рис. 1.25. Преобразование декартовых координат.

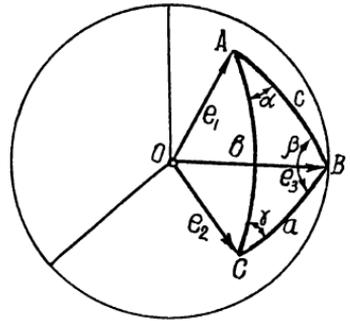


Рис. 1.26. Обозначения углов в сферической тригонометрии.

$a^2 + b^2 + 2a \cdot b = c^2$ . Используя понятие скалярного произведения, получим  $a \cdot b = ab \cos(a, b) = ab \cos(\pi - \alpha) = -ab \cos \alpha$ , где  $\alpha = \angle ACB$ . Таким образом,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ .

**Задача 3.** Доказать, что  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

**Указание.** Применить формулу  $\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$  к двум векторам  $|a| = |b| = 1$ , лежащим в плоскости  $(xy)$  и составляющим углы  $\alpha$  и  $\beta$  с осью  $(x)$ .

**Задача 4.** Выразить скалярное произведение двух векторов через ковариантные и контрвариантные компоненты.

**Решение.** По определению  $A \cdot B = A^i e_i \cdot B^k e_k = A_i e_i \cdot B_k e^k = A_i e^i \cdot B^k e_k = A^i e_i \cdot B_k e^k = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k = A_i B^i = A^i B_i$ , ибо в силу (1.39)

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Так как модуль вектора  $A$ , например, равен

$$|A| = A = \sqrt{A \cdot A} \equiv \sqrt{g_{ik} A^i A^k} = \sqrt{g^{ik} A_i A_k} = \sqrt{A_i A^i}.$$

то угол между векторами  $A$  и  $B$  может быть найден по одной из следующих формул:

$$\cos(A, B) = \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}} = \frac{g^{ik} A_i B_k}{\sqrt{g^{ik} A_i A_k} \sqrt{g^{ik} B_i B_k}} = \frac{A_i B^i}{\sqrt{A_i A^i} \sqrt{B_i B^i}}$$

(числитель и подкоренное выражение записаны в сокращенных обозначениях).

**Задача 5.** Выразить векторное произведение двух векторов в косоугольной системе координат.

**Решение.**

По определению

$$\begin{aligned} C &= A \times B = A^j e_j \times B^i e_i = (A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3) \times (B^1 e_1 + B^2 e_2 + B^3 e_3) = \\ &= A^1 B^1 (e_1 \times e_1) + A^1 B^2 (e_1 \times e_2) + A^1 B^3 (e_1 \times e_3) + A^2 B^1 (e_2 \times e_1) + \dots + \\ &\quad + A^3 B^3 (e_3 \times e_3) = (e_i \times e_j) (A^i B^j - A^j B^i). \end{aligned}$$

Но по (1.24) и (1.46)  $Ve^k = e_i \times e_j$ ;  $V_1 = \sqrt{G}$ . Поэтому  $C = A \times B = C_k e^k$ , где  $C_k = \sqrt{G} (A^i B^j - A^j B^i)$ . Так же можно показать, что  $C^k = \frac{1}{\sqrt{G}} (A_i B_j - A_j B_i)$ .

**Задача 6.** Вывести основные формулы сферической тригонометрии.

**Решение.**

Возьмем на сфере единичного радиуса сферический треугольник  $ABC$  (рис. 1.26), высекаемый трехгранным углом  $OABC$ . Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы этого треугольника, а длины его сторон равны  $a, b, c$ . Поскольку радиус сферы равен единице, то  $a$  равно плоскому углу  $BOC$ ,  $b$  — плоскому углу  $AOC$  и  $c$  — плоскому углу  $AOB$ .

Установим зависимость между углами  $\alpha, \beta, \gamma$  сферического треугольника и его сторонами  $a, b, c$  (плоскими углами трехгранного угла  $OABC$ ).

Введем *единичные* векторы  $e_1, e_2, e_3$  (рис. 1.26), направленные из центра сферы к вершинам сферического треугольника.

Угол между плоскостями  $OAC$  и  $OAB$  (угла) равен углу между нормальными к этим плоскостям. Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{(e_1 \times e_2) \cdot (e_1 \times e_3)}{|e_1 \times e_2| \cdot |e_1 \times e_3|}.$$

Переставляя в смешанном произведении числителя множители и раскрывая по (1.19) двойное векторное произведение, а также учитывая, что

$$|e_1 \times e_2| = \sin b; \quad |e_1 \times e_3| = \sin c,$$

получим

$$\cos \alpha = \frac{e_1 \cdot [e_2 \times (e_1 \times e_3)]}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{e_1 \cdot [e_1 (e_2 \cdot e_3) - e_3 (e_2 \cdot e_1)]}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos \alpha - \cos c \cdot \cos b}{\sin b \cdot \sin c},$$

Отсюда имеем  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ .

Совершенно аналогично находим формулы

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \quad \text{и} \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Вторую группу формул получим, вычисляя синусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ . Например:

$$\sin \alpha = \frac{|(e_1 \times e_2) \times (e_1 \times e_3)|}{|e_1 \times e_2| \cdot |e_1 \times e_3|}.$$

Читателю предлагается получить соотношения

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

**Задача 7.** Составить уравнение прямой в векторной форме.

Рассмотрим несколько случаев определения уравнения прямой в пространстве.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки  $A$  и  $B$  (рис. 1.27) в пространстве.

**Решение.** Пусть  $a$  и  $b$  — радиусы-векторы заданных точек относительно некоторого начала. Тогда условием того, что любая точка  $M$  (ее радиус-вектора  $r$ ) лежит на прямой, является условие параллельности векторов  $r - a$  и  $b - a$ , т. е.  $r - a = \lambda (b - a)$ .

Таким образом, если рассматривать  $\lambda$  как параметр, то уравнение прямой в параметрической форме имеет вид  $r = a + \lambda(b - a)$ .

Из этого уравнения, умножив его векторно на  $b - a$ , можно исключить параметр  $\lambda$ . Тогда получим  $(r - a) \times (b - a) = 0$ , или  $r \times (b - a) = a \times b$ .

2. Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $A(a)$  параллельно данному вектору  $e$ .

Решение. Используя условие параллельности вектора  $r - a$  и вектора  $e$ , получим  $r = a + \lambda e$ , где  $\lambda$  — параметр. Этот параметр можно исключить, умножив уравнение векторно на  $e$ :  $r \times e = a \times e$ .

3. Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $A(a)$  перпендикулярно к двум заданным векторам  $N_1$  и  $N_2$ .

Ответ.  $r = a + \lambda(N_1 \times N_2)$ ;  $(r - a) \times (N_1 \times N_2) = 0$ .

Задача 8. Получить условие того, что точки  $A(a)$ ,  $B(b)$  и  $C(c)$  лежат на одной прямой.

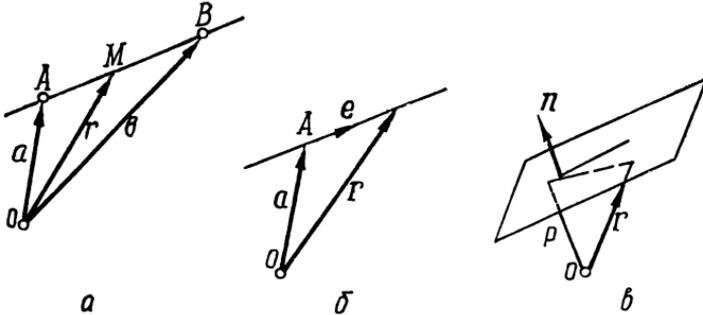


Рис. 1.27. К задачам 7 и 9:

а) прямая, проходящая через две заданные точки; б) прямая, для которой заданы точка и направление; в) к нормальной форме уравнения плоскости.

Решение. Исходя из решения предыдущей задачи, это условие может быть записано в виде

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{c_3 - a_3}{b_3 - a_3},$$

где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — декартовы координаты соответствующих точек в некоторой системе с началом в точке  $O$ .

Показать, что искомое условие может быть записано в виде

$$(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = 0,$$

и выяснить геометрический смысл этого условия.

Задача 9. Составить уравнение плоскости в векторной форме.

Рассмотрим несколько случаев определения плоскости в пространстве.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$ .

Решение. Уравнение плоскости получается из условия компланарности векторов  $r - a$ ,  $b - a$ ,  $c - a$  и в параметрической форме имеет вид  $r - a = \lambda(b - a) + \mu(c - a)$ , где  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметры.

Для исключения параметров умножим это уравнение сначала векторно на  $c - a$ , а затем скалярно на  $b - a$ . Получим  $[(r - a) \times (c - a)] \cdot (b - a) = 0$ .

Это можно было написать сразу, если учесть необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов (1.17).

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки  $A(a)$ ,  $B(b)$  параллельно заданному вектору  $e_1$ .

Ответ.  $[(r - a) \times (b - a)] \cdot e_1 = 0$ .

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(a)$  параллельно двум векторам  $e_1$  и  $e_2$ .

Ответ.  $[(r - a) \times e_1] \cdot e_2 = 0$ .

4. Составить уравнение плоскости, если задано ее расстояние  $\rho$  от начала  $O$  (рис. 1.27) и направление перпендикуляра к ней (орт  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости).

Решение. Если  $\mathbf{n}$  — орт нормали к плоскости, направленный в сторону, где не лежит начало ( $O$ ), то для любой точки  $\mathbf{r}$  плоскости справедлива формула  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \rho$ .

Это и есть уравнение плоскости (нормальная форма уравнения плоскости).

**Задача 10.** Пусть в тетраэдре с площадями граней  $s_1, s_2, s_3, s_4$  проведены четыре вектора  $S_1, S_2, S_3, S_4$  по направлению внешних к граням нормалей. Абсолютные величины равны соответственно площадям граней  $|S_i| = s_i$ . Показать, что  $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$ .

Указание. Использовать представление площади через векторное произведение.

**Задача 11.** Показать, что бесконечно малые повороты являются векторами.

Решение. Рассмотрим первый пример 1.2 (рис. 1.3, а).

Введем векторы  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}$ . Первый поворот сферы можно охарактеризовать смещением точки ее из положения  $A_1$  в  $A_2$ , а второй — из положения  $A_2$  в  $A_3$ . Если считать углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  малыми, то можно записать

$$\overline{OA_2} = \overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} = \overline{OA_1} + (\alpha_1 \times \overline{OA_1}).$$

Действительно,  $|\alpha_1 \times \overline{OA_1}| = \alpha_1 \cdot OA_1 = \overline{A_1A_2} = |\overline{A_1A_2}|$  и, кроме того, вектор  $\alpha_1 \times \overline{OA_1}$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\overline{A_1A_2}$ .

Аналогично  $\overline{OA_3} = \overline{OA_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{OA_2} + (\alpha_2 \times \overline{OA_2})$ .

Подставляя сюда полученное выше выражение для  $\overline{OA_2}$ , получим

$$\begin{aligned} \overline{OA_3} &= \overline{OA_1} + (\alpha_1 \times \overline{OA_1}) + \alpha_2 \times [\overline{OA_1} + (\alpha_1 \times \overline{OA_1})] = \\ &= \overline{OA_1} + (\alpha_1 + \alpha_2) \times \overline{OA_1} + \alpha_2 \times (\alpha_1 \times \overline{OA_1}) = \\ &= \overline{OA_1} + (\alpha_1 + \alpha_2) \times \overline{OA_1} + \alpha_2 \times (\alpha_1 \times \overline{OA_1}). \end{aligned} \quad (*)$$

С другой стороны, если ввести поворот  $\alpha_3$ , переводящий точку из  $A$  в  $A_3$ , найдем  $\overline{OA_3} = \overline{OA_1} + \alpha_3 \times \overline{OA_1}$ . (\*\*)

Если  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — бесконечно малые величины, то тогда (и только тогда), отбрасывая бесконечно малые второго порядка и сравнивая (\*) и (\*\*), получим

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1.$$

Таким образом, бесконечно малые повороты являются векторами, ибо они подчиняются законам векторной алгебры (результатирующий поворот равен геометрической сумме слагаемых, величина которой не меняется от изменения порядка слагаемых).

**Задача 12.** Найти распределение скоростей точек твердого тела, имеющего неподвижную точку  $O$  (рис. 1.28).

Решение. Сместим тело из начального положения в близкое так, что его некоторая точка  $M(\mathbf{r})$  перейдет в положение  $M_1$ . Элементарное смещение  $\Delta \mathbf{r}$  точки  $M$  может быть выражено, согласно предыдущей задаче, через вектор бесконечно малого поворота  $\Delta \varphi$  следующим образом:  $\Delta \mathbf{r} = \Delta \varphi \times \mathbf{r}$ .

Разделив на  $\Delta t$  (время перемещения точки  $M$  в  $M_1$ ) и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим  $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  — скорость точки  $M$ , а  $\omega =$

$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$  — мгновенная угловая скорость вращения твердого тела.

Эта формула носит название *формулы Эйлера*.

**Задача 13.** Эйлеровы углы.

Как следует из формул линейного ортогонального преобразования координат, положение системы  $(K')$  по отношению к системе  $(K)$ , имеющей с ней общее начало, можно определить *тремя* независимыми параметрами (девять косинусов углов между осями  $(K)$  и  $(K')$  должны удовлетворять шести усло-

виям ортогональности). В качестве трех параметров в кинематике зачастую выбирают углы Эйлера.

Систему  $(K)$  в систему  $(K')$  можно перевести с помощью трех поворотов (рис. 1.29): 1) на угол  $\psi$  вокруг оси  $(x_3)$  (угол прецессии); 2) на угол  $\theta$  вокруг линии  $ON$  (линия узлов с ортом  $\mathbf{n}$ ), где  $\theta$  — угол нутации; 3) на угол  $\varphi$  вокруг оси  $(x'_3)$  (угол чистого вращения).

Независимые параметры  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  называются углами Эйлера.

Требуется выразить орты  $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$  системы  $(K')$  через орты  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  системы  $(K)$  и углы Эйлера.

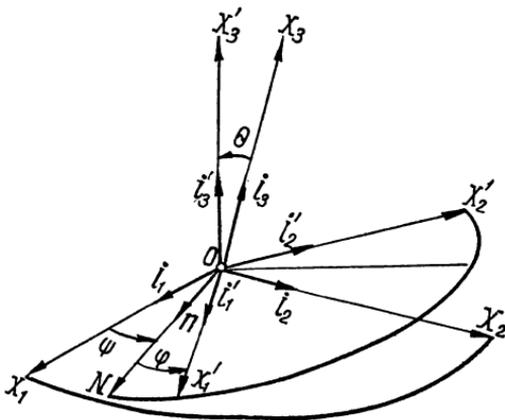
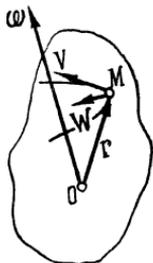


Рис. 1.28. Скорость и осеостремительное ускорение точек твердого тела, имеющего неподвижную точку  $O$ .

Рис. 1.29. Эйлера углы.

Решение. В задаче 1 этой главы было получено:

$$\mathbf{i}'_1 = \alpha_{1'1}\mathbf{i}_1 + \alpha_{1'2}\mathbf{i}_2 + \alpha_{1'3}\mathbf{i}_3;$$

$$\mathbf{i}'_2 = \alpha_{2'1}\mathbf{i}_1 + \alpha_{2'2}\mathbf{i}_2 + \alpha_{2'3}\mathbf{i}_3;$$

$$\mathbf{i}'_3 = \alpha_{3'1}\mathbf{i}_1 + \alpha_{3'2}\mathbf{i}_2 + \alpha_{3'3}\mathbf{i}_3.$$

Из сферического треугольника, образуемого на единичной сфере концами ортов  $\mathbf{i}_1, \mathbf{n}$  и  $\mathbf{i}'_1$ , согласно формулам, полученным в задаче 6, найдем

$$\begin{aligned} \alpha_{1'1} &= \cos(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}_1) = \cos \psi \cos \varphi + \sin \varphi \sin \psi \cos(\pi - \theta) = \\ &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta. \end{aligned}$$

Из других сферических треугольников, выбирая каждый раз одну вершину в конце орта  $\mathbf{n}$  линии узлов, получим

$$\begin{aligned} \alpha_{1'2} &= \cos(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}_2) = \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \sin \varphi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \cos \theta = \\ &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta; \end{aligned}$$

$$\alpha_{1'3} = \cos(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}_3) = \cos \varphi \cos \frac{\pi}{2} + \sin \varphi \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \varphi \sin \theta.$$

Таким образом  $\mathbf{i}'_1 = \mathbf{i}_1 (\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) + \mathbf{i}_2 (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) + \mathbf{i}_3 \sin \varphi \sin \theta$ .

Остальные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} i_2' &= i_1 (-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) + \\ &+ i_2 (\cos \psi \cos \varphi \cos \theta - \sin \psi \sin \varphi) + i_3 \sin \theta \cos \varphi; \\ i_3' &= i_1 \sin \psi \sin \theta - i_2 \cos \psi \sin \theta + i_3 \cos \theta. \end{aligned}$$

**Задача 14.** Показать, что (см. условие предыдущей задачи)

$$\begin{aligned} i_1 &= (\cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) i_1' + (-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) i_2' + \\ &+ i_3' \sin \psi \sin \theta; \\ i_2 &= (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) i_1' + \\ &+ (\cos \psi \cos \varphi \cos \theta - \sin \psi \sin \varphi) i_2' - i_3' \cos \psi \sin \theta; \\ i_3 &= i_1' \sin \psi \sin \theta + i_2' \sin \theta \cos \varphi + i_3' \cos \theta. \end{aligned}$$

**Задача 15.** Момент  $M_0$  силы  $F$  относительно точки  $O$  определяется выражением  $M_0 = r \times F$ , где  $r$  — радиус-вектор начала вектора  $F$  относительно точки  $O$ . Моментом силы  $F$  относительно оси  $(u)$ , проходящей через точку  $O$ , называется проекция  $M_0$  на ось  $(u)$ , т. е.  $M_u = M_0 \cdot u_0 = (r \times F) \cdot u_0$ , где  $u_0$  — орт оси  $(u)$ .

Показать, что величина  $M_u$  не зависит от расположения точки  $O$  на оси  $(u)$ .

**Задача 16.** Пусть в точках, определяемых радиусами-векторами  $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_n$  относительно некоторого начала  $O$ , расположены заряды, равные соответственно  $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n$ .

Дипольным моментом этой системы зарядов относительно начала  $O$  называется вектор  $p = \sum_{k=1}^n e_k r_k$ .

Назовем центром зарядов (по аналогии с центром масс) этой системы точку  $C$ , определяемую радиусом-вектором:

$$R = \frac{p}{\sum_{k=1}^n e_k} = \frac{\sum_{k=1}^n e_k r_k}{\sum_{k=1}^n e_k}.$$

Эту точку можно определить, если  $\sum_{k=1}^n e_k \neq 0$ .

Если  $\sum_{k=1}^n e_k = 0$ , то система зарядов нейтральна.

1. Показать, что дипольный момент нейтральной системы не зависит от начала, относительно которого он вычисляется.

2. Выразить дипольный момент через центры систем положительных и отрицательных зарядов, составляющих нейтральную систему.

Решение. 1. Пусть  $p = \sum_{k=1}^n e_k r_k$  — дипольный момент относительно

начала  $O$ , а  $p' = \sum_{k=1}^n e_k r_k'$  — относительно начала  $O'$ , причем  $\overline{OO'} = r_0$ .

Тогда  $r_k = r_k' + r_0$ . Следовательно,

$$p' = \sum_{k=1}^n e_k r_k' = \sum_{k=1}^n e_k (r_k + r_0) = \sum_{k=1}^n e_k r_k + r_0 \sum_{k=1}^n e_k.$$

Так как система зарядов нейтральна  $\left(\sum_{k=1}^n e_k = 0\right)$ , то  $\mathbf{p}' = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}_k = \mathbf{p}$ .

2. Пусть  $\sum_{k=1}^n e_k = 0$ . Тогда в системе есть отрицательные заряды  $e_k^-$  и положительные  $e_k^+$ . Разобьем всю сумму зарядов на суммы положительных и отрицательных, т. е.  $\sum_{k=1}^n e_k = \sum e_k^- + \sum e_k^+ = 0$ . Тогда обозначим  $\sum e_k^+ = -\sum e_k^- = Q$ .

По определению, центры положительных и отрицательных зарядов находятся в точках, радиусы-векторы которых равны

$$R^+ = \frac{\sum e_k^+ r_k^+}{\sum e_k^+}; \quad R^- = \frac{\sum e_k^- r_k^-}{\sum e_k^-}.$$

Тогда дипольный момент системы равен

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}_k = \sum e_k^+ r_k^+ + \sum e_k^- r_k^- = R^+ \sum e_k^+ + R^- \sum e_k^- = Q(R^+ - R^-).$$

**Задача 17. Столкновение частиц.** Пусть две частицы одинаковой массы до столкновения имели скорости  $V_1$  и  $V_2$ , а после столкновения приобрели скорости  $V_1'$  и  $V_2'$  (рис. 1.30). Поскольку столкновение частиц происходит под действием центральных сил, то, как известно из механики, их траектории будут лежать в одной плоскости в системе координат, где покоится центр инерции. Для такого столкновения справедливы законы сохранения количества движения и кинетической энергии системы (потенциальная энергия до и после столкновения равна нулю), поэтому

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V_1' + V_2', \\ V_1^2 + V_2^2 &= V_1'^2 + V_2'^2. \end{aligned} \quad (*)$$

1. Выразить скорости после столкновения  $V_1'$  и  $V_2'$  через начальные скорости  $V_1$  и  $V_2$ .

2. Показать, что относительные скорости  $U = V_2 - V_1$ ,  $U' = V_2' - V_1'$  до ( $U$ ) и после ( $U'$ ) столкновения равны по абсолютной величине.

**Решение.** 1. Система (\*) представляет собой систему четырех скалярных уравнений относительно шести компонент скоростей  $V_1'$ ,  $V_2'$ . Таким образом, явное выражение  $V_1'$ ,  $V_2'$  через  $V_1$  и  $V_2$  может быть осуществлено введением двух дополнительных параметров, характеризующих геометрию столкновения (положение плоскости траектории в некоторой системе  $(x_1, x_2, x_3)$ ). Это означает, что столкновение двух частиц может быть полностью охарактеризовано значением двух геометрических параметров. Эти геометрические параметры мы введем с помощью орта  $\mathbf{k}$  ( $|\mathbf{k}| = 1$ ) по направлению изменения скорости первой частицы (рис. 1.30), т. е.

$$V_1' - V_1 = \mathbf{k}A. \quad (**)$$

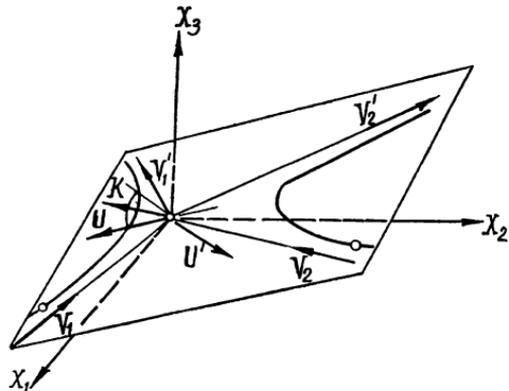


Рис. 1.30. К задаче 17 о столкновении частиц.

Два независимых угла, которые составляют  $\mathbf{k}$  с осями системы  $(x_1, x_2, x_3)$ , могут быть приняты за геометрические параметры столкновения.

Тогда из первого уравнения системы (\*) следует

$$V'_2 - V_2 = -kA. \quad (***)$$

Подставляя  $V'_1$  и  $V'_2$  из (\*\*\*) во второе уравнение системы (\*), получим выражение для  $A$ . Имеем  $V_1^2 + V_2^2 = (V_1 + kA)^2 + (V_2 - kA)^2 = V_1^2 + 2A(V_1 \cdot \mathbf{k}) + A^2 + V_2^2 - 2A(V_2 \cdot \mathbf{k}) + A^2$ . Отсюда  $A = \mathbf{k} \cdot (V_2 - V_1) = \mathbf{k} \cdot U$ .

Тогда из (\*\*\*) и (\*\*\*) имеем

$$V'_1 = V_1 + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot U); \quad V'_2 = V_2 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot U). \quad (****)$$

Эти формулы и дают явное выражение конечных скоростей  $V'_1$  и  $V'_2$  через скорости  $V_1$  и  $V_2$  до столкновения и вектор  $\mathbf{k}$ .

2. Вычитая из второго уравнения системы (\*\*\*\*) первое, получим

$$U' = U - 2\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot U). \quad (*****)$$

Возводя в квадрат, найдем  $U'^2 = U^2$ ,

т. е.  $U' = U$  — величина относительной скорости частиц сохраняется при столкновении.

Нетрудно показать, что вектор  $\mathbf{k}$  делит угол между  $U$  и  $-U'$  пополам. Действительно, умножив (\*\*\*\*\*) скалярно на  $\mathbf{k}$ , получим  $U' \cdot \mathbf{k} = -U \cdot \mathbf{k}$ .

**Задача 18.** Рассмотреть столкновение частиц с разными массами  $m_1$  и  $m_2$ . Показать, что величина относительной скорости  $U = V_2 - V_1$  сохраняется при столкновении.

Решение. Пусть  $\mathbf{p}_1 = m_1 V_1$ ;  $\mathbf{p}_2 = m_2 V_2$ ;  $\mathbf{p}'_1 = m_1 V'_1$ ;  $\mathbf{p}'_2 = m_2 V'_2$ , где  $V_1, V_2$  — скорости частиц до столкновения, а  $V'_1, V'_2$  — после столкновения. Закон сохранения количества движения и кинетической энергии имеет вид

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad p_1^2 + m p_2^2 = p_1'^2 + m p_2'^2 \left( m = \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (*)$$

Вводя орт  $\mathbf{k}$  соотношениями  $\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = kA$ ,  $\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = -kA$  и определяя  $A$  из второго уравнения (\*), получим

$$A = \frac{2}{1+m} \mathbf{k} \cdot (m\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = \frac{2m_1}{1+m} (\mathbf{k} \cdot U).$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 + \frac{2}{1+m} \mathbf{k} [\mathbf{k} \cdot (m\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)] = \mathbf{p}_1 + \frac{2m_1}{1+m} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot U);$$

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2 - \frac{2}{1+m} \mathbf{k} [\mathbf{k} \cdot (m\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)] = \mathbf{p}_2 - \frac{2m_1}{1+m} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot U).$$

Отсюда имеем

$m\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_1 = m\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{k} [\mathbf{k} \cdot (m\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)]$ , или  $U' = U - 2\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot U)$  (\*\*), где обозначено  $U = V'_2 - V'_1$ .

Возводя выражение (\*\*) в квадрат, получим  $U' = U$ .

**Задача 19.** Показать, что если сила, действующая на материальную точку, направлена всегда по касательной к траектории, то траектория точки есть прямая.

Решение. Сила равна  $F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$ . Если она направлена по касательной к траектории, т. е. по  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , то

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \alpha \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (*)$$

Здесь, в общем случае,  $\alpha = \alpha(t)$  и  $m = m(t)$ .

Обозначая  $m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ , получим из (\*)  $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{\alpha}{m} \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ .

Отсюда  $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = c e^{\int \frac{\alpha}{m} dt}$ , или  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c}{m} e^{\int \frac{\alpha}{m} dt}$ , где  $c$  — постоянный вектор. Интегрируя это выражение, получаем

$$\mathbf{r}(t) = c \int e^{\int \frac{\alpha}{m} dt} \frac{dt}{m} + \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{b}$  — постоянный вектор. Это уравнение (см. задачу 7) и показывает, что траектория точки есть прямая.

**Задача 20.** Показать, что траектория точки является плоской кривой, если ее уравнение движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  таково, что  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right) = 0$ .

**Решение.** Из условия задачи  $\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = a(t) \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + b(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Отсюда имеем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}_1 f_1(t) + \mathbf{h}_2 f_2(t), \quad (*)$$

где  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — фундаментальная система решений уравнения  $y'' = a(t)y' + b(t)y$ ;  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  — постоянные векторы.

Интегрируя выражение (\*), получаем  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{h}_1 \int f_1(t) dt + \mathbf{h}_2 \int f_2(t) dt + \mathbf{h}_3$ , где  $\mathbf{h}_3$  — постоянный вектор. Это уравнение является уравнением плоскости (см. задачу 9), где располагается траектория точки.

**Задача 21.** Показать, что траектория материальной точки, движущейся под действием Ньютоновской силы притяжения, есть коническое сечение.

**Решение.** Уравнение движения точки имеет вид

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\alpha \frac{\mathbf{r}_0}{r^2},$$

где  $\alpha = \text{const}$ ,  $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ,  $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$  — орт радиуса вектора точки.

Умножив это уравнение векторно на  $\mathbf{r}$  и проинтегрировав по  $t$ , получим первый интеграл уравнения движения (ср. упр. 14,3):  $\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{h} = \text{const}$ .

Величина  $\mathbf{h}$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r r_0 \times \frac{d}{dt}(r r_0) = r r_0 \times \left( \frac{dr}{dt} r_0 + r \frac{dr_0}{dt} \right).$$

Тогда, используя формулу (1.19), найдем

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{h} = -\frac{\alpha r_0}{r^2} \times \mathbf{h} = -\alpha r_0 \times \left( r_0 \times \frac{dr_0}{dt} \right) = \alpha \frac{dr_0}{dt}.$$

Так как  $\mathbf{h} = \text{const}$ , то  $\alpha \frac{dr_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{V} \times \mathbf{h})$ .

Интегрируя, имеем  $\mathbf{V} \times \mathbf{h} = \alpha r_0 + \mathbf{P}$ ,

где  $\mathbf{P} = \text{const}$  — постоянный вектор.

Отсюда  $(\mathbf{V} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = \alpha r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} = \alpha r + rP \cos \theta$ ,

где  $\theta$  — угол между переменным радиусом-вектором точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  и постоянным вектором  $\mathbf{P}$ .

Так как вследствие (1.16)  $(\mathbf{V} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$ , то получаем  $h^2 = \alpha r + rP \cos \theta$ .

Отсюда  $r = \frac{h^2/\alpha}{1 + \frac{P}{\alpha} \cos \theta}$ , что и представляет собой, как известно из ана-

литической геометрии, уравнение конического сечения (эллипс, гипербола, парабола) в полярных координатах.

## Упражнения

1. Доказать, что проекция на любую ось суммы векторов равна сумме проекций слагаемых на ту же ось.

2. Даны векторы

$$\mathbf{A} = i_1 + 2i_2 + 3i_3; \quad \mathbf{B} = 4i_1 + 5i_2 + 6i_3; \quad \mathbf{C} = 3i_1 + 2i_2 + i_3; \quad \mathbf{D} = 6i_1 + 5i_2 + 4i_3,$$

где  $i_1, i_2, i_3$  — орты декартовой системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Найти:

1) суммы и разности векторов

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}; \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{D}; \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{D}; \quad -\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} + \mathbf{D};$$

2) углы, которые составляют векторы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  с осями координат;

3) модули векторов  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ .

3. Найти сумму трех векторов, имеющих длину  $a$  и проведенных:

1) из вершины куба по трем его ребрам;

2) из вершины правильной треугольной пирамиды по трем ее ребрам.

4. Зная, что центр масс  $C$  системы материальных точек определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}_C$ , имеющим вид

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

где  $m_i$  — массы точек;  $\mathbf{r}_i$  — их радиусы-векторы;  $n$  — число точек, определить: 1) центр масс системы точек, расположенных в вершинах квадрата (длина стороны  $a$ ), с массами  $1g, 2g, 3g, 4g$ ;

2) центр масс системы точек, расположенных в вершинах правильного треугольника (длина стороны  $a$ ), с массами  $1g, 2g, 3g$ ;

3) центр масс системы точек, расположенных в вершинах куба (длина стороны  $a$ ), с массами  $1g, 2g, 3g, 4g$  (нижнее основание) и  $5g, 6g, 7g, 8g$  (верхнее основание).

Где будет находиться центр масс куба, если в его противоположных вершинах сосредоточены одинаковые массы?

5. В параллелограмме острый угол равен  $\frac{\pi}{3}$ , а стороны  $a = 3$  и  $b = 5$ .

Изображая его стороны в виде векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , определить:

1) векторы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  (построить);

2) площадь параллелограмма;

3) проекцию каждой стороны параллелограмма на направление другой стороны.

6. Для векторов, приведенных в упражнении 2, определить:

1) скалярное произведение суммы двух первых векторов на сумму двух последующих;

2) углы, которые образуют вектор  $\mathbf{A}$  с остальными векторами  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ , и  $\mathbf{D}$ ;

3) проекцию вектора  $\mathbf{A}$  на направление векторов  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ ;

4) векторные произведения  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}, \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  и углы, которые они образуют с вектором  $\mathbf{D}$ ;

5) площади параллелограммов, построенных на векторах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ ; найти длины диагоналей этих параллелограммов.

7. Показать, что все векторы  $A, B, C, D$  (упражнение 2) лежат в одной плоскости.

8. Даны векторы:

$$A = i_1 + 2i_2 + 3i_3; \quad B = 4i_1 + 5i_2; \quad C = 3i_1 + 2i_2 + i_3.$$

Какую систему (правую или левую) образуют эти векторы?

Определить:

1) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

2) векторы, изображающие две (исходящие из концов вектора  $A$ ) диагонали параллелепипеда, построенного на этих векторах, и найти длины этих диагоналей;

3) площадь диагонального сечения параллелепипеда, проведенного через вектор  $A$ .

9. Показать, что если соединить середины сторон произвольного четырехугольника прямыми линиями, то полученная фигура будет параллелограммом.

Указание. Стороны исходного четырехугольника изобразить в виде векторов  $a, b, c, d$  так, что  $a + b + c + d = 0$ .

10. Показать, что если  $a, b, c$  и  $d$  — суть радиусы-векторы четырех точек и справедливо равенство  $[(d - a) \times (c - a)] \cdot (b - a) = 0$ , то точки лежат в одной плоскости.

11. Проверить, могут ли следующие тройки векторов образовывать базис:

$$a_1 = 2i_1 + i_2 - 3i_3; \quad a_2 = i_1 - 4i_3; \quad a_3 = 4i_1 + 3i_2 - i_3;$$

$$b_1 = i_1 - 3i_2 + 2i_3; \quad b_2 = 2i_2 - 4i_2 - i_3; \quad b_3 = 3i_1 + 2i_2 - i_3.$$

Здесь  $i_1, i_2, i_3$  — орты прямоугольной декартовой системы координат.

12. Если  $b_1, b_2, b_3$  — векторы (см. упражнение 10), проверить, будут ли линейно независимыми векторы  $B_1, B_2, B_3$ :

$$B_1 = 2b_1 - 3b_2 + b_3; \quad B_2 = 3b_1 - 5b_2 + 2b_3; \quad B_3 = 4b_1 - 5b_2 + b_3.$$

13. Доказать, что

$$\frac{d}{dt} (A \cdot (B \times C)) = \frac{dA}{dt} \cdot (B \times C) + A \cdot \left( \frac{dB}{dt} \times C \right) + A \cdot \left( B \times \frac{dC}{dt} \right).$$

14. Доказать равенства:

$$1) \frac{d}{dt} \left( A \cdot \left( \frac{dA}{dt} \times \frac{d^2A}{dt^2} \right) \right) = A \cdot \left( \frac{dA}{dt} \times \frac{d^2A}{dt^3} \right);$$

$$2) \int A \times \frac{d^2A}{dt^2} dt = A \times \frac{dA}{dt} + C, \quad (C = \text{const});$$

$$3) r \times \frac{dr}{dt} = C, \quad \text{если} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = rf(r).$$

15. Используя формулу Эйлера  $V = \omega \times r$ , определить линейную скорость центра прямоугольника, вращающегося вокруг одной из вершин и имеющего стороны  $a = 2$  см и  $b = 4$  см в те моменты, когда мгновенная угловая скорость имеет величину  $5 \frac{1}{\text{сек}}$  и направлена по меньшей и по большей стороне прямоугольника.

16. Определить момент силы величиной в 5 н, направленной по одному из ребер куба, относительно всех его вершин и осей, проходящих через ребра (длина ребер куба равна  $a$  см).

17. Кинетическим моментом относительно центра  $O$  (моментом количества движения) системы  $n$  материальных точек называется векторная сумма

$$L_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i,$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -й точки, имеющей массу и скорость  $\mathbf{V}_i$ .

Определить:

1) кинетический момент двух точек с массами  $m_1 = 1$  г,  $m_2 = 2$  г, вращающихся с угловой скоростью  $\omega = 5 \frac{1}{\text{сек}}$  вокруг оси ( $x_3$ ) и описывающих окружности радиусом 3 и 6 см;

2) кинетический момент точек массой 1 г и 2 г, движущихся в противоположные стороны со скоростью 3 см/сек по двум противоположным сторонам ребра куба, относительно всех его вершин (длина ребра куба равна  $a$  см).

18. Пусть  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — два вектора, определяющие стороны параллелограмма с диагоналями  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Показать, что:

1) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон;

2) диагонали параллелограмма перпендикулярны тогда и только тогда, если этот параллелограмм — ромб;

3) площадь параллелограмма ( $A$ ), построенного на диагоналях другого параллелограмма ( $B$ ), в два раза больше площади этого параллелограмма ( $B$ ).

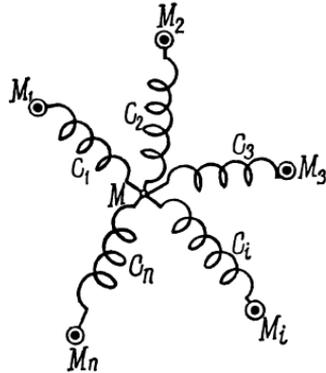


Рис. 1.31. К упражнению 19.

19. В точках  $M_1, M_2, \dots, M_n$  закреплены пружины с жесткостями соответственно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , соединяющиеся в общей точке  $M$  (рис. 1.31).

Определить положение точки  $M$  при равновесии.

Ответ.

$$\mathbf{r}_M = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n C_i},$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиусы-векторы точек  $M_i$ ;  $\mathbf{r}_M$  — радиус-вектор точки  $M$ .

20. Проверить справедливость тождеств:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix};$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) = \\ = \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})) - \mathbf{d} (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}));$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = 0.$$

21. Дан базис  $\mathbf{e}_1 = -4\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2$ ;  $\mathbf{e}_2 = 3\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2$ ;  $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{i}_3$ ,

где  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — орты прямоугольной декартовой системы координат.

Найти ко- и контравариантные составляющие вектора, проведенного из начала координат в точку  $(1, 1, 1)$ .

22. Найти выражение векторно-скалярного произведения через ко- и контравариантные компоненты вектора.

## Понятие тензора и закон преобразования его компонент

### 2.1. Компоненты тензоров и их преобразование. Равноправность координатных систем

В предыдущей главе были рассмотрены примеры скаляров и векторов. Скаляр имеет одну компоненту, вектор — три. Иными словами, какую бы мы ни выбрали систему координат, для полного описания скаляра достаточно одного числа, а для такой величины, как вектор, необходимо три числа. Более сложные объекты требуют для своего определения большего числа компонент. Так, для описания деформации упругого тела в точке необходимо  $3^2 = 9$  чисел, а для полной характеристики упругих свойств анизотропного тела —  $3^4 = 81$  число.

*Числа (или функции), которые полностью определяют величину в какой-то системе координат, называются компонентами этой величины.*

Мы уже говорили, что с этой точки зрения удобно рассматривать тензоры различных рангов: скаляр ( $3^0 = 1$  компонента) — тензор ранга 0, вектор ( $3^1 = 3$  компоненты) — тензор ранга 1, величина, имеющая  $3^2 = 9$  компонент, — тензор ранга 2 и т. д. Тензоры могут быть самого различного ранга, и вообще тензор ранга  $n$  имеет  $3^n$  компонент.

Компоненты могут быть функциями, например, времени и координат. Но не эта зависимость, на которой мы специально остановимся в гл. 4, сейчас нас интересует.

В этой главе рассмотрим правила, по которым преобразуются компоненты тензоров различных рангов в зависимости от изменения системы координат.

Величины можно рассматривать в системах координат с различным началом и различным образом ориентированных. Компоненты одной и той же величины (тензора) могут иметь различные значения в разных системах координат. Однако в связи с тем, что каждый раз эти компоненты определяют одну и ту же величину, закон преобразования компонент при переходе из одной системы координат в другую не может быть произвольным. Этот закон должен вытекать из природы рассматриваемой величины (для ска-

ляра один закон, для вектора — другой и т. д.) и из свойств пространства, в котором выбираются системы координат.

Произвольность выбора начала (перенос) координатных систем является опытным фактором и отражает так называемую однородность пространства.

Равноправность любой ориентации (поворот) координатных систем также является опытным фактом и означает изотропность пространства.

Таким образом, в однородном и изотропном пространстве все координатные системы равноправны в том смысле, что описания величин или явлений (законы) не зависят от частного (вообще говоря, произвольного) выбора системы координат.

Это означает следующее. Пусть в однородном и изотропном пространстве выбраны две произвольные системы координат  $K$  и  $K'$ , которые могут иметь различные начала и разную ориентацию. Тогда закон, сформулированный в системе  $K$  через компоненты величин, относящиеся к этой системе, должен иметь тот же вид, что и тот же закон, сформулированный в системе  $K'$  через компоненты, относящиеся к системе  $K'$

Это требование к правильно сформулированным законам носит название требования *инвариантности*.

Так, например, если длина какого-то отрезка, вычисленная в системе координат  $K$ , равна  $\Delta s$ , то, вычисляя длину этого же отрезка через координаты его конца и начала по отношению к любой другой системе  $K'$ , мы получим то же самое численное значение его длины. Математически это может быть выражено тем, что величина

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \quad (2.1)$$

имеет одинаковое численное значение независимо от того, в какой из прямоугольных декартовых систем вычислены  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ ,  $\Delta x_3$  — разности координат конца и начала отрезка.

Подробнее вопрос об инвариантности будет рассмотрен в 2.7.

Независимость описания от выбора системы координат не является единственным требованием, предъявляемым к величинам и законам. В качестве другого такого общего требования укажем на широко известное *условие независимости формулировки законов от выбора системы единиц измерения*.

Физические величины имеют размерность. Однако выбор единиц измерения этих величин остается произвольным. Таким образом, отношение двух значений одной и той же величины не зависит от того, в каких единицах эта величина измерена (этот факт используется в теории размерностей при выводе основной формулы размерности).

Любой закон формулируется также независимо от выбора системы единиц измерения для величин, между которыми он устанавливает соответствие.

Как известно, независимость формулировки закона от выбора системы единиц измерения обеспечивается *одинаковой размерностью величин*, которые входят в формулировку в виде слагаемых. В дальнейшем (см. 2.7) мы увидим, что независимость формулировки закона от выбора системы координат обеспечивается *одинаковым рангом всех тензоров*, которые входят в запись закона в виде слагаемых.

В следующих параграфах мы рассмотрим последовательно тензоры различных рангов в связи с законом преобразования их компонент, обеспечивающим во всех случаях равноправность координатных систем при описании величин.

Основные определения и формулировки будут даны по отношению к прямоугольным декартовым системам координат. Тем не менее, где это потребуется по ходу изложения, будут рассмотрены также компоненты тензоров и их свойства в системах обобщенных координат.

## 2.2. Тензоры нулевого ранга (скаляры)

Выше уже отмечалось, что такие величины, как температура, объем, давление и др., называются скалярами. Приведем определение скаляра в связи с законом его изменения при преобразованиях координатной системы.

*Скаляр — это величина, полностью определяемая в любой координатной системе одним числом (или функцией), которое не меняется при изменении пространственной системы координат.*

Скаляр имеет одну компоненту.

Таким образом, если  $\varphi$  — значение скаляра в одной системе координат, а  $\varphi'$  — в другой, то  $\varphi' = \varphi$ .

Рассмотрим пример скалярной величины.

**Пример.** Пусть  $A$  и  $B$  — две точки в пространстве, координаты которых в системе  $(K)$  декартовых координат суть  $x_k^A, x_k^B$  ( $k = 1, 2, 3$ ), а в другой декартовой системе  $(K')$  —  $x_k'^A, x_k'^B$  ( $k = 1, 2, 3$ ) (рис. 2. 1). Так как длина  $\Delta s$  отрезка прямой по своему определению является скаляром, то  $\Delta s' = \Delta s$ .

Следовательно, для любых двух систем декартовых координат необходимо выполнение равенства\*

$$\sum_{k=1}^3 \Delta x_k^2 = \sum_{k=1}^3 \Delta x_k'^2. \quad (2.2)$$

Здесь  $\Delta x_k = x_k^B - x_k^A$  ( $k = 1, 2, 3$ );  $\Delta x_k' = x_k'^B - x_k'^A$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Как известно из аналитической геометрии (см. также задачу 1, гл. 1), формулы преобразования декартовых координат имеют следующий вид (применяя сокращенные обозначения):

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{1'1} x_1 + x_1'^0; & x_1 &= \alpha_{k'1} x_k' + x_1'^0; & x_2' &= \alpha_{2'k} x_k' + x_2'^0; \\ x_2 &= \alpha_{k'2} x_k' + x_2'^0; & x_3' &= \alpha_{3'k} x_k' + x_3'^0; & x_3 &= \alpha_{k'3} x_k' + x_3'^0, \\ \text{или } x_i' &= \alpha_{i'k} x_k' + x_i'^0; & x_i &= \alpha_{k'i} x_k' + x_i'^0; & (i &= 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

\* Здесь и всюду в дальнейшем мы будем считать, что единицы масштабов в системах остаются неизменными.

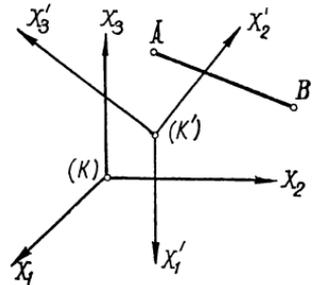


Рис. 2.1. Пример скалярной величины. Длина отрезка  $AB$  — скалярная величина и имеет одно и то же значение в различных системах координат.

Отсюда

$$\Delta x'_i = \alpha_{i'k} \Delta x_k. \quad (2.4)$$

Здесь  $\alpha_{i'k} = \cos(x'_i, x_k)$  — косинус угла между  $i$ -й новой осью и  $k$ -й старой осью.

Все коэффициенты  $\alpha_{i'k}$  этого ортогонального линейного преобразования не зависят от координат, а между ними существуют соотношения:

$$\alpha_{i'l} \alpha_{i'k} = \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = k; \\ 0, & \text{если } l \neq k; \end{cases} \quad \alpha_{i'l} \alpha_{k'l} = \delta'_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ортогональные линейные преобразования обеспечивают выполнение условия (2.2).

Действительно, вычислим  $\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2$ , используя (2.4):

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2 = \sum_{i'=1}^3 \alpha_{i'k} \Delta x_k \alpha_{i'l} \Delta x_l = \Delta x_k \Delta x_l \alpha_{i'k} \alpha_{i'l}.$$

В силу соотношений (2.5) имеем  $\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2 = \Delta x_k \Delta x_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^3 \Delta x_k^2$ .

Таким образом, закон преобразования координат (2.3) обеспечивает инвариантность длины отрезка прямой по отношению к любым ортогональным изменениям координатной системы.

### 2.3. Тензоры 1-го ранга (векторы)

Векторные величины (перемещение, ускорение, сила и др.), как уже указывалось, требуют для своего определения трех действительных чисел или функций. Векторы — величины более высокого ранга по сравнению со скалярами; они могут быть названы *тензорами первого ранга*.

Следует подчеркнуть, что *вектор — это не набор трех скалярных величин*. Двумя числами (плотность и температура) можно полностью охарактеризовать состояние идеального газа, как и двумя числами (разности абсцисс и ординат двух точек) можно описать перемещение в плоскости. Но с изменением системы пространственных координат плотность и температура не меняются, ибо они являются скалярами, и потому не могут образовывать вектор, в то время как разности координат изменяются при этом по определенному закону\*

Три числа или функции, определяющие вектор, меняются при изменении пространственной системы координат, но по такому закону, что в любой из координатных систем они определяют один и тот же вектор.

**Закон преобразования компонент вектора.** Закон преобразования компонент вектора устанавливается на основании преобразо-

\* Подчеркнем, что речь идет о неизменяемости плотности  $\rho$  и температуры  $T$  газа при изменении системы координат реального пространства. Конечно, если рассматривать два числа  $\rho$  и  $T$  в плоскости изменения переменных  $(\rho, T)$ , то они могут определять в этой плоскости вектор (см. § 3.10 гл. III).

вания трех чисел  $\Delta x_i$  (см. 2.2). Если  $\Delta x_i$  — разности декартовых прямоугольных координат каких-либо двух точек в системе  $(K)$ , то разности координат этих точек  $\Delta x'_i$  в другой декартовой системе  $(K')$  определяются согласно формуле (2.4):

$$\Delta x_i = a_{i'k} \Delta x_k,$$

где  $a_{i'k}$  — косинус угла между  $i'$ -й осью системы  $(K')$  и  $k$ -й осью системы  $(K)$ . Если в пространстве задан вектор  $\mathbf{A}$ , то его компоненты  $A_i$  можно найти, выбрав какую-то систему  $(K)$  декартовых координат.

В другой системе координат  $(K')$  (рис. 2.2) его компоненты, естественно, будут другими  $A'_i$ , хотя сам вектор  $\mathbf{A}$  остается неизменным в том смысле, что  $A'_i$  определяют тот же самый вектор (например, скорость точки  $M$ ).

Так как каждому вектору можно сопоставить определенный отрезок в пространстве, то компонентам вектора будут соответствовать разности прямоугольных декартовых координат начала и конца этого отрезка. Поэтому, чтобы понятие вектора как некоторой величины не зависело от выбора системы координат, необходимо, чтобы его компоненты менялись так же, как упомянутые разности координат.

Тогда в соответствии с законом (2.4) имеем для компонент вектора в прямоугольных декартовых координатах  $A'_i = a_{i'k} A_k$ . Этот закон и лежит в основе аналитического определения вектора.

*Вектор — это величина, определяемая в любой системе координат тремя числами (или функциями)  $A_i$ , которые при изменении пространственной системы координат преобразуются в  $A'_i$  по закону*

$$A'_i = a_{i'k} A_k. \quad (2.6)$$

Три величины  $A_i$  являются компонентами вектора.

Обратно, если с изменением пространственной системы координат три числа  $A_i$  меняются по закону (2.6), то эти числа определяют вектор.

Если компоненты вектора заданы в одной системе декартовых координат  $(K)$ , то, используя закон (2.6) преобразования компонент вектора, можно определить компоненты  $A'_i$  в любой другой системе, оси которой составляют с осями первой системы углы с косинусами  $a_{i'k}$ .

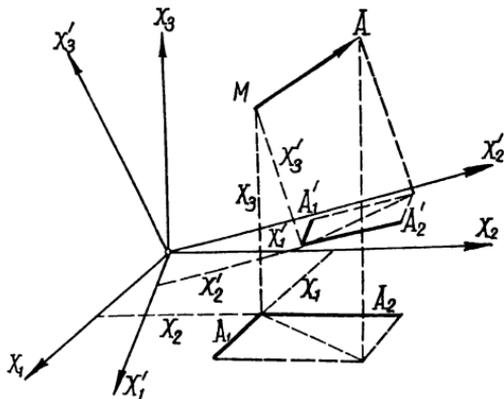


Рис. 2.2. Пример векторной величины. Компоненты вектора  $A_i$  имеют разные значения в различных системах координат.

Если три компоненты вектора обращаются в нуль в какой-либо системе координат (вектор равен нулю), то они равны нулю и в любой другой системе вследствие однородности закона преобразования (2.6).

Отметим, что это определение вектора эквивалентно определению, данному ранее. Однако оно позволяет естественным образом перейти к понятию величины более высокого ранга — тензоров 2-го и высших рангов и с единой точки зрения остановиться на тензорных свойствах физических величин.

**Пример.** Пусть в системе  $(K)$  координаты точки  $x_i$  меняются с течением времени  $t$ , так что  $x_i = x_i(t)$ .

Тогда за время  $\Delta t$  точка продвинется по осям системы  $(K)$  на расстояния  $x_i(t + \Delta t) - x_i(t)$ .

Эти три величины определяют вектор (вектор перемещения точки), ибо, учитывая закон преобразования (2.3), в другой системе  $(K')$  получим  $x'_i(t + \Delta t) - x'_i(t) = \alpha_{i'k} [x_k(t + \Delta t) - x_k(t)]$ .

Рассмотрим отношения

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}. \quad (*)$$

Три таких отношения ( $i = 1, 2, 3$ ) составляют вектор. Действительно, в системе  $(K')$  имеем  $\frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t}$ .

Поскольку  $t' = t$  и  $x'_i = \alpha_{i'k} x_k$ , то

$$\frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} = \alpha_{i'k} \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t},$$

что и доказывает векторный характер отношений (\*). Вектор (\*) называется средней скоростью точки за промежуток времени  $\Delta t$  в системе  $(K)$ .

Совокупность трех пределов (если они существуют)

$$V_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \quad (**)$$

также определяет вектор.

Действительно, поскольку  $\alpha_{i'k}$  не зависят от  $t$ , то, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$V'_i = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} = \alpha_{i'k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t} = \alpha_{i'k} V_k.$$

Из этого закона преобразования пределов следует, что они определяют вектор. Вектор (\*\*) называется истинной скоростью точки в момент времени  $t$  в системе  $(K)$ .

Аналогично, определяя истинное ускорение точки в момент времени  $t$  в системе  $(K)$  как совокупность трех пределов:

$$W_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_i(t + \Delta t) - V_i(t)}{\Delta t},$$

можно установить, что они также определяют вектор.

Тогда, принимая, что во всех координатных системах выполняется второй закон Ньютона  $mW_i = F_i$ , найдем, что сила является векторной величиной.

## 2.4. Тензоры 2-го ранга

Как уже отмечалось, некоторые геометрические объекты, а также целый ряд физических свойств требуют для своей характеристики больше трех чисел (или функций).

Это приводит к понятию величин, тензорные свойства которых сложнее, чем у векторов и скаляров. Такие величины, тензоры 2-го ранга, не могут быть составлены в виде простого набора векторов или скаляров. Это качественно новые величины, отвечающие физическому или геометрическому смыслу описываемых объектов.

**Тензор напряжений.** Рассмотрим пример, связанный с описанием напряженного состояния среды в точке, которое привело к понятию тензора напряжений\*.

Напряженное состояние среды в точке считается известным, если известно напряжение на любой площадке, проходящей через данную точку.

Вектор напряжения  $\mathbf{p}$  в среде является функцией точки и ориентации площадки, на которой рассматривается напряжение, т. е.  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки,  $\mathbf{n}$  — орт нормали к площадке. Зависимость вектора напряжения от ориентации площадки обычно отмечается индексом внизу, указывающим направление нормали к рассматриваемой площадке.

Вектор напряжения  $\mathbf{p}$  принципиально не годится для характеристики напряженного состояния среды в *точке*, ибо при этом надо рассматривать бесконечную совокупность  $\mathbf{p}$  на всевозможных площадках, проходящих через точку (рис. 2.3). Оказалось возможным определить такую величину, которая является однозначной функцией точки, т. е. не зависит от ориентации площадки и в то же время позволяет вычислить напряжение на любой площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ .

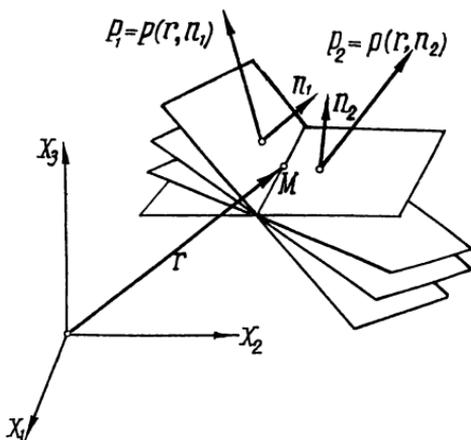


Рис. 2.3. К понятию тензора напряжений. Вектор напряжения в сплошной среде зависит не только от точки, но и от ориентации площадки, на которой рассматривается, и потому не является однозначной функцией точки.

\* Выражение «тензор напряжений» является тавтологией (tensio, лат.—напряжение).

Рассмотрим вырезанный в среде у точки  $M$  элементарный тетраэдр, три ребра которого направлены по осям декартовой системы координат (рис. 2.4). Обозначим площади граней, перпендикулярных к осям  $(x_1), (x_2), (x_3)$  системы  $(K)$ , через  $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ , а наклонной грани с нормалью  $\mathbf{n}$  — через  $d\sigma_n$ . Действие среды на эти грани тетраэдра выражается соответственно в напряжениях  $\mathbf{p}_{-1}, \mathbf{p}_{-2}, \mathbf{p}_{-3}, \mathbf{p}_n$ , приложенных к граням. Здесь минус в индексах у напряжений означает, что рассматриваются напряжения на наружных сторонах граней тетраэдра, внешние нормали которых направлены противоположно осям  $(x_1), (x_2), (x_3)$ . Вследствие равенства действия и противодействия силы, действующие на внут-

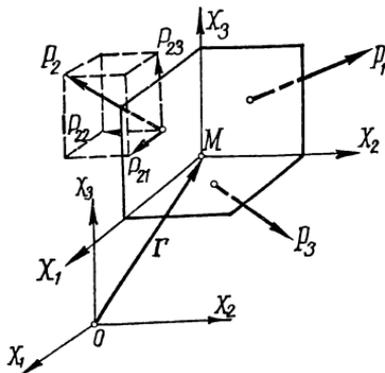
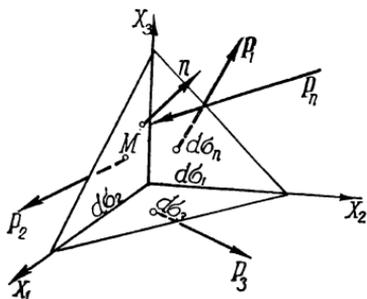


Рис. 2.4. Напряжения на гранях тетраэдра.

Рис. 2.5. Тензор напряжений как совокупность трех векторов напряжений  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  на взаимно-перпендикулярных площадках. Проекции этих векторов на координатные оси представляют девять компонент тензора напряжений.

ренние стороны граней тетраэдра ( $\mathbf{p}_1 d\sigma_1, \mathbf{p}_2 d\sigma_2, \mathbf{p}_3 d\sigma_3$ ), равны по величине и противоположны по направлению силам, действующим на наружные стороны граней. Отсюда имеем:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_{-1}, \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_{-2}; \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_{-3}.$$

Если  $\mathbf{W}$  — ускорение центра инерции тетраэдра,  $\mathbf{f}$  — вектор массовых сил, отнесенных к единице массы, то по закону движения центра инерции тетраэдра, массу которого обозначим через  $dm$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{W} dm &= \mathbf{f} dm + \mathbf{p}_n d\sigma_n + \mathbf{p}_{-1} d\sigma_1 + \mathbf{p}_{-2} d\sigma_2 + \mathbf{p}_{-3} d\sigma_3 = \\ &= \mathbf{f} dm + \mathbf{p}_n d\sigma_n - \mathbf{p}_1 d\sigma_1 - \mathbf{p}_2 d\sigma_2 - \mathbf{p}_3 d\sigma_3. \end{aligned}$$

В пределе, при стягивании тетраэдра к точке  $M$  (вследствие того, что члены, содержащие элемент массы, пропорциональной объему, являются малыми более высокого порядка по сравнению с членами, содержащими элемент площади), получим\*  $\mathbf{p}_n d\sigma_n =$

\* В этих выражениях по индексу  $n$  суммирование нет.

$$= p_1 d\sigma_1 + p_2 d\sigma_2 + p_3 d\sigma_3 = \sum_{i=1}^3 p_i d\sigma_i.$$

Поскольку  $d\sigma_i = d\sigma_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i) = n_i d\sigma_n$ , то  $\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^3 p_i n_i \equiv \mathbf{p}_i n_i$ .

Проекция вектора напряжения  $\mathbf{p}_n$  на площадку с нормалью  $\mathbf{n}$  на оси системы  $(K)$   $p_{nk} = p_{ik} n_i$ .

Здесь  $p_{ki}$  — совокупность девяти напряжений, нормальных (при  $i = k$ ) и касательных (при  $i \neq k$ ) на трех взаимно-перпендикулярных площадках у точки  $M$  (рис. 2.5). Эти девять величин, очевидно, никак не связаны с ориентацией площадки, на которой определяется напряжение  $\mathbf{p}_n$ , а лишь с данной точкой среды; в то же время знание  $p_{ik}$  позволяет вычислить напряжение  $\mathbf{p}_n$  на любой площадке, если известна ее ориентация  $\mathbf{n}$ . В каждой точке среды однозначно определена одна физическая величина, определяемая девятью числами  $p_{ik}$ , которая и служит исчерпывающей характеристикой напряженного состояния среды в точке.

Совокупность этих величин  $p_{ik}$  определяет тензор 2-го ранга, который носит название *тензора напряжений*.

Рассмотрим закон преобразования девяти величин  $p_{ik}$  при изменении системы координат.

Не ограничивая общности, можно считать, что  $i$ -я ось новой системы координат  $(K')$  направлена по нормали  $\mathbf{n}$  (ибо при определении  $p_{ik}$  никаких ограничений на  $\mathbf{n}$  не накладывалось). Если  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — орты системы  $(K)$ , а  $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$  — орты системы  $(K')$ , то  $\mathbf{n} = \mathbf{i}'_i$ . Проекция  $\mathbf{n}$  на  $l$ -ю ось системы  $(K)$  равна  $n_l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_l = \mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_l = \alpha_{i'l}$ , где  $\alpha_{i'l}$  — косинус угла между  $i$ -й осью системы  $(K')$  и  $l$ -ю осью системы  $(K)$ .

Таким образом,  $\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}'_i = p'_i n_i = \alpha_{i'l} p_l = \alpha_{i'l} i'_m p_{lm}$ . Спроектируем это равенство на  $k$ -ю ось системы  $(K')$ :

$$p'_i \cdot \mathbf{i}'_k = \alpha_{i'l} (i'_m \times \mathbf{i}'_k) p_{lm}, \text{ или } p'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm}.$$

Таков закон преобразования девяти величин  $p_{ik}$  при изменении декартовой системы координат.

**Тензор 2-го ранга.** Прежде чем дать определение тензора 2-го ранга, остановимся еще на двух примерах образования этих величин.

Пусть даны два линейно зависимых вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Тогда их компоненты пропорциональны:  $A_i = \lambda B_i$ , т. е. эти векторы коллинеарны.

В самом общем случае линейная зависимость между компонентами двух векторов, один из которых (например,  $\mathbf{B}$ ) произволен, в некоторой системе  $(K)$  может быть выражена с помощью девяти коэффициентов (мы будем их обозначать через  $a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ )) формулами:

$$A_1 = a_{11} B_1 + a_{12} B_2 + a_{13} B_3;$$

$$A_2 = a_{21} B_1 + a_{22} B_2 + a_{23} B_3;$$

$$A_3 = a_{31} B_1 + a_{32} B_2 + a_{33} B_3,$$

или сокращенно

$$A_i = a_{ik} B_k. \quad (*)$$

В другой системе ( $K'$ ) будут другие компоненты у векторов и другие числа  $a_{ik}$ , так что в системе ( $K'$ ) имеем

$$A'_i = a'_{ik} B'_k. \quad (**)$$

Рассмотрим связь между числами  $a'_{ik}$  и  $a_{ik}$ .

Умножим каждое из уравнений (\*) на  $\alpha_{l'i}$  и просуммируем по  $i$ . Получим  $\alpha_{l'i} A_i = a_{ik} \alpha_{l'i} B_k$ . Тогда слева, согласно (2.6), получим  $i$ -ю компоненту вектора  $\mathbf{A}$  в системе ( $K'$ ). Таким образом,  $A'_l = a_{ik} \alpha_{l'i} B_k$ . Поскольку (см. 2.3)  $B_k = \alpha_{m'k} B'_m$ , то  $A'_l = \alpha_{l'i} \alpha_{m'k} a_{ik} B'_m$  или, что одно и то же,  $A'_l = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} a_{lm} B'_k$ .

Сравнивая это выражение с (\*\*), в силу произвольности вектора  $\mathbf{B}$  получим  $a'_{ik} = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} a_{lm}$ .

Напомним, что справа стоит двойная сумма по  $l$  и  $m$  от 1 до 3.

Таков закон преобразования девяти чисел  $a_{ik}$  при изменении пространственной системы координат. Их совокупность, определенная в какой-либо системе координат, всегда определена и в любой другой системе.

Другой пример.

Из компонент двух независимых векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно составить девять произведений вида  $A_i B_k$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ).

При переходе к другой системе координат ( $K'$ ) эти произведения будут иметь другие значения. Выразим их через старые значения. Это всегда можно сделать, ибо мы знаем закон преобразования компонент векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Используя (2.6), получим  $A'_i B'_k = \alpha_{l'i} A_l \alpha_{k'm} B_m = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} A_l B_m$ .

Таким образом, величины  $A_i B_k$  преобразуются при изменении системы координат по тому же закону, что и числа  $a_{ik}$  из предыдущего примера.

Величины  $a_{ik}$ ,  $A_i B_k$  представляют примеры тензоров 2-го ранга.

*Тензор 2-го ранга — это величина, определяемая в любой системе координат девятью числами (или функциями)  $A_{ik}$ , которые при изменении системы координат преобразуются в  $A'_{ik}$  по закону*

$$A'_{ik} = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} A_{lm}. \quad (2.7)$$

Величины  $A_{ik}$  являются компонентами тензора 2-го ранга.

Если компоненты ( $A_{ik}$ ) тензора заданы в одной декартовой прямоугольной системе координат, то по формуле (2.7) можно определить компоненты ( $A'_{ik}$ ) тензора в любой другой декартовой прямоугольной системе, оси которой составляют с осями первоначальной системы углы с косинусами  $\alpha_{i'k}$ .

Если все компоненты тензора обращаются в нуль в какой-либо системе координат, то они равны нулю в любой другой системе вследствие однородности закона преобразования (2.7).

Иногда удобно записать тензор в виде таблицы (матрицы):

$$\|A_{ik}\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим несколько примеров, из которых видно, как некоторые геометрические и физические объекты требуют для своего описания тензоров 2-го ранга.

**Пример 1.** Пусть  $x_i$  — компоненты вектора, направленного из центра поверхности 2-го порядка, находящегося в начале системы декартовых координат, к точкам этой поверхности. Тогда уравнение поверхности имеет вид  $A_{ik}x_ix_k = 1$ . Числа  $A_{ik}$  полностью определяют эту поверхность, причем  $A_{ik} = A_{ki}$ .

Если  $(K')$  — система, повернутая относительно  $(K)$  на углы с косинусами  $\alpha_{i'k}$ , то  $x'_i = \alpha_{i'k}x_k$ .

Уравнение поверхности в системе  $(K')$  имеет вид  $A'_{ik}x'_ix'_k = 1$ . Из закона преобразования величин  $x_i$  находим

$$A_{lm}x_lx_m = A_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm}x'_k = (A_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm})x'_ix'_k = 1.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, получим закон преобразования девяти величин  $A_{ik}$ :  $A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm}$ , из которого заключаем, что величины  $A_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга.

**Пример 2. Тензор моментов инерции.**

Вектор момента количества движения системы материальных точек относительно начала координат некоторой системы координат  $(K)$   $L = \sum_{n=1}^N m_n(\mathbf{r}_n \times \mathbf{V}_n)$ . Здесь  $m_n$  — масса  $n$ -й точки,  $\mathbf{r}_n$  — ее радиус-вектор,  $\mathbf{V}_n$  — ее скорость.

Если расстояния  $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|$  между точками не меняются (система представляет твердое тело) и если их расстояния до начала координат также неизменны (твердое тело имеет неподвижную точку в начале координат), то по формуле Эйлера (см. задачу 12, гл. I) их скорости могут быть выражены через мгновенную угловую скорость системы  $\boldsymbol{\omega}$ :  $\mathbf{V}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n$ .

Тогда, учитывая (1.19), получим

$$L = \sum_{n=1}^N m_n[\mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)] = \sum_{n=1}^N m_n[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_n)].$$

или в проекциях  $(x_i^{(n)})$  — координаты  $n$ -й точки

$$L_i = \sum_{n=1}^N m_n(\omega_i x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} \omega_k x_k^{(n)}).$$

Представив  $\omega_i \equiv \delta_{ik}\omega_k$ , запишем

$$L_i = \omega_k \sum_{n=1}^N m_n(\delta_{ik} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)}) = \omega_k I_{ik},$$

где

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n(\delta_{ik} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)}). \quad (2.9)$$

Девять величин  $I_{ik}$  выражаются через моменты инерции  $I_{x_1x_1}$ ,  $I_{x_1x_2}$ , ... следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \sum_{n=1}^N m_n [(x_2^{(n)})^2 + (x_3^{(n)})^2] = I_{x_1x_1}; \\
 I_{22} &= \sum_{n=1}^N m_n [(x_3^{(n)})^2 + (x_1^{(n)})^2] \equiv I_{x_2x_2}; \\
 I_{33} &= \sum_{n=1}^N m_n [(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2] = I_{x_3x_3}; \\
 I_{12} &= I_{21} = - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = -I_{x_1x_2}; \\
 I_{13} &= I_{31} = - \sum_{n=1}^N m_n x_3^{(n)} x_1^{(n)} = -I_{x_1x_3}; \\
 I_{23} &= I_{32} = - \sum_{n=1}^N m_n x_2^{(n)} x_3^{(n)} = -I_{x_2x_3}.
 \end{aligned}$$

Покажем, что девять величин  $I_{ik}$  являются компонентами тензора 2-го ранга. Этот тензор называется *тензором моментов инерции* системы.

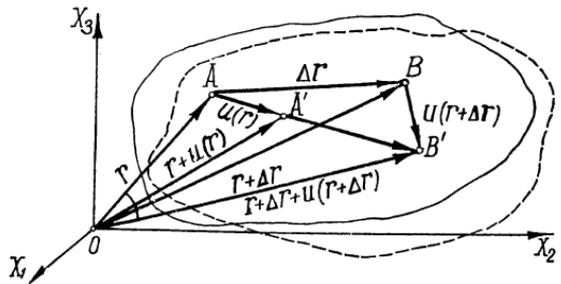
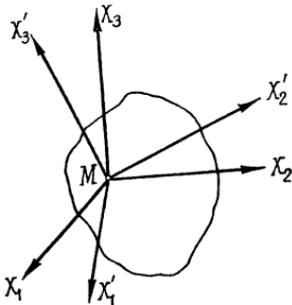


Рис. 2.6. К понятию тензора моментов инерции твердого тела. Каждой точке M твердого тела можно сопоставить девять чисел, образующих тензор моментов инерции.

Рис. 2.7. Деформация упругой частицы.

В какой-либо другой системе ( $K'$ ) прямоугольных декартовых координат моменты инерции имеют вид (рис. 2.6).

$$I'_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (\delta'_{ik} x'_i{}^{(n)} x'_i{}^{(n)} - x'_i{}^{(n)} x'_k{}^{(n)}).$$

Рассмотрим закон преобразования  $I_{ik}$  в  $I'_{ik}$  при изменении системы координат.

Из закона преобразования векторов имеем:  $x'_i{}^{(n)} x'_i{}^{(n)} = x_i{}^{(n)} x_i{}^{(n)}$ ;  $x'_i{}^{(n)} x'_k{}^{(n)} = \alpha_{i's} \alpha_{k'r} x_s{}^{(n)} x_r{}^{(n)}$ .

Из определения величин  $\delta_{ik}$  получим, что в системе (K)  $\alpha_{i'k} \alpha_{i'k} = \delta_{ik}$ , а в системе (K') —  $\alpha_{i's} \alpha_{k's} = \delta'_{ik}$  (см. 2.5).

Учитывая, что  $\alpha_{k's} = \alpha_{k'r} \delta_{sr}$ , получим

$$\delta'_{ik} = \alpha_{i's} \alpha_{k'r} \delta_{sr}. \quad (2.10)$$

Таким образом, вследствие независимости  $\alpha_{i'k}$  от координат

$$\begin{aligned} I'_{ik} &= \sum_{n=1}^N m_n (\alpha_{i's} \alpha_{k'r} \delta_{sr} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - \alpha_{i's} \alpha_{k'r} x_s^{(n)} x_r^{(n)}) = \\ &= \alpha_{i's} \alpha_{k'r} \sum_{n=1}^N m_n (\delta_{sr} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_s^{(n)} x_r^{(n)}) = \alpha_{i's} \alpha_{k'r} I_{sr}. \end{aligned}$$

Это доказывает, что девять величин  $I_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга.

Закон преобразования (2.10) показывает, что величины  $\delta_{ik}$  также образуют тензор 2-го ранга. Вследствие его особого строения он носит название единичного тензора. Его матрица имеет вид

$$\| \delta_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Пример 3. Тензор деформаций.** Рассмотрим в упругом теле две произвольные точки  $A$  и  $B$ , которые в результате деформации тела заняли положение  $A'$  и  $B'$ . При этом до деформации их радиусы-векторы были равны (см. рис. 2.7)  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ , а после деформации  $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$ . Векторы  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$  называются векторами смещения точек ( $A$  и  $B$ ).

Относительный радиус-вектор точек до деформации был  $\Delta \mathbf{r}$ , после деформации стал равным  $\Delta \mathbf{r}'$ . Вычислим изменение его величины в результате деформации, т. е. определим разность  $(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2$ . При этом мы предположим, что вектор смещения  $\mathbf{u}$  является непрерывной функцией точки, т. е.  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ . Из рис. 2.7 имеем  $\Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , или в проекциях

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3).$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k.$$

Возводя выражение в квадрат и замечая, что  $\Delta x'_i \Delta x'_i = (\Delta r')^2$  и  $\Delta x_i \Delta x_i = (\Delta r)^2$ , находим

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l.$$

Меняя индексы суммирования  $i$  и  $l$  во второй сумме и записывая первую сумму в виде

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Delta x_k \Delta x_i, \end{aligned}$$

получим

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_k = 2u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k,$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right).$$

Итак, изменение расстояния между любыми двумя точками целиком определяется, если известны девять величин  $u_{ik}$ .

Покажем, что  $u_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга. Этот тензор называется *тензором деформаций*.

В другой координатной системе ( $K'$ ) имеем

$$u'_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} \right).$$

Используя формулу (2.6) для преобразования компонент вектора  $u$  и формулы (2.3), получим

$$\begin{aligned} u'_{ik} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{l'm} u_m) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{k'n} u_n) \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{l's} u_s) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{l's} u_s) \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \right] = \\ &= \alpha_{l'm} \alpha_{k'n} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_m} \right] = \alpha_{l'm} \alpha_{k'n} u_{mn}. \end{aligned}$$

Эта формула преобразования  $u_{mn}$  в  $u'_{ik}$  при изменении системы координат и доказывает, что величины  $u_{ik}$  являются компонентами тензора 2-го ранга.

Обычно в линейной теории упругости пренебрегают членом  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ , и тогда  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ .

**Пример 4. Тензор скоростей деформаций.**

Согласно теореме Гельмгольца\*, на выводе которой мы здесь останавливаться не будем, движение частицы жидкости или газа можно разложить на квазитвердое (движение частицы, как частицы твердого тела) и деформационное. Деформационное движение определяется тензором скоростей деформации

$$V_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right), \quad (2.11)$$

\* См. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973, с. 55—59.

в том смысле, что скорость точки  $M$  частицы по отношению к точке  $O$ , являющаяся исключительно следствием способности частицы деформироваться (деформационная скорость), равна (см. рис. 2.8)

$$V_i^D(M) = V_{ik}(O) \Delta x_k, \quad (2.12)$$

где  $\Delta r = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}$  — расстояние между точками  $M$  и  $O$ ;  $V^D(M)$  — деформационная скорость частицы в точке  $M$ ;  $V_{ik}(O)$  — значение тензора  $V_{ik}$  в точке  $O$ .

Нетрудно проверить, что девять величин  $V_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга (см. предыдущий пример).



Рис. 2.8. Скорость деформации жидкой частицы.

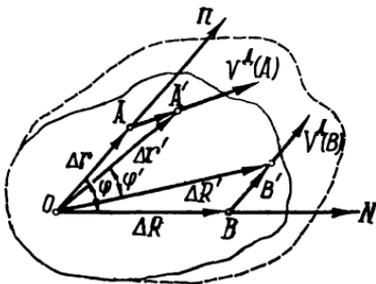


Рис. 2.9. Деформация жидкой частицы.

Остановимся подробнее на физическом смысле компонент тензора скоростей деформации.

В частице жидкости (рис. 2.9) отметим две точки:  $A$  и  $B$  — до деформации частицы. После деформации, совершившейся за время  $\Delta t$ , положение этих точек пусть будет  $A'$  и  $B'$ . Положение точек  $A$  и  $B$  по отношению к точке  $O$  до деформации определим соответственно радиусами-векторами  $\Delta r$  и  $\Delta R$ , а после деформации — радиусами-векторами  $\Delta r'$  и  $\Delta R'$ . Изменения длин векторов  $\Delta r$ ,  $\Delta R$  и угла между ними характеризуют деформацию частицы.

Смещения точек  $A$  (вектор  $\overline{AA'}$ ) и  $B$  (вектор  $\overline{BB'}$ ) в результате деформации частицы совершились по направлению деформационных скоростей этих точек  $V^D(A)$  и  $V^D(B)$ . Поэтому  $\overline{AA'} = V^D(A) \Delta t$ ;  $\overline{BB'} = V^D(B) \Delta t$ .

Тогда из векторных треугольников  $OAA'$  и  $OBB'$  имеем

$$\Delta r' = \Delta r + V^D(A) \Delta t; \quad \Delta R' = \Delta R + V^D(B) \Delta t.$$

Выражая деформационные скорости через тензор скоростей деформаций по (2.12) и переходя к компонентам, получим

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + V_{ik} \Delta x_k \Delta t; \quad \Delta X'_i = \Delta X_i + V_{ik} \Delta X_k \Delta t.$$

Здесь  $\Delta x_i$  —  $i$ -я компонента радиуса-вектора  $\Delta r$ , аналогично  $\Delta x'_i$ ,  $\Delta X_i$ ,  $\Delta X'_i$  —  $i$ -е компоненты радиусов-векторов  $\Delta r'$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta R'$ . Значения производных в  $V_{ik}$  берутся для точки  $O$ .

Составим скалярное произведение  $\Delta \mathbf{r}' \cdot \Delta \mathbf{R}'$ . Учитывая симметричность тензора  $V_{ik}$ , т. е.  $V_{ik} = V_{ki}$ , найдем с точностью до членов первого порядка малости относительно  $\Delta t$ :

$$\Delta \mathbf{r}' \cdot \Delta \mathbf{R}' = \Delta x'_i \Delta X'_i = \Delta x_i \Delta X_i + 2V_{ik} \Delta x_k \Delta X_i \Delta t. \quad (2.13)$$

Теперь охарактеризуем деформацию частицы.

Пусть  $\mathbf{n}$  — орт вектора  $\Delta \mathbf{r}$ , а  $\mathbf{N}$  — орт вектора  $\Delta \mathbf{R}$ , т. е.

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r}; \quad \mathbf{N} = \frac{\Delta \mathbf{R}}{|\Delta \mathbf{R}|} = \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta R}.$$

По определению, относительное удлинение частицы (за время  $\Delta t$ ) в направлении  $\mathbf{n}$

$$\epsilon_n = \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} - 1,$$

а скорость относительного удлинения в том же направлении

$$\dot{\epsilon}'_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\epsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r \Delta t}.$$

Пусть  $\varphi$  — угол между векторами  $\Delta \mathbf{r}$  и  $\Delta \mathbf{R}$  до деформации, а  $\varphi'$  — после деформации частицы.

Величины  $\dot{\epsilon}'_n$  характеризуют скорости линейной деформации частицы, а величины  $\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi - \varphi'}{\Delta t}$  — скорости угловой деформации частицы.

Разделив (2.13) на  $\Delta r \Delta R$ , получим  $(1 + \epsilon_n)(1 + \epsilon_N) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2V_{ik} n_k N_i \Delta t$ , ибо  $\frac{\Delta x'_i \Delta X'_i}{\Delta r \Delta R} = \frac{\Delta r' \Delta R' \cos \varphi'}{\Delta r \Delta R}$ ;  $n_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta r}$ ;

$$N_k = \frac{\Delta X_k}{\Delta R}.$$

Оставляя в полученном выражении члены первого порядка малости относительно  $\epsilon$ , получим

$$(1 + \epsilon_n + \epsilon_N) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2V_{ik} n_k N_i \Delta t. \quad (2.14)$$

Рассмотрим частные случаи этого соотношения.

1. Пусть точка  $A$  совпадает с точкой  $B$  и лежит на оси  $(x_1)$  до деформации. Тогда  $\varphi = \varphi' = 0$ ;  $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R} = \mathbf{i}_1 \Delta x_1$ ;  $\mathbf{n} = \mathbf{N} = \mathbf{i}_1$  ( $N_1 = n_1 = 1$ ;  $N_2 = N_3 = n_2 = n_3 = 0$ ). Из (2.14) в этом случае получаем  $1 + \epsilon_1 + \epsilon_1 = 1 + 2V_{11} \Delta t$ . Отсюда  $\dot{\epsilon}'_1 = V_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}$ .

Выбрав точки  $A$  и  $B$  до деформации совпадающими вначале на оси  $(x_2)$ , а затем на оси  $(x_3)$ , получим последовательно:

$$\dot{\epsilon}'_2 = V_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}; \quad \dot{\epsilon}'_3 = V_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}.$$

*Итак, диагональные компоненты тензора скоростей деформаций ( $V_{11}$ ,  $V_{22}$ ,  $V_{33}$ ) представляют собой скорости относительного удлинения частицы вдоль трех координатных осей.*

2. Пусть точка  $A$  лежит до деформации на оси  $(x_1)$ , а точка  $B$  — на оси  $(x_2)$ . Тогда  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$ ;  $\mathbf{N} = \mathbf{i}_2$ ;  $\Delta \mathbf{r} \perp \Delta \mathbf{R}$ . Из (2.14) в этом случае получим

$$(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \varphi' = 2V_{12}\Delta t. \quad (2.15)$$

Обозначим  $\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \varphi'$  — изменение прямого угла в частице между отрезками, направленными до деформации вдоль осей  $(x_1)$  и  $(x_2)$ . Тогда, рассматривая малые величины  $\gamma_{12}$ , найдем

$$\gamma_{12} \approx \sin \gamma_{12} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi' \right) = \cos \varphi'.$$

Отбрасывая в (2.15) величины второго порядка малости, получим  $\gamma_{12} = 2V_{12}\Delta t$ . Отсюда

$$\dot{\gamma}_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi'}{\Delta t} = 2V_{12} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}.$$

Совершенно аналогично можно получить

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 2V_{13};$$

$$\dot{\gamma}_{23} = \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 2V_{23}.$$

(2.16)

Итак, *недиагональные компоненты тензора скоростей деформаций* ( $V_{12} = V_{21}$ ,  $V_{13} = V_{31}$ ,  $V_{23} = V_{32}$ ) *представляют собой половину скоростей изменения углов между отрезками, направленными до деформации по соответствующим осям (половину скоростей угловой деформации частицы).*

## 2.5. Тензоры высших рангов

Выпишем законы преобразования компонент тензоров нулевого, 1-го и 2-го рангов:  $\varphi' = \varphi$ ;  $A'_i = \alpha_{i'l} A_l$ ;  $A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm}$ .

Формула преобразования скаляров не содержит коэффициентов  $\alpha_{i'k}$ ; в формулу преобразования компонент вектора коэффициенты  $\alpha_{i'k}$  входят линейно (однородная функция первой степени относительно  $\alpha_{i'k}$ ); формула преобразования компонент тензора 2-го ранга является уже однородной функцией второй степени относительно  $\alpha_{i'k}$ .

Как обобщение, можно дать определение тензора  $n$ -го ранга.

*Тензор  $n$ -го ранга — это величина, определяемая в каждой системе декартовых координат совокупностью  $\mathbb{Z}^n$  чисел (или функций)  $A_{i_k l} \dots$  ( $n$  — число индексов), которые при изменении системы координат преобразуются по закону*

$$A'_{i_k l} \dots = \alpha_{i'p} \alpha_{k'r} \alpha_{l's} \dots A_{prs} \dots \quad (2.17)$$

Сумма справа является однородным многочленом (формой) степени  $n$  относительно косинусов углов  $\alpha_{i'k}$ .  $A_{ikl} \dots$  — компонента тензора. Если они все равны нулю в какой-то системе координат, то тензор тождественно равен нулю.

Рассмотрим несколько примеров тензоров высших рангов.

**Пример 1.** Если  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  — три вектора, то  $3^3 = 27$  величин

$$D_{ikl} = A_i B_k C_l$$

составляют тензор 3-го ранга.

Доказательство этого факта предоставляется читателю.

**Пример 2.** Пусть  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  — два тензора 2-го ранга, один из которых (например,  $B_{ik}$ ) произволен, и пусть между компонентами этих тензоров существует линейная зависимость. Ее можно записать в виде  $A_{ik} = \lambda_{iklm} B_{lm}$ , где  $\lambda_{iklm}$  — совокупность  $3^4 = 81$  коэффициента.

Можно показать на основании закона преобразования  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$ , что  $\lambda_{iklm}$  образуют тензор 4-ранга, т. е.

$$\lambda'_{iklm} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} \lambda_{nprs}.$$

Доказательство можно провести аналогично примеру 1 предыдущего параграфа.

Компоненты тензора 2-го ранга, образованного рассмотренной ранее совокупностью девяти произведений  $A_i B_k = C_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) компоненты  $A_i$  и  $B_k$  векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , иногда записывают в виде  $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$  (без знака умножения), которое называется *диадным произведением*. Это произведение не обладает свойством коммутативности, и матрица произведения  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  является транспонированной матрицей тензора  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ . По аналогии с записью вектора в виде  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i$  определенный таким образом тензор можно записать в виде

$$\mathbf{C} = A_i B_k \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k = C_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Обобщая этот способ записи на случай тензора любого ранга, тензор  $n$ -го ранга представляем в виде

$$\mathbf{T} = T_{ik \dots pq \dots} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k \dots \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \dots \quad (i, k, \dots, p, q, \dots = 1, 2, 3),$$

где суммирование производится по всем индексам  $i, k, \dots, p, q, \dots$ ; напомним, что в каждом одночлене произведение  $\mathbf{e}^i \mathbf{e}^k \dots \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \dots$  имеет определенный порядок \*\*.

\* Формами переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются выражения  $c_i x_i$  ( $\equiv \sum_{i=1}^n c_i x_i$ ) — 1-й степени,  $c_{ik} x_i x_k$  ( $\equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} x_i x_k$ ) — 2-й степени,  $c_{ikl} x_i x_k x_l$  ( $\equiv \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ikl} x_i x_k x_l$ ) — 3-й степени и т. д.

\*\* См.: Лаг ал ли. Векторное исчисление. М., 1936. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М., Физматгиз, 1962.

## 2.6. Преобразование компонент векторов и тензоров при повороте координатной плоскости вокруг перпендикулярной оси

Иногда приходится рассматривать частный случай преобразования координат — поворот системы вокруг одной из координатных осей. Если векторы или тензоры заданы в плоскости, такое преобразование является единственно возможным и определяется одним параметром. Выберем в качестве параметра угол  $\varphi$ , который составляет новая ось ( $x'$ ) со старой осью ( $x$ ), когда поворот координатной системы совершается вокруг оси ( $z$ ) (рис. 2.10). Тогда из общих формул (2.3) следует:  $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$ ,  $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$ ,  $z' = z$ .

Отсюда для комплексного числа  $x + iy$ , определяющего радиус-вектор, расположенный в плоскости ( $xy$ ), получим формулу преобразования следующего вида:  $x' + iy' = (x + iy) e^{i\varphi}$ , а для сопряженного комплексного числа  $x - iy$  формулу  $x' - iy' = (x - iy) e^{-i\varphi}$ .

Если задан вектор  $\mathbf{A}$  ( $A_x, A_y, A_z$ ), то получим следующие формулы преобразования для величин  $A_x + iA_y, A_x - iA_y, A_z$ :

$$\left. \begin{aligned} A'_x + iA'_y &= (A_x + iA_y) e^{i\varphi} \\ A'_x - iA'_y &= (A_x - iA_y) e^{-i\varphi} \\ A'_z &= A_z \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

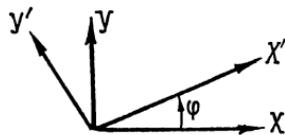


Рис. 2.10. Поворот координатной системы вокруг оси ( $z$ ).

Введем обозначения:  $A_x + iA_y = A_{+1}$ ,  $A_x - iA_y = A_{-1}$ ,  $A_z = A_0$ .

Тогда формулы преобразования (2.18) можно записать коротко в виде  $A'_\alpha = A_\alpha e^{i\alpha\varphi}$  (по  $\alpha$  не суммировать!), где  $\alpha$  принимает значения  $-1, 0, +1$ .

В случае  $A_z = 0$  вектор целиком лежит в плоскости ( $xy$ ) и его компоненты преобразуются также согласно (2.18).

Эти формулы можно получить и иначе, если записать комплексные числа через модуль и аргумент:  $A_{+1} = A e^{i\gamma}$ ;  $A_{-1} = A e^{-i\gamma}$ .

При повороте осей на угол  $\varphi$  у комплексных величин меняется аргумент. Новый аргумент  $\gamma'$  равен  $\gamma' = \gamma + \varphi$ .

Тогда  $A'_{+1} = A e^{i\gamma'} = A e^{i\gamma} e^{i\varphi} = A_{+1} e^{i\varphi}$ ,  $A'_{-1} = A e^{-i\gamma'} = A e^{-i\gamma} e^{-i\varphi} = A_{-1} e^{-i\varphi}$ .

Если заданы два вектора  $\mathbf{A}$  ( $A_x, A_y, A_z$ ) и  $\mathbf{B}$  ( $B_x, B_y, B_z$ ), то справедливы формулы преобразования:

$$A'_\alpha = A_\alpha e^{i\alpha\varphi}, \quad B'_\alpha = B_\alpha e^{i\alpha\varphi} \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать!}).$$

Тогда для величин  $A_\alpha B_\beta$  устанавливаются следующие формулы:

$$A'_\alpha B'_\beta = A_\alpha B_\beta e^{i(\alpha+\beta)\varphi} \quad (\text{по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать!}), \quad (2.19)$$

где индексы  $\alpha, \beta$  могут принимать порознь одно из значений:  $-1, 0, +1$ .

При этом величины  $A_\alpha B_\beta$  связаны с компонентами векторов следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0 B_0 &= A_z B_z; \\ A_{+1} B_{+1} &= (A_x + iA_y)(B_x + iB_y) = A_x B_x - A_y B_y + \\ &\quad + i(A_x B_y + A_y B_x); \\ A_{-1} B_{-1} &= (A_x - iA_y)(B_x - iB_y) = A_x B_x - A_y B_y - \\ &\quad - i(A_x B_y + A_y B_x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 B_{+1} &= A_z (B_x + iB_y) = A_z B_x + iA_z B_y; \\
A_0 B_{-1} &= A_z (B_x - iB_y) = A_z B_x - iA_z B_y; \\
A_{+1} B_0 &= (A_x + iA_y) B_z = A_x B_z + iA_y B_z; \\
A_{-1} B_0 &= (A_x - iA_y) B_z = A_x B_z - iA_y B_z; \\
A_{+1} B_{-1} &= (A_x + iA_y) (B_x - iB_y) = A_x B_x + A_y B_y - \\
&\quad - i(A_x B_y - A_y B_x); \\
A_{-1} B_{+1} &= (A_x - iA_y) (B_x + iB_y) = A_x B_x + A_y B_y + \\
&\quad + i(A_x B_y - A_y B_x).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из формулы (2.19) следуют формулы преобразования величин, представляющих некоторые комбинации компонент векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Так, в частности, при  $\alpha = +1$ ,  $\beta = -1$   $A'_{+1} B'_{-1} = A_{+1} B_{-1}$ , или  $A'_x B'_x + A'_y B'_y - i(A'_x B'_y - A'_y B'_x) = A_x B_x + A_y B_y - i(A_x B_y - A_y B_x)$ .

Приравнявая действительные и мнимые части, получим:

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y = A_x B_x + A_y B_y, \quad A'_x B'_y - A'_y B'_x = A_x B_y - A_y B_x,$$

Первое из этих соотношений совместно с  $A'_z B'_z = A_z B_z$ , получающимся из (2.19) при  $\alpha = \beta = 0$ , означает, что скалярное произведение векторов при данном преобразовании остается неизменным, как и при любом преобразовании координат.

Второе соотношение выражает неизменность проекции векторного произведения  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  на ось ( $z$ ). Это можно было предвидеть, ибо при рассматриваемом преобразовании координат ось ( $z$ ) остается неизменной.

Аналогичные выводы получим для случая  $\alpha = -1$ ,  $\beta = +1$ .

Теперь рассмотрим симметричный тензор 2-го ранга с компонентами  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{xy} = p_{yx}$ ,  $p_{xz} = p_{zx}$ ,  $p_{yz} = p_{zy}$ .

Если  $p_{zz} = p_{zx} = p_{zy} = 0$ , то о таком тензоре говорят, что он задан на плоскости ( $xy$ ). Таким тензором полностью описывается плоское напряженное состояние упругого тела, когда напряжения в теле не зависят от координаты  $z$  и все векторы напряжений дают на ось ( $z$ ) проекцию, равную нулю. Из компонент этого тензора построим величины  $p_{\alpha\beta}$  аналогично (2.20):

$$\begin{aligned}
p_{+1+1} &= p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}; & p_{00} &= p_{zz}; \\
p_{-1-1} &= p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}; & p_{0+1} &= p_{+10} = p_{xz} + ip_{yz}; \\
p_{+1-1} &= p_{xx} + p_{yy} = p_{-1+1}; & p_{0-1} &= p_{-10} = p_{xz} - ip_{yz}.
\end{aligned}$$

Тогда, применяя формулы преобразования компонент тензора 2-го ранга в рассматриваемом случае плоского вращения системы вокруг оси ( $z$ ), можно получить следующую удобную формулу преобразования величин  $p_{\alpha\beta}$ :

$$p'_{\alpha\beta} = e^{i(\alpha+\beta)\varphi} p_{\alpha\beta} \quad (\text{по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать!}).$$

Формула такой же структуры справедлива и для плоского тензора любого ранга, т. е.

$$p'_{\alpha\beta\gamma} \dots = e^{i(\alpha+\beta+\gamma+\dots)\varphi} p_{\alpha\beta\gamma} \dots \tag{2.21}$$

(по  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma \dots$  не суммировать!), причем величины  $p_{\alpha\beta\gamma} \dots$  связаны с компонентами тензора так же, как величины  $A_\alpha B_\beta C_\gamma$  с компонентами векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dots$  могут принимать значения  $+1$ ,  $0$ ,  $-1$ .

Из этой общей формулы (2.21) имеем:

$$\begin{aligned}
p'_{+1-1} &= p_{+1-1}; & p'_{00} &= p_{00}; \\
p'_{+1+1} &= e^{2i\varphi} p_{+1+1}; & p'_{0+1} &= e^{i\varphi} p_{0+1}; \\
p'_{-1-1} &= e^{-2i\varphi} p_{-1-1}; & p'_{0-1} &= e^{-i\varphi} p_{0-1},
\end{aligned}$$

или, расписав, получим:

$$\begin{aligned} p'_{xx} + p'_{yy} &= p_{xx} + p_{yy}; \quad p'_{xx} - p'_{yy} + 2ip'_{xy} = (p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}) e^{2i\varphi}; \\ p'_{xx} - p'_{yy} - 2ip'_{xy} &= (p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}) e^{-2i\varphi}; \quad p'_{zz} = p_{zz}; \\ p'_{xz} + ip'_{yz} &= (p_{xz} + ip_{yz}) e^{i\varphi}; \quad p'_{xz} - ip'_{yz} = (p_{xz} - ip_{yz}) e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Первые три формулы широко известны и имеют большое значение в плоской задаче теории упругости\*. Из этих формул, записав  $e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$  и отделяя мнимые и действительные части, получим выражения для  $p'_{xx} - p'_{yy}$  и  $p'_{xy}$  через старые компоненты. Комбинируя эти выражения, находим:

$$p'_{xx} = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\varphi - p_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$p'_{yy} = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} - \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\varphi + p_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$p'_{xy} = \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \sin 2\varphi + p_{xy} \cos 2\varphi.$$

## 2.7. Инвариантность тензорных уравнений

Под инвариантностью уравнения относительно изменения системы координат понимается неизменяемость его вида при переходе от одной системы координат к другой.

Как было показано, преобразование координат сопровождается преобразованием функций, входящих в уравнение, по закону, вполне определенному для каждой функции: для скалярной функции один закон, для векторной — другой и т. д.

Сопоставляется начальный вид уравнения до преобразования координат с конечным его видом после преобразования. Вообще говоря, новые, преобразованные функции будут удовлетворять новому уравнению, описывающему то же самое явление в новой системе координат. Если это новое уравнение имеет такой же вид в новых координатах, как и первоначальное уравнение в старых координатах, то такое уравнение называется *инвариантным*.

Инвариантность уравнений, описывающих тот или иной физический закон, является их непременным свойством, ибо закон должен иметь одну и ту же формулировку в любой системе координат вследствие однородности и изотропности реального пространства.

*Для инвариантности уравнений необходимо, чтобы все тензоры, которые входят в виде слагаемых в это уравнение, были тензорами одного ранга.*

Вектор не может быть сложен со скаляром, тензор 2-го ранга — с вектором и т. п.

Это положение имеет такой же универсальный характер, как и положение об одинаковой размерности слагаемых в уравнениях.

\* См. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Гл. I, § 8. М.—Л., Изд-во АН СССР.

Уравнение прямой в системе декартовых координат имеет вид (см. задачу 7, гл. 1)  $x_k - a_k - \lambda e_k = 0$ .

Умножим каждое из этих уравнений на  $\alpha_{i'k}$  и просуммируем по  $k$ :  $\alpha_{i'k}x_k - \alpha_{i'k}a_k - \lambda\alpha_{i'k}e_k = 0$ .

Так как  $x_i, a_i, e_i$  — компоненты векторов, то, вспоминая закон (2.6), получим уравнение прямой в системе  $(K')$ :  $x'_i - a'_i - \lambda e'_i = 0$ , где  $x'_i, a'_i, e'_i$  — компоненты векторов в новой системе координат  $(K')$ .

Уравнение прямой инвариантно, ибо все слагаемые в нем — векторы — тензоры одного ранга.

Второй закон Ньютона справедлив и одинаково формулируется в любой из декартовых систем координат. Следовательно, уравнения, выражающие этот закон, должны иметь один и тот же вид в любой из декартовых координат, т. е. должны быть инвариантны в указанном смысле\*. Инвариантность обеспечивается тем, что скорость и сила — векторы, а время и масса (вообще переменная) — скаляры.

Имеем в системе  $(K)$ :  $\frac{d}{dt}(mV_i) = F_i$ .

В системе  $(K')$  получаем совершенно аналогичную запись

$$\frac{d}{dt}(mV'_i) = F'_i.$$

в силу того, что  $m = m', V'_i = \alpha_{i'k}V_k; t = t', F'_i = \alpha_{i'k}F_k$ .

*Инвариантностью обладают все правильно сформулированные физические законы.*

## 2.8. Криволинейные координаты

**Координатные поверхности и линии.** Положение точки  $M$  в пространстве, как было сказано, можно определить ее радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  относительно некоторой фиксированной точки  $O$ . Этот вектор, не зависящий, конечно, от выбранной системы координат, в пространстве трех измерений определяется тремя числами  $q^1, q^2, q^3$  (числа 1, 2, 3 — индексы, а не степени), которые уже зависят от устанавливаемого способа определения их, т. е. от принятой системы координат.

Несколько обобщая сказанное в 1.3 относительно координат на плоскости, можно условиться, например, эти три числа определять как расстояния с соответствующими знаками до трех взаимно-перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку  $O$ , положив  $q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3$ , и тогда говорят о прямоугольной декартовой системе координат.

Если положение точки  $M$  определять координатой  $z$  по оси, проходящей через точку  $O$ , расстоянием  $R$  точки от оси, углом  $\varphi$

\* Здесь справедливо более общее положение: закон Ньютона имеет одинаковую формулировку во всех инерциальных системах (движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга).

между фиксированной полуплоскостью, проходящей через ось  $z$ , и полуплоскостью, проведенной через  $z$  и точку  $M$ , то получится цилиндрическая система координат  $z, R, \varphi$  (рис. 1.9, а).

Очевидно, если задавать для одной из величин  $q^1$ , например,  $q^1 = \text{const}$ , и изменять непрерывно две другие  $q^2$  и  $q^3$ , то полученные точки будут принадлежать некоторому семейству поверхностей.

Таким же образом уравнения  $q^2 = \text{const}$  ( $q^1, q^3$  — переменные) и  $q^3 = \text{const}$  ( $q^1, q^2$  — переменные) определяют соответственно еще два других семейства поверхностей. Положим, что эти поверхности таковы, что через каждую точку  $M$  пространства проходит одна и только одна поверхность каждого семейства. Тогда положение точки вполне однозначно определяется пересечением этих трех поверхностей. Они носят название координатных поверхностей, а величины  $q^1, q^2, q^3$  — *криволинейных (обобщенных) координат* точки  $M$ . Вид координатных поверхностей зависит, конечно, от способа определения величин  $q^i$  (рис. 2.11).

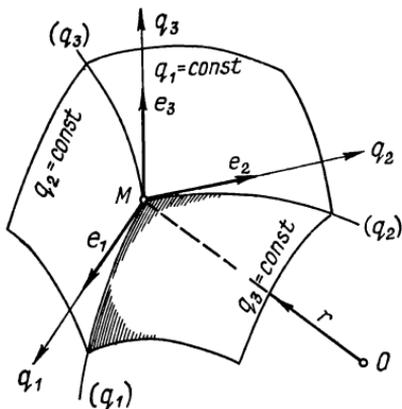


Рис. 2.11. Координатные поверхности, линии и оси в обобщенной координатной системе.

В прямоугольной системе координат, как легко видеть, координатными поверхностями являются три взаимно-перпендикулярные плоскости.

В цилиндрической системе координат координатные поверхности суть:  $z = \text{const}$  — плоскость, перпендикулярная к оси  $z$ ;  $R = \text{const}$  — круговой цилиндр радиуса  $R$  с образующими, параллельными оси  $z$ ;  $\varphi = \text{const}$  — полуплоскость, проходящая через ось  $z$  под углом  $\varphi$  к фиксированной полуплоскости (рис. 2.12).

В сферической системе координат  $R, \theta, \varphi$  (рис. 2.13) координатными поверхностями служат полуплоскость, проходящая через ось  $z$  под углом  $\varphi$  к плоскости отсчета, сфера радиуса  $R$  и конус с углом раствора  $2\theta$ .

Пересечение двух поверхностей дает линию. Очевидно, на этой линии значения двух координат постоянны, а третья меняется. Эти линии изменения одной из координат называются *координатными линиями* (рис. 2.11).

В прямоугольной системе координат это прямые, в цилиндрической — это прямая ( $R = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ), прямая ( $\varphi = \text{const}, z = \text{const}$ ) и окружность ( $R = \text{const}, z = \text{const}$ ).

В сферической системе координат координатными линиями являются окружность ( $R = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ), окружность ( $R = \text{const}, \theta = \text{const}$ ) и прямая ( $\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}$ ).

Условимся положительным направлением на координатной линии  $q^i$  называть направление, в котором перемещается точка при увеличении  $q^i$ .

Направления координатных линий определяют (рис. 2.11) с помощью координатного базиса ( $e_1, e_2, e_3$ ). Векторы этого базиса

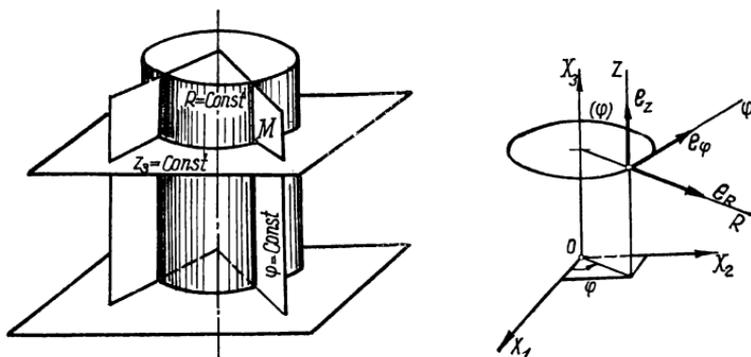


Рис. 2.12. Цилиндрическая система координат: координатные поверхности, координатные линии ( $\varphi, R, z$ ) и базис их осей.

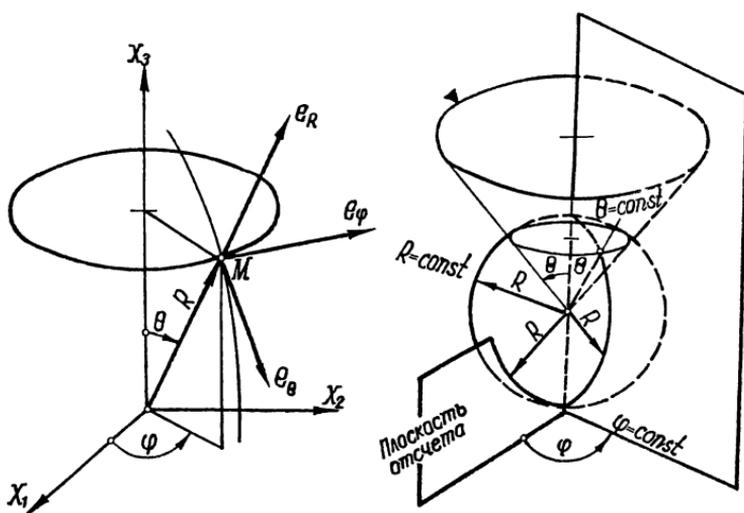


Рис. 2.13. Сферическая система координат: координатные поверхности, координатные линии ( $R, \theta, \varphi$ ) и векторный базис их осей.

касательны к соответствующим координатным линиям и направлены в сторону возрастания соответствующих координат. Этот базис называется *локальным* (местным). Важно отметить, что в общем случае векторы базиса не взаимно-перпендикулярны и не являются ортами ( $|e^i| \neq 1$ ). Касательные к координатным линиям, на которых установлено положительное направление базисными

векторами, называются *координатными осями* криволинейной системы координат.

Следует отметить, что в случае *декартовой системы координат* (прямоугольной и косоугольной) *базисные векторы совпадают для всех точек пространства*. Этим свойством обладает только декартова система координат. *Базисные векторы любой криволинейной системы координат различны для разных точек пространства* (см. рис. 2.14). В этом случае координатный базис называют *подвижным*, ибо он меняется от точки к точке.

Если векторы базиса взаимно-перпендикулярны, то система криволинейных координат называется *ортогональной*.

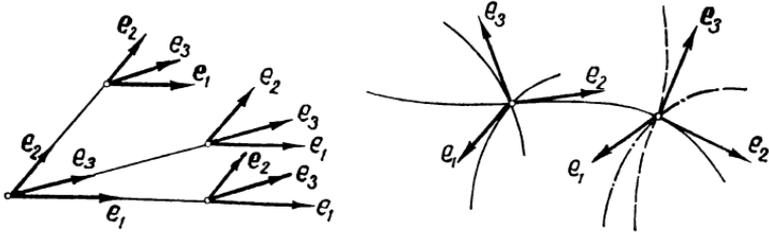


Рис. 2.14. Местный базис. Только в декартовых системах координат местный базис одинаков для всех точек пространства.

В ортогональных системах касательные к координатным линиям в каждой точке пересекаются под прямыми углами. Цилиндрическая и сферическая криволинейные системы координат являются ортогональными. Как уже упоминалось, ортогональные системы наиболее распространены в приложениях, хотя, конечно, условие ортогональности системы не обязательно для обобщенных координат  $(q_1, q_2, q_3)$ .

Основной характеристикой любой обобщенной системы координат является ее метрика, т. е. выражение квадрата элементарной дуги (см. 1.6):

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k.$$

Здесь  $g_{ik} = e_i \cdot e_k$  — компоненты метрического тензора (см. 2.9).

С помощью компонент метрического тензора можно определить основные элементы пространства, арифметизированного системой координат  $(q^1, q^2, q^3)$ . Элемент дуги вдоль координатной линии  $q_i$

$$ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \quad (\text{нет суммирования по } i!). \tag{2.22}$$

Элемент площади в координатной поверхности  $q' = \text{const}$

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= |e_2 \times e_3| dq^2 dq^3 = \sqrt{(e_2 \times e_3) \cdot (e_2 \times e_3)} dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{(e_2 \cdot e_2)(e_3 \cdot e_3) - (e_2 \cdot e_3)(e_2 \cdot e_3)} dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} dq^2 dq^3. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Аналогично найдем } d\sigma_2 &= \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{13}^2} dq^3 dq^1, & d\sigma_3 &= \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dq^1 dq^2, \text{ или } d\sigma_i &= \sqrt{g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2} dq^j dq^k \quad (\text{нет} \\ &\text{суммирования по } j \text{ и } k!), \text{ причем } i, j, k &\text{ составляют четную пере-} \\ &\text{становку чисел } 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \tag{2.23}$$

Элемент объема получим, используя (1.46) из 1.6:

$$d\tau = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3, \text{ где } G = \det \|g_{ik}\|. \quad (2.24)$$

В случае ортогональной системы координат основными ее характеристиками являются коэффициенты Лямэ, определяемые равенством

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2. \\ \text{Как было показано в 1.6, } H_1 &= \sqrt{g_{11}}; H_2 = \sqrt{g_{22}}; H_3 = \sqrt{g_{33}} \\ \text{В этом случае } ds_i &= H_i dq^i \text{ (нет суммирования!), } d\sigma_i = \\ &= H_j H_k dq^j dq^k \text{ (нет суммирования!), } d\tau = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Соответственно для декартовой системы прямоугольных координат, для цилиндрической и для сферической систем имеем

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad ds^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2, \\ ds^2 &= dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Отсюда видно, что для прямоугольных декартовых координат все коэффициенты Лямэ равны единице, для цилиндрической системы координат имеем

$$H_1 \equiv H_R = 1, \quad H_2 \equiv H_\varphi = R, \quad H_3 \equiv H_z = 1, \quad (2.27)$$

а для сферической

$$H_1 \equiv H_R = 1, \quad H_2 \equiv H_\theta = R, \quad H_3 \equiv H_\varphi = R \sin \theta. \quad (2.28)$$

Если непосредственно определить квадрат элемента дуги трудно, можно исходить из более общих соображений. Сопоставим каждой точке пространства три числа  $q^1, q^2, q^3$ . Это означает, что ее радиус-вектор можно рассматривать как вектор-функцию аргументов  $q^1, q^2, q^3$ , т. е.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ .

Тогда, проектируя радиус-вектор на оси какой-то декартовой системы координат, получим три скалярные функции, устанавливающие соответствие между  $x_i$  и  $q^k$ :

$$x_1 = x_1(q^1, q^2, q^3), \quad x_2 = x_2(q^1, q^2, q^3), \quad x_3 = x_3(q^1, q^2, q^3). \quad (2.29)$$

При этом, предполагая, что якобиан  $I = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial q^k} \right\|$  не равен нулю или бесконечности, мы получим взаимно однозначное соответствие между  $x_i$  и  $q^k$ , так что в дополнение к (2.29) существуют функции

$$q^1 = q^1(x_1, x_2, x_3), \quad q^2 = q^2(x_1, x_2, x_3), \quad q^3 = q^3(x_1, x_2, x_3). \quad (2.30)$$

Например, в случае цилиндрической системы координат

$$\left. \begin{aligned} R \equiv q^1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi \equiv q^2 = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad z \equiv q^3 = x_3; \\ x_1 &= R \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \varphi, \quad x_3 = z, \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

а в случае сферической системы выражения (2.29) и (2.30) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R &\equiv q^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \theta &\equiv q^2 = \arctg \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \quad \varphi \equiv q^3 = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \\ x_1 &= R \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = R \cos \theta. \end{aligned} \right\} (2.32)$$

Вычисляя полное бесконечно малое изменение радиуса-вектора, получим

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial r}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial r}{\partial q^3} dq^3 \equiv \frac{\partial r}{\partial q^i} dq^i.$$

Отсюда метрика  $ds^2 = (dr \cdot dr) = \frac{dr}{dq^i} \frac{dr}{dq^k} dq^i dq^k$ . Таким образом, векторы локального базиса

$$e_i = \frac{\partial r}{\partial q^i}. \quad (2.33)$$

Следовательно, компоненты метрического тензора могут быть вычислены по формулам

$$g_{ik} = \frac{\partial r}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial q^k} = \frac{\partial x_l}{\partial q^i} \frac{\partial x_l}{\partial q^k}, \quad (2.34)$$

где  $x_l = x_l(q^1, q^2, q^3)$  есть функции (2.29), причем  $r = i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$ .

В случае ортогональных координат коэффициенты Лямэ могут быть вычислены по формулам

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2}. \quad (2.35)$$

Читателю предлагается самостоятельно получить (2.27) и (2.28), используя выражение (2.35).

## 2.9. Тензоры в системах обобщенных координат

**Ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензоров.** В системе обобщенных координат, определяемой произвольным неортогональным базисом, вектор (тензор 1-го ранга) полностью определяется либо тремя его ковариантными компонентами  $A_i$ , либо тремя контравариантными компонентами  $A^i$ . Величины  $A_i$  отличаются от  $A^i$  законом преобразования при изменении пространственной системы координат (см. 1.31—1.32):

$$A'_i = \alpha^k_i A_k, \quad A'^l = \alpha^l_k A^k.$$

Тем не менее эти величины не являются независимыми; связь между ними устанавливается формулами (см. (1.40), (1.41)).

При этом коэффициенты  $g_{ik}$  ( $g^{ik}$ ) определяют базис системы обобщенных координат, в которых рассматриваются компоненты вектора (см. 1.3).

Аналогично, относя тензоры 2-го и выше рангов к общим системам координат, можно рассматривать различного рода их компоненты. Эти компоненты отличаются друг от друга законом преобразования при изменении пространственной системы координат. Существуют также формулы, связывающие различного рода компоненты между собой.

Приведем определение тензора 2-го ранга, которое не ограничено применением только декартовой системы прямоугольных координат.

Тензор 2-го ранга — это величина, полностью определяемая в любой системе координат  $3^2 = 9$  числами (или функциями), называемыми компонентами. Компоненты тензора могут быть ковариантными  $A_{ik}$ , контравариантными  $A^{ik}$ , смешанными  $A_i^k, A^i_k$ . При изменении пространственной системы координат эти компоненты преобразуются в  $A'_{ik}, A'^{ik}, A_i'^k, A'^i_k$  по закону:

$$\begin{aligned} A'_{ik} &= \alpha_i^l \alpha_k^m A_{lm}, & A'^{ik} &= \alpha_i^l \alpha_k^m A^{lm}, \\ A_i'^k &= \alpha_i^l \alpha_m^k A_l^m, & A'^i_k &= \alpha_i^l \alpha_k^m A^l_m. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь  $\alpha_i^l, \alpha_k^m$  — коэффициенты прямого и обратного преобразования (формулы 1.4 — 1.5).

Компоненты тензора, рассматриваемые в системе координат с метрикой  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ , связаны между собой формулами

$$\begin{aligned} A^{ik} &= g^{il} g^{km} A_{lm}, & A_{ik} &= g_{il} g_{km} A^{lm}, & A_{ik} &= g_{kl} A_i^l = g_{il} A^l_k, \\ A_i'^k &= g^{kl} A_{il}, & A_i^k &= g_{il} A^{ek}, \\ A^e_{.k} &= g^{il} A_{ik}, & A^e_{.k} &= g_{ki} A_{il}, & A^{ik} &= g^{il} A_i^k = g^{kl} A^i_e. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Точка в обозначениях смешанных компонент подчеркивает порядок следования индексов. Так, в  $A_i^k$  первый индекс «ковариантный», а второй — «контравариантный»; в  $A^l_k$  порядок следования индексов обратный.

**Пример.** Покажем, что величины  $g_{ik}, g^{ik}, g_i^k$ , определенные в 1.6, являются компонентами тензора 2-го ранга. Этот тензор называется *метрическим*. Прежде всего, используя (1.4 — 1.5), 1.3 и определение (1.39), получим законы преобразования этих величин при изменении пространственной системы координат. Имеем

$$\begin{aligned} g'_{ik} &= e'_i \cdot e'_k = \alpha_i^l e_l \cdot \alpha_k^m e_m = \alpha_i^l \alpha_k^m e_l \cdot e_m = \alpha_i^l \alpha_k^m g_{lm}, \\ g'^{ik} &= e'^i \cdot e'^k = \alpha_i^l e^i \cdot \alpha_k^m e^k = \alpha_i^l \alpha_k^m g^{lm}, \\ g_i'^k &= e'_i \cdot e'^k = \alpha_i^l e_l \cdot e^k = \alpha_i^l \alpha_k^m g^k_l. \end{aligned}$$

Следовательно,  $g_{ik}$  — ковариантные компоненты некоторого тензора,  $g^{ik}$  — контравариантные,  $g_i^k$  — смешанные.

Покажем, что это компоненты одного и того же тензора. Для этого достаточно показать, что они связаны между собой формулами вида (2.37).

Но из определения  $g_{ik}$  и свойств векторов основного и взаимного базиса следует  $e_i = g_{il} e^l$ . Тогда  $g_{ik} = e_i \cdot e_k = g_{il} e^i \cdot g_{km} e^m = g_{il} g_{km} e^i \cdot e^m = g_{il} g_{km} g^{lm}$ .  $g_{ik} = g_{il} e^l$ ,  $e_k = g_{il} g^k_l$  и т. д.

Таким образом, величины  $g_{ik}, g^{ik}, g_i^k$  действительно являются компонентами одного тензора (метрического тензора). Его смешанные компоненты совпадают по значениям с символами Кронекера  $\delta_{ik}$ .

Понятие тензора 2-го ранга может быть обобщено на понятие тензора  $n$ -го ранга, отнесенного к произвольной системе координат. Тензор  $n$ -го ранга — это величина, определяемая  $3^n$  числами, которые являются либо его ковариантными, либо контравариантными, либо различного рода смешанными компонентами.

Так, например, тензор 3-го ранга имеет всего 27 компонент, и его смешанные компоненты могут быть вида  $A_{ik}^l, A^l_k$  и т. д. Закон преобразования их следующий:

$$A'_{ik}{}^l = \alpha_i^m \alpha_k^n \alpha_r^l A_{mn}{}^r, \quad A'^l{}_k = \alpha_m^l \alpha_k^n \alpha_r^m A^l{}_{.n}{}^r.$$

При этом говорят, что  $A_{ik}^l$  смешанные компоненты, один раз контравариантные и дважды ковариантные и т. д.

Правило инвариантности тензорных уравнений, рассмотренное в 2.7, теперь, очевидно, должно быть дополнено требованием, что все тензоры, которые входят в виде слагаемых в уравнение, должны иметь не только одинаковый ранг, но и одинаковую «ковариантность». Иначе говоря, ковариантные компоненты не могут складываться с контравариантными, а смешанные компоненты могут складываться только тогда, когда они имеют одинаковое строение ( $A_i^{kl}$  и  $B_i^{kl}$  и т. д.).

**«Физические» компоненты тензоров. Случай ортогональных базисов.** Понятие «физических» компонентов векторов естественно обобщается и на «физические» компоненты тензоров 2-го и высших рангов. В общем случае это следует из того, что компоненты любого тензора  $n$ -го ранга могут быть представлены в виде суммы произведений компонент трех (в трехмерном пространстве) векторов (см. задачу 5 этой главы). Если считать факт разложения тензоров на сумму произведений компонент векторов установленным, то, в частности, «физические» компоненты  $A_{ik}^*$  и  $A^{*ik}$  тензора 2-го ранга определяются выражениями

$$A^{*ik} = |e_i| \cdot |e_k| A^{ik} = \sqrt{g_{ii}g_{kk}} A^{ik} \text{ (нет суммирования!)}, \quad (2.38)$$

$$A_{ik}^* = \frac{A_{ik}}{|e_i| \cdot |e_k|} = \frac{A_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}} \text{ (нет суммирования!)}. \quad (2.39)$$

Эти формулы являются обобщением формул (1.37).

В случае ортогональных базисов из (2.37) и из (1.39) получим

$$A^{ik} = g^{ii}g^{kk}A_{ik} = \frac{A_{ik}}{H_i^2H_k^2} \text{ (нет суммирования!)},$$

$$A_{ik} = g_{ii}g_{kk}A^{ik} = H_i^2H_k^2A^{ik} \text{ (нет суммирования!)}. \quad (2.40)$$

Тогда из (2.38) и (2.39) следует, что оба вида физических компонент тензоров совпадают  $A_{ik}^* = A^{*ik}$  и равны

$$A_{ik}^* = \frac{A_{ik}}{H_iH_k} = A^{ik}H_iH_k \text{ (нет суммирования!)}. \quad (2.40)$$

**Операция поднятия и опускания индексов.** В связи с выражениями (1.40), (1.41), (2.37) и им подобными в алгебре тензоров говорят об операции поднятия и опускания индексов у компонент тензора. Под этим понимают правило получения одних компонент через другие с помощью оператора — метрического тензора. Правило заключается в том, что «поднимаемый» («опускаемый») индекс переходит в метрический тензор, а на то место, куда он должен быть поднят (опущен), становится «немой» индекс суммирования; вторым «немым» индексом суммирования является свободный индекс метрического тензора. Например,  $A_{ikl} = g_{im}A_{.kl}^m = g_{im}g_{kn}A^{.mn} = g_{im}g_{kn}g_{lr}A^{mnr}$ .

Иногда о тождественном преобразовании вида  $A_{ik} = g_i^l A_{ek}$  говорят как об операции «переименования» индекса.

**Ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры.** Иногда при первоначальном определении тензора как физической или геометрической величины удобно исходить из каких-то определенных его компонент, например ковариантных. В этом смысле можно говорить о таком тензоре, как о ковариантном. Аналогично рассматривают контравариантные и смешанные тензоры. Однако из каких бы компонент мы ни исходили, тензор  $n$ -го ранга, как единая величина, всегда определяется только  $3^n$  независимыми числами. С другой стороны, если определены какие-либо компоненты тензора, то по формулам, аналогичным (2.37), всегда можно найти его компоненты любого другого строения. Это является следствием того факта, что в пространстве с заданной метрикой всякая физическая или геометрическая величина может быть представлена компонентами любого строения.

Рассмотрим, например, скалярную функцию  $f(x^1, x^2, x^3)$  обобщенных координат  $x^1, x^2, x^3$ . Выясним закон преобразования ее трех частных производных  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  при изменении системы координат.

Учитывая, что  $x^i$  и  $x'^i$  являются контравариантными компонентами радиуса-вектора одной и той же точки, получим по (1.32)  $x^k = \alpha_i^k x'^i$ . Тогда  $\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \alpha_i^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$ .

Таким образом, можно сказать, что три величины  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ , преобразующиеся по закону ковариантных компонент, образуют ковариантный вектор. В действительности, этот вектор (градиент — см. 4.4) имеет как ко-, так и контравариантные компоненты.

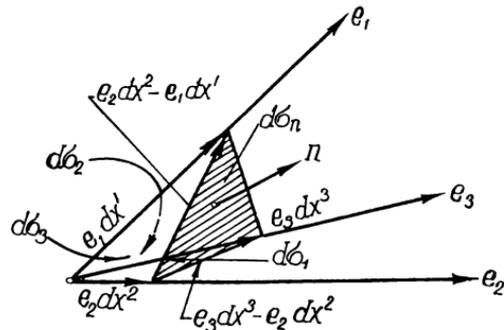


Рис. 2.15. К понятию тензора напряжений в обобщенных координатах.

Иллюстрацией появления понятий ковариантных и других тензоров может служить пример тензора напряжений в обобщенных координатах.

#### Пример. Тензор напряжений.

Рассмотрим в системе координат, определяемой произвольным правым базисом  $(e_1, e_2, e_3)$ , элементарный тетраэдр (см. рис. 2.15) с ребрами  $|e_1| dx^1, |e_2| dx^2, |e_3| dx^3$ , сходящимися в начале координат, и с «доннышком» площадью  $d\sigma_n$ . Орт нормали к доннышку обозначим через  $n$ , а площадь грани через  $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= |e_2 \times e_3| dx^2 dx^3, & d\sigma_2 &= |e_3 \times e_1| dx^3 dx^1, \\ d\sigma_3 &= |e_1 \times e_2| dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (*)$$

Кроме того (см. рис. 2.15), имеем

$$\begin{aligned} nd\sigma_n &= (e_2 dx^2 - e_1 dx^1) \times (e_3 dx^3 - e_2 dx^2) = \\ &= (e_2 \times e_3) dx^2 dx^3 + (e_3 \times e_1) dx^3 dx^1 + (e_1 \times e_2) dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

Вводя векторы  $e^i$  взаимного базиса и учитывая (1.24), (1.46) и формулы (\*) этого примера, получим

$$e_2 \times e_3 = e^1 \sqrt{G}$$

и, следовательно,

$$(e_2 \times e_3) dx^2 dx^3 = \frac{e^1}{|e^1|} d\sigma_1.$$

Тогда

$$nd\sigma_n = \sum_{i=1}^3 \frac{e^i}{|e^i|} d\sigma_i.$$

Отсюда, вводя ковариантные компоненты  $n_i$  вектора  $n$ , найдем

$$n_i d\sigma_n = \frac{d\sigma_i}{|e^i|}. \quad (**)$$

Как и в примере 2.4, вектор напряжения на «донышке» тетраэдра  $\mathbf{p}_n$  имеет выражение  $\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i d\sigma_i \frac{1}{d\sigma_n}$ . Подставляя сюда значения  $d\sigma_i$  из (\*\*), имеем

$\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i |e^i| n_i$ . Поскольку в сумме справа стоят ковариантные компоненты  $n_i$  вектора  $\mathbf{n}$ , то при рассмотрении компонент векторов  $\mathbf{p}_i |e^i|$  ( $i = 1, 2, 3$ ) мы обязательно должны брать их контравариантные составляющие. Только в этом случае (\*) компоненты вектора  $\mathbf{p}_n$  будут преобразовываться при изменении системы координат по законам (1.33). Именно в этом смысле мы можем говорить, что векторы  $\mathbf{p}_i |e^i|$  являются контравариантными. Обозначая контравариантные компоненты этих векторов через  $p^{ik}$ , так что  $\mathbf{p}_i |e^i| = p^{ik} \mathbf{e}_k$  (суммирование только по  $k$ ), получим

$$\mathbf{p}_n = \sum_{k, i=1}^3 p^{ik} \mathbf{e}_k n_i. \quad (2.41)$$

Отсюда контравариантные компоненты вектора напряжения  $\mathbf{p}_n$  равны

$$p_n^k = p^{ik} n_i. \quad (2.42)$$

Девять величин  $p^{ik}$  являются контравариантными компонентами единой физической величины — тензора напряжений. Они позволяют в выбранной системе координат определить в точке  $O$  напряжения на любой площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ .

Ковариантные, смешанные и «физические» компоненты этого тензора могут быть определены согласно общим формулам:

$$p_{ik} = g_{ij} g_{km} p^{im}; \quad p_i^{\cdot k} = g_{ij} p^{jk}; \quad \dots, \text{ и т. д.}$$

## Задачи с решениями

**Задача 1.** Найти выражение для момента инерции системы материальных точек относительно оси ( $u$ ) с ортом  $\mathbf{u}$ .

**Решение.** Эту задачу можно решить двумя путями.

Если не использовать понятия тензора моментов инерции, а исходить из элементарного определения момента инерции материальной точки как произведения

массы на квадрат расстояния до оси, то  $I_{uu} = \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n \times \mathbf{u})^2$ , где  $N$  —

число точек,  $m_n$  — масса  $n$ -й точки,  $\mathbf{r}_n$  — радиус-вектор  $n$ -й точки относительно некоторого начала  $O$ , взятого на оси ( $u$ ) с ортом  $\mathbf{u}$  ( $|\mathbf{u}| = 1$ ), при этом  $|\mathbf{r}_n \times \mathbf{u}|$  — расстояние  $n$ -й точки от оси ( $u$ ). Преобразуем выражение для  $I_{uu}$ , используя (1.16) и (1.19):

$$\begin{aligned} I_{uu} &= \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{r}_n \times \mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n \cdot [\mathbf{u} \times (\mathbf{r}_n \times \mathbf{u})] = \\ &= \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n \cdot [\mathbf{r}_n - \mathbf{u} (\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{u})] = \sum_{n=1}^N m_n [\mathbf{r}_n^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_n)^2]. \end{aligned}$$

Если ввести систему ( $K$ ) с началом в  $O$ , то получим выражение  $I_{uu}$  через координаты точек  $x_1^{(n)}$ ,  $x_2^{(n)}$ ,  $x_3^{(n)}$  ( $\mathbf{r}_n = x_1^{(n)} \mathbf{i}_1 + x_2^{(n)} \mathbf{i}_2 + x_3^{(n)} \mathbf{i}_3$ ):

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^N m_n [x_1^{(n)} x_1^{(n)} - (x_i^{(n)} u_i)^2]. \quad (*)$$

Это же выражение можно получить, если в  $(K)$  известны компоненты  $I_{ik}$  тензора моментов инерции.

Действительно, если принять ось  $(u)$  за ось  $(x_1)$  некоторой системы,  $(K')$ , то по (2.7) имеем  $I_{uu} \equiv I'_{11} = \alpha'_{1'i} \alpha'_{1'k} I_{ik}$ . Но  $\alpha'_{1'i} = i'_1 \cdot i_i = u \cdot i_i = u_i$ . Поэтому  $I_{uu} = I_{ik} u_i u_k$ . (\*\*)

Подставив сюда выражение (2.9) для  $I_{ik}$ , получим формулу (\*).

**Задача 2.** Показать, что кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку и вращающегося с мгновенной угловой скоростью  $\omega$ , равна  $T = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega}$ , где  $I_{\omega\omega}$  — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения (оси, совпадающей с  $\omega$ ).

**Решение.** Используя формулу Эйлера (см. задачу 12 гл. 1), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n V_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\omega \times r_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\omega \times r_n) \cdot (\omega \times r_n).$$

С учетом (1.16) и (1.19)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \omega \cdot [r_n \times (\omega \times r_n)] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \omega \cdot [\omega (r_n)^2 - r_n (r_n \cdot \omega)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n [\omega^2 r_n^2 - (\omega \cdot r_n)^2]. \end{aligned}$$

Вводя орт мгновенной оси вращений  $\omega^0 = \frac{\omega}{\omega}$  и учитывая выражение для  $I_{uu}$ , полученное в предыдущей задаче, найдем

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{n=1}^N m_n [r_n^2 - (\omega^0 \cdot r_n)^2] = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega}.$$

Используя формулу (\*\*) предыдущей задачи, можно представить  $T$  через компоненты тензора моментов инерции относительно неподвижной точки и компоненты вектора  $\omega$ :

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 I_{ik} \omega_i^0 \omega_k^0 = \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k.$$

**Задача 3.** Вычислить момент инерции системы относительно оси  $(v)$  с ортом  $\mathbf{v}$ , если ось  $(v)$  параллельна оси  $(u)$ , которая проходит через центр масс и относительно которой момент инерции системы равен  $I_{uu}$ .

**Решение.** Выберем на оси  $(v)$  некоторое начало  $O$ , относительно которого положение центра масс, находящегося на оси  $(u)$ , определяется радиусом-вектором  $R$ .

Если  $r_n$  — радиус-вектор точки с массой  $m_n$  относительно начала  $O$ , а  $r'_n$  — радиус-вектор той же точки относительно центра масс, то  $r_n = r'_n + R$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} I_{vv} &= \sum_{n=1}^N m_n (r_n \times \mathbf{v})^2 = \sum_{n=1}^N m_n [(r'_n + R) \times \mathbf{v}]^2 = \\ &= \sum_{n=1}^N m_n (R \times \mathbf{v})^2 + \sum_{n=1}^N m_n (r'_n \times \mathbf{v})^2 = 2 \sum_{n=1}^N m_n (R \times \mathbf{v}) \cdot (r'_n \times \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n' \times \mathbf{v})^2 = \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n' \times \mathbf{u})^2 = I_{uu};$$

$$\sum_{n=1}^N m_n (R \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{r}_n' \times \mathbf{v}) = (\mathbf{Q} \times \mathbf{v}) \cdot \left[ \left( \sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n' \times \mathbf{v} \right) \right] = 0,$$

ибо  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  (оси параллельны) и  $\sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n' = 0$  по определению центра масс.

Следовательно,  $I_{vv} = I_{uu} + M |R \times \mathbf{v}|^2$ ; здесь  $|R \times \mathbf{v}|$  — расстояние между осями, а  $M$  — масса всей системы.

**Задача 4.** *Найти наиболее общий вид линейной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, если среда изотропна.*

**Решение.** Общая линейная зависимость между  $p_{ik}$  и  $V_{ik}$  может быть записана в виде  $p_{ik} = \eta_{iklm} V_{lm}$ , где  $\eta_{iklm}$  — тензор 4-го ранга, описывающий свойства среды.

Поскольку свойства среды одинаковы в различных направлениях, то компоненты этого тензора должны сохранять свои значения при любом повороте координатной системы. Тензором, сохраняющим свои компоненты во всех координатных системах, является (см. 3.5, 3.6) шаровой тензор, компоненты которого имеют вид  $A \delta_{ik}$ , где  $A$  — скаляр.

Следовательно, в случае изотропной среды тензор  $\eta_{iklm}$  должен быть представим через шаровые тензоры. Наиболее общее представление имеет вид (в предположении его единственности)  $\eta_{iklm} = A \delta_{ik} \delta_{lm} + B \delta_{il} \delta_{km} + C \delta_{im} \delta_{kl}$ . Тогда  $p_{ik} = A \delta_{ik} \delta_{lm} V_{lm} + B \delta_{il} \delta_{km} V_{lm} + C \delta_{im} \delta_{kl} V_{lm} = A \delta_{ik} V_{ll} + B V_{ik} + C V_{ki}$ . Поскольку  $V_{ik} = V_{ki}$ , то, обозначая  $B + C = 2\mu$  и  $A = \mu'$ , получим

$$p_{ik} = 2\mu V_{ik} + \mu' \delta_{ik} V_{ll}.$$

Коэффициенты  $\mu$ ,  $\mu'$  (коэффициенты вязкости) определяют свойства изотропной среды. Полученная зависимость является основной во всей гидромеханике, при этом тензор  $p_{ik}$  определяет только напряжения от сил вязкости, но не давления.

Рассмотрим другое решение этой задачи, имеющей принципиальное значение в механике сплошных сред.

По определению изотропной среды, как бы мы ни поворачивали\* новую систему ( $K'$ ) относительно ( $K$ ), компоненты тензора  $\eta_{iklm}$ , определяющего свойства среды, должны остаться неизменными, т. е.  $\eta_{iklm} = \eta'_{iklm}$ .

Только в этом случае в жидкости, движущейся относительно новой системы ( $K'$ ) точно так же, как она двигалась относительно системы ( $K$ ), будут возникать одинаковые напряжения.

Покажем, что в изотропной среде из  $3^4 = 81$  компонент тензора  $\eta_{iklm}$  отличны от нуля только 21 компонента, причем независимыми среди них являются лишь две компоненты.

Прежде всего, так как тензоры  $p_{ik}$  и  $V_{ik}$  симметричны и существует функция свободной энергии,  $\eta_{iklm}$  может быть определен так, чтобы этот тензор обладал следующими свойствами симметрии:

$$\eta_{iklm} = \eta_{kilm}; \quad (1)$$

$$\eta_{iklm} = \eta_{ikml}; \quad (2)$$

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik}. \quad (3)$$

\* Речь идет не только о группе поворотов, но и о преобразованиях отражения (см. § 39). Иногда, если свойства среды инвариантны только по отношению к группе поворотов, среду называют гиротропной (см. Л. И. Седов в Механика сплошной среды. Т. I, М., «Наука», 1970).

Свойство (1) дает  $C_3^2 = 3^2 = 27$  уравнений, связывающих компоненты  $\eta_{iklm}$ ; свойство (2) дает 18 новых уравнений связи; свойство (3) доставляет еще  $C_3^2 = 5 = 15$  уравнений.

Таким образом, у тензора  $\eta_{iklm}$  остается пока  $81 - 27 - 18 - 15 = 21$  независимая компонента. Рассмотрим компоненты вида  $\eta_{iiii}$ .

Согласно общей формуле преобразования компонент тензора, в системе  $(K')$  получаем компоненты  $\eta'_{iiii} = \alpha_{i'k} \alpha_{i'l} \alpha_{i'm} \alpha_{i'n} \eta_{klmn}$ .

Пусть система  $(K')$  повернута относительно  $(K)$  вокруг оси  $(x_1)$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Матрица коэффициентов такого преобразования имеет вид

$$\| \alpha_{i'k} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Тогда в системе  $(K')$  имеем для компоненты  $\eta'_{2222} = \alpha_{2'k} \alpha_{2'l} \alpha_{2'm} \alpha_{2'n} \eta_{klmn} = \eta_{3333}$ . Но поскольку в силу изотропности  $\eta'_{2222} = \eta_{2222}$ , то получаем  $\eta_{2222} = \eta_{3333}$ .

Аналогично, рассматривая поворот  $(K')$  относительно  $(K)$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  вокруг осей  $(x_1)$  и  $(x_3)$ , окончательно найдем  $\eta_{1111} = \eta_{2222} = \eta_{3333}$ .

Таким образом, из группы компонент  $\eta_{iiii}$  независимой будет лишь одна компонента, значение которой обозначим через  $2\eta + \eta'$ .

Обратимся теперь к компонентам вида  $\eta_{ikkk}$ .

Рассматривая то же преобразование координат с матрицей (4), получим

$$\eta'_{i'122} = \alpha_{i'k} \alpha_{i'l} \alpha_{2'm} \alpha_{2'n} \eta_{klmn} = \eta_{i133}.$$

Аналогично предыдущему имеем  $\eta_{1122} = \eta_{1133} = \eta_{2233}$ .

Таким образом, и из этой группы остается независимой одна компонента, которую обозначим через  $\eta'$ .

Больше независимых компонент у тензора  $\eta_{iklm}$  нет. Действительно, в оставшиеся  $21 - 6 = 15$  независимых компонент входят девять компонент вида  $\eta_{ikll}$  ( $i \neq k$ ), три компоненты вида  $\eta_{ikik}$  ( $i \neq k$ ) и три компоненты вида  $\eta_{ikil}$  ( $i \neq k \neq l$ ).

Рассмотрим, как ведут себя компоненты  $\eta_{ikil}$  ( $i \neq k \neq l$ ) при преобразованиях (4). Имеем  $\eta'_{1213} = \alpha_{1'k} \alpha_{2'l} \alpha_{1'm} \alpha_{3'n} \eta_{klmn} = -\eta_{1213}$ .

Но в силу изотропности  $\eta'_{1213} = \eta_{1213}$ , поэтому отсюда получаем  $\eta_{1213} = 0$ . Аналогично получаем равенство нулю и двух остальных компонент этого вида.

Компоненты  $\eta_{ikll}$  ( $i \neq k$ ) тоже равны нулю. Действительно, рассматривая преобразование системы  $(K)$  в  $(K')$  с матрицей

$$\| \alpha_{i'k} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(система  $(K')$  повернута относительно  $(K)$  вокруг оси  $(x_1)$  на угол  $\pi$ ), получим

$$\eta'_{12ll} = \alpha_{1'k} \alpha_{2'm} \alpha_{1'n} \alpha_{l'r} \eta_{kmnr} = -\eta_{12ll}.$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, имеем  $\eta_{ikll} = 0$  ( $i \neq k$ ).

Наконец, рассматривая последнюю группу компонент  $\eta_{ikik}$  ( $i \neq k \neq l$ ), совершим преобразование координатных систем согласно матрице

$$\| \alpha_{i'k} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

(система  $(K')$  повернута относительно  $(K)$  вокруг оси  $(x_1)$  на угол  $\frac{\pi}{4}$ ). Тогда получим  $\eta'_{2323} = \alpha_{2'k} \alpha_{3'l} \alpha_{2'm} \alpha_{3'n} \eta_{klmn} = \frac{1}{2} \eta_{2222} - \frac{1}{2} \eta_{2233}$ . Отсюда, согласно принятым обозначениям, имеем  $\eta_{2323} = \eta$ .

Аналогично, рассматривая повороты на угол  $\frac{\pi}{4}$  вокруг осей  $(x_2)$  и  $(x_3)$ , получим окончательно  $\eta_{1313} = \eta_{1212} = \eta$ .

Таким образом, подводя итоги рассмотрения компонент тензора  $\eta_{iklm}$ , отмечаем, что среди 81 компоненты независимыми являются только две, которые мы обозначим через  $\eta$  и  $\eta'$ , причем

$$\begin{aligned} \eta_{1212} = \eta_{1313} = \eta_{2323} = \eta; \quad \eta_{1122} = \eta_{1133} = \eta_{2233} = \eta'; \\ \eta_{1111} = \eta_{2222} = \eta_{3333} = 2\eta + \eta'. \end{aligned} \quad (5)$$

Всего, как нетрудно подсчитать, тензор  $\eta_{iklm}$  имеет 21 компоненту, которые зависят между собой и отличны от нуля.

Теперь можно представить, какой общий вид будет иметь зависимость между компонентами тензора вязких напряжений  $\rho_{ik}$  и тензора скоростей деформаций  $V_{il}$ .

В силу свойств компонент  $\eta_{iklm}$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_{11} = \eta_{11lm} V_{lm} = \eta_{1111} V_{11} + \eta_{1122} V_{22} + \eta_{1133} V_{33} = \\ = (2\eta + \eta') V_{11} + \eta' V_{22} + \eta' V_{33} = 2\eta V_{11} + \eta' (V_{11} + V_{22} + V_{33}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\rho_{22} = 2\eta V_{22} + \eta' (V_{11} + V_{22} + V_{33}); \quad \rho_{33} = 2\eta V_{33} + \eta' (V_{11} + V_{22} + V_{33});$$

$$\rho_{12} = \eta_{12lm} V_{lm} = \eta_{1212} V_{12} + \eta_{1221} V_{21} = 2\eta_{1212} V_{12} = 2\eta V_{12}; \quad \rho_{13} = 2\eta V_{13};$$

$$\rho_{23} = 2\eta V_{23}.$$

Эти равенства можно объединить с помощью одной формулы

$$\rho_{ik} = 2\eta V_{ik} + \eta' \delta_{ik} V_{ll},$$

которая и будет выражать искомую зависимость.

**Задача 5.** Показать, что любой тензор 2-го ранга может быть разложен на сумму попарных произведений компонент трех векторов.

**Решение.** Введем тройку взаимно-ортогональных ортов  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ .

Обозначим через  $u_{(\alpha)i}, u_{(\alpha)}^i$  — ковариантные и контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{u}_\alpha$  в рассматриваемой системе обобщенных координат. Пусть в этой же системе определены, например, ковариантные компоненты некоторого тензора  $T_{ik}$ .

Рассмотрим скаляры

$$T_{(\alpha\beta)} = T_{ik} u_{(\alpha)}^i u_{(\beta)}^k. \quad (2.43)$$

Умножим каждый из этих скаляров на  $u_{(\alpha)\rho} u_{(\beta)q}$  и просуммируем по  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 T_{(\alpha\beta)} u_{(\alpha)\rho} u_{(\beta)q} = \sum_{i, k=1}^3 T_{ik} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 u_{(\alpha)}^i u_{(\alpha)\rho} u_{(\beta)}^k u_{(\beta)q}. \quad (2.44)$$

Однако по определению ортов  $\mathbf{u}_\alpha$  имеем  $u_\alpha u_\beta = \sum_{i=1}^3 u_{(\alpha)}^i u_{(\beta)i} = \delta_{\alpha\beta}$ .

Умножим это равенство на  $u_{(\beta)}^\alpha$  и просуммируем по  $\beta$ :  $\sum_{\alpha=1}^3 \delta_{\alpha\beta} u_{(\beta)}^\alpha = \sum_{i=1}^3 u_{(\alpha)}^i \times$   
 $\times \sum_{\beta=1}^3 u_{(\beta)i} u_{(\beta)}^\alpha$ , или  $u_{(\alpha)}^\alpha = \sum_{i=1}^3 u_{(\alpha)}^i \sum_{\beta=1}^3 u_{(\beta)i} u_{(\beta)}^\alpha$ . (\*) С другой стороны, по опре-

делению  $u_{(\alpha)}^a = \sum_{i=1}^3 g_i^a u_{(\alpha)}^i$ . Поэтому из сравнения этого выражения с (\*) получаем

$$g_i^k = \sum_{\beta=1}^3 u_{(\beta)i} u_{(\beta)}^k. \quad (2.45)$$

Тогда, очевидно, в (2.44) стоящая справа сумма равна  $\sum_{i, k=1}^3 T_{ik} g_p^i g_q^k = T_{pq}$ .

$$\text{Следовательно, } T_{pq} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 T_{(\alpha\beta)} u_{(\alpha)p} u_{(\beta)q}. \quad (2.46)$$

Эта формула и доказывает утверждение о том, что любой тензор 2-го ранга может быть представлен в виде суммы попарных произведений компонент трех векторов. Из нее легко получить разложение для  $T^{ik}$  и  $T_i^k$ .

Между прочим, выражение (2.45) является разложением смешанных компонент метрического тензора по векторам.

Совершенно аналогично для тензора  $n$ -го ранга можно получить разложение

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n=1}^3 T_{(\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n)} u_{(\alpha_1)i_1} u_{(\alpha_2)i_2} \dots u_{(\alpha_n)i_n}.$$

**Задача 6.** Найти разложение компонент  $g^{ik}$  и  $g_{ik}$  метрического тензора по векторам.

**Решение.** На основании (1.40) имеем  $g_{jk} u_{(\alpha)}^j = u_{(\alpha)k}$ .

Умножая каждое из этих соотношений ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) на  $u_{(\alpha)i}$  и суммируя по  $\alpha$ , найдем  $\sum_{j=1}^3 g_{jk} \sum_{\alpha=1}^3 u_{(\alpha)}^j u_{(\alpha)i} = \sum_{\alpha=1}^3 u_{(\alpha)k} u_{(\alpha)i}$ . Но, учитывая (2.45), получим  $\sum_{j=1}^3 g_{jk} g_i^j = \sum_{\alpha=1}^3 u_{(0)k} u_{(\alpha)i}$ , или  $g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 u_{(\alpha)k} u_{(\alpha)i}$ . Аналогично  $g^{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 u_{(\alpha)}^i u_{(\alpha)}^k$ .

**Задача 7.** В декартовой системе координат  $K(t_1, t_2, t_3)$  даны компоненты тензора 2-го ранга

$$\| \| A^{ik} \| \| = \| \| A_i^k \| \| = \| \| A^i_k \| \| = \| \| A_{ik} \| \| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Базисные векторы координатных систем  $K'_1$  и  $K''_{11}$  выражаются\* через базисные векторы декартовой системы по следующим формулам:

$$\begin{array}{ll} \text{I) } e_1 = i_1 & \text{II) } e_1 = -i_1 + i_3 \\ e_2 = i_1 + i_2 & e_2 = i_2 + i_3 \\ e_3 = i_1 + i_2 + i_3 & e_3 = 2i_3 \end{array}$$

Определить ковариантные, смешанные и контравариантные компоненты данного тензора в системах  $K'_1$  и  $K''_{11}$ .

Решение.

Для случая I. По формулам (2.36)  $A'_{ik} = \alpha_{i'}^l \alpha_{k'}^m A_{lm}$ , где  $\alpha_{i'}^l$ ,  $\alpha_{k'}^m$  — коэффициенты прямого преобразования (I), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_{1'}^1 &= 1, & \alpha_{1'}^2 &= 0, & \alpha_{1'}^3 &= 0, \\ \alpha_{2'}^1 &= 1, & \alpha_{2'}^2 &= 1, & \alpha_{2'}^3 &= 0, \\ \alpha_{3'}^1 &= 1, & \alpha_{3'}^2 &= 1, & \alpha_{3'}^3 &= 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|A'_{ik}\| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 19 \end{vmatrix}.$$

$A'^{ik}$ , ... находим по формулам (2.37), выражающим связь между смешанными, ко- и контравариантными компонентами тензора с помощью метрического тензора:

$$A'^{ik} = g^{il} g^{km} A'_{lm}, \quad A'^{\cdot k} = g^{kl} A'_{l\cdot}, \quad A'^i = g^{il} A'_{lk}.$$

По формулам (1.44)  $g^{ik}$  определяется через  $g_{ik}$ :

$$\|g_{ik}\| = \|e_i \cdot e_k\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \|g^{ik}\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь

$$\|A'^{ik}\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \|A'^{\cdot k}\| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \|A'^i\| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Для случая II. Решение рекомендуется провести читателю.

## Упражнения

1. Пусть система ( $K'$ ) из начального положения, в котором она совпадала с ( $K$ ), повернута на угол  $\frac{\pi}{6}$  вокруг оси ( $x_3$ ), а затем на  $\frac{\pi}{2}$  вокруг оси ( $x_1'$ ) так, что ось ( $x_2'$ ) совпадает с ( $x_3$ ) (рис. 2.16).

Найти:

1) Компоненты векторов  $A = i_1 + 2i_2 + 3i_3$ ,  $B = 4i_1 + 5i_2 + 6i_3$  в системе ( $K'$ ).

2) Касательные и нормальные напряжения на площадке, перпендикулярных к осям системы ( $K'$ ), если в системе ( $K$ ) тензор напряжений  $p_{ik}$  имел матрицу

$$\|p_{ik}\| = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}.$$

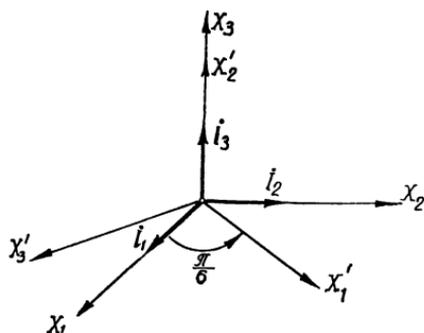


Рис. 2.16. К упражнению 1.

3) Найти напряжение на площадке, проходящей через биссектрису первого квадрата плоскости ( $x_1$ ,  $x_2$ ) под углом  $\frac{\pi}{4}$  к оси ( $x_3$ ) в системе ( $K$ ).

2. Тензор инерции прямого кругового цилиндра относительно осей, проходящих через его центр тяжести (ось ( $x_3$ ) параллельна образующим), имеет вид

$$\|I_{ik}\| = \begin{vmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{vmatrix}.$$

Найти момент инерции цилиндра относительно биссектрис координатных углов.

3. Если  $A_{ikl}$  — ковариантные компоненты тензора 3-го ранга, а  $B^{pqmn}$  — контравариантные компоненты тензора 4-го ранга, показать, что величины  $A_{ikl}B^{klmn}$  являются смешанными (один раз ковариантными, два раза контравариантными) компонентами тензора 3-го ранга.

4. Если  $V_i$  — ковариантные компоненты вектора,  $x^i$  — обобщенные координаты, то проверить, является ли совокупность девяти величин  $\frac{\partial V_i}{\partial x^k}$  тензором 2-го ранга.

5. Для преобразования координат  $q^1 = x_1 + x_2$ ,  $q^2 = x_2 - x_1$ ,  $q^3 = 2x_3$ , где  $(x_1, x_2, x_3)$  — прямоугольные декартовы координаты:

1) показать, что  $(q^1, q^2, q^3)$  — система декартовых координат;

2) найти базисные векторы;

3) найти компоненты  $g_{ik}$  метрического тензора;

4) найти ко- и контравариантные компоненты векторов

$$2i_1, \quad A = i_1 + i_2, \quad B = 2i_1 - 3i_3;$$

5) вычислить детерминант  $G = \det \|g_{ik}\|$ ;

6) вычислить проекции  $A \times B$  в той и другой системах координат.

6. Для сферической системы координат показать, что векторы, контравариантные компоненты которых равны  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{R}, 0)$ ,  $(0, 0, \frac{1}{R \sin \theta})$ , образуют тройку ортогональных векторов.

7. Для системы биполярных координат  $(q^1, q^2)$ , связанных с декартовыми прямоугольными  $(x_1, x_2)$  соотношениями

$$x_1 = \frac{a \operatorname{sh} q^1}{\operatorname{ch} q^1 + \cos q^2}, \quad x_2 = \frac{a \sin q^2}{\operatorname{ch} q^1 + \cos q^2}, \quad (a = \text{const}),$$

найти:

1) базисные векторы  $e_1, e_2$  (ортогональны ли они?);

2) ковариантные компоненты метрического тензора  $g_{ik}$ ;

3) ковариантные и контравариантные компоненты ортов  $i_1, i_2$ .

8. В прямоугольных декартовых координатах  $(x_1, x_2, x_3)$  тензоры  $A$  и  $T$  имеют компоненты

$$\begin{aligned} A_1 &= x_1 x_2 \\ A_2 &= 2x_2 - x_3^2 \\ A_3 &= x_1 x_3 \end{aligned} \quad \|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 x_1 & 0 \\ x_1 x_2 & x_2 & 1 \\ 0 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Найти ковариантные, контравариантные и «физические» компоненты этих тензоров в сферических и цилиндрических координатах.

9. Показать, что углы  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}$  между координатными осями обобщенных координат определяются выражениями

$$\cos \theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos \theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos \theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}.$$

Найти углы, которые образует вектор  $A^i$  с координатными осями обобщенных координат.

10. Выяснить, образуют ли величины  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^k}$  тензор, если  $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3)$  — скалярная функция.

## Тензорная алгебра

В этом разделе мы остановимся на основных алгебраических действиях над тензорами (сложение и вычитание, умножение, свертывание) и на некоторых свойствах тензоров.

В системе обобщенных криволинейных координат к алгебре тензоров относится еще операция перестановки индексов и операция поднятия и опускания индексов, рассмотренная ранее в 2.9. Так как тензор определяется своими компонентами, то определение действий над тензорами сводится к построению формул, выражающих в каждой системе координат компоненты результата действия через компоненты тензоров, над которыми производятся действия.

### 3.1. Сложение тензоров

Пусть  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  — компоненты двух тензоров 2-го ранга. Составим числа  $C_{ik}$  в виде сумм соответствующих компонент тензоров:  $C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$ .

Числа  $C_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга. Действительно, так как  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  — компоненты тензоров, то  $A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm}$ ;  $B'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} B_{lm}$  и  $C'_{ik} = A'_{ik} + B'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (A_{lm} + B_{lm}) = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} C_{lm}$ , т. е.  $C_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга.

Тензор с компонентами  $C_{ik}$  называется *суммой* тензоров с компонентами  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$ , а операция образования его компонент — *сложением* этих тензоров. Правило сложения относится к любому числу тензоров любого ранга.

*Суммой тензоров одного ранга называется тензор того же ранга, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых.*

Таким образом, складывать можно только тензоры одного ранга.

Аналогично сумме двух тензоров определяется разность двух тензоров одного ранга и соответственно операция вычитания.

В случае отнесения тензоров к обобщенным координатам при сложении и вычитании тензоров одного ранга необходимо оперировать компонентами одинакового строения. Таким образом, правильными будут, например, записи:

$$A^{ik} + B^{ik} = C^{ik}, \quad A_i^{\cdot k} + B_i^{\cdot k} = C_i^{\cdot k}, \quad A^{\cdot\cdot ik} + B^{\cdot\cdot ik} = C^{\cdot\cdot ik}$$

и т. п.

Вследствие того что формулы преобразования компонент тензоров при изменении координатной системы и в самом общем случае остаются однородными относительно коэффициентов преобразования и линейными относительно компонент тензоров, величины  $C_i^{ik}$ ,  $C_i^k$  и т. д. предыдущих выражений являются компонентами тензоров того же ранга и строения, что и слагаемые.

### 3.2. Умножение тензоров

Пусть  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  — компоненты двух тензоров 2-го ранга. Составим в каждой координатной системе всевозможные произведения компонент одного тензора на компоненты другого. Эти произведения будут зависеть от индексов, число которых равно сумме рангов тензоров  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$ . Обозначим  $C_{iklm} = A_{ik}B_{lm}$ .

Числа  $C_{iklm}$  образуют тензор 4-го ранга. Действительно, так как  $A'_{ik} = \alpha_{i'l'}\alpha_{k'm}A_{lm}$ ;  $B'_{ik} = \alpha_{i'l'}\alpha_{k'm}B_{lm}$ , то  $C'_{iklm} = A'_{ik}B'_{lm} = \alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's}A_{np}B_{rs} = \alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's}C_{np rs}$ .

Это доказывает, что  $C_{iklm}$  образуют тензор 4-го ранга.

Тензор с компонентами  $C_{iklm}$  называется произведением тензоров с компонентами  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$ , а операция образования его компонент — умножением (иногда внешним умножением или тензорным умножением) этих тензоров.

Нетрудно видеть, что  $C_{iklm} = A_{ik}B_{lm} \neq C_{lmik} = A_{lm}B_{ik}$ .

Таким образом, *тензорное умножение некоммутативно*.

Правило умножения относится к любому числу тензоров любого ранга.

*Произведением нескольких тензоров называется тензор, компоненты которого равны произведениям компонент сомножителей. Ранг произведения тензоров равен сумме рангов сомножителей.*

В самом общем случае координатных систем произведением двух тензоров, определяемых, например, компонентами  $A_{kl}^i$  и  $B^{ik}$ , называется тензор с компонентами, определяемыми по правилу  $C_{kl}^{i \cdot mn} = A_{kl}^i B^{mn}$ .

Используя общие законы преобразования компонент тензоров, нетрудно показать, что величины  $C_{kl}^{i \cdot mn}$  образуют тензор.

Таким образом, перемножать можно тензоры любого ранга и строения.

### 3.3. Свертывание тензоров

В тензорном исчислении часто применяется операция свертывания тензоров. *Свертыванием называется суммирование компонент тензора по двум каким-либо индексам.*

Свертывание можно проводить только тех тензоров, ранг которых не менее двух.

Пусть  $A_{ikl}$  образуют тензор 3-го ранга. Произведем свертывание его по двум индексам —  $i$  и  $k$ , т. е. возьмем только те его компоненты, у которых индексы  $i$  и  $k$  равны, и составим из них суммы:  $A_{iil} \equiv \sum_{i=1}^3 A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l}$ .

В результате свертывания тензора  $A_{ikl}$  по другим индексам получим суммы  $A_{iki}$  и  $A_{ill}$ . Таких сумм каждого вида будет три. Например, для  $A_{iil}$  имеем:

$$A_{ii1} (\equiv \sum_{i=1}^3 A_{ii1}); A_{ii2} (\equiv \sum_{i=1}^3 A_{ii2}); A_{ii3} (\equiv \sum_{i=1}^3 A_{ii3}).$$

Докажем, что любая такая группа из трех сумм, например  $A_{iil}$ , образует тензор 1-го ранга, т. е. вектор.

Так как  $A_{ikl}$  образуют тензор 3-го ранга, то  $A_{ikl} = \alpha_{i'r} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} A_{mnr}$ . Отсюда, свертывая по индексам  $i$  и  $k$  и учитывая формулу, аналогичную (2.5), получим  $A'_{iil} = \alpha_{i'm} \alpha_{i'n} \alpha_{l'r} A_{mnr} = \delta_{mn} \alpha_{l'r} A_{mnr} = \alpha_{l'r} A_{mnr}$ .

Из этой формулы преобразования следует, что величины  $A_{iil}$  определяют вектор.

Сформулируем общее правило относительно свертывания.

*При свертывании по двум индексам тензора ранга  $n$  получается тензор ранга  $n - 2$ .*

Операцию свертывания можно применять к тензору несколько раз, до тех пор, пока его ранг не станет меньше двух.

*Тензор четного ранга может быть свернут до скаляра, а тензор нечетного ранга — только до вектора.*

Умножение тензоров с последующим свертыванием по индексам, относящимся к различным множителям — тензорам, называется иногда скалярным или «внутренним» произведением тензоров.

Мы уже приводили примеры «внутренних» произведений (см. гл. 2):  $\alpha_{ik} B_k = A_i$ ,  $\lambda_{iklm} B_{lm} = A_{ik}$ .

Скалярное произведение двух векторов является произведением двух тензоров 1-го ранга с последующим свертыванием.

При свертывании тензоров, компоненты которых рассматриваются в обобщенных системах координат, важно помнить, что *свертывание может производиться только по парам разноименных индексов*, т. е. один свертываемый индекс должен быть «ковариантным», а другой обязательно «контравариантным». Это следует из требования о том, что результат свертывания тензора должен оставаться тензором.

Действительно, пусть, например, мы произвели свертку тензора  $A_i^{kl}$  по индексам  $i$  и  $k$ ; тогда величины  $A_i^{il}$  будут компонентами тензора (вектора), ибо в силу (2.36) и (1.7) имеем  $A_i^{il} = \alpha_{i'r}^n \alpha_m^{i'} \alpha_r^{l'} A_n^{mr} = \alpha_r^{l'} A_n^{nr}$ .

Свертка же  $A_i^{kl}$  по индексам  $k$  и  $l$  дает величины, закон преобразования которых  $A_i^{kk} = \alpha_{i'r}^n \alpha_m^{k'} \alpha_r^{k''} A_n^{mr}$  указывает на то, что три величины  $A_i^{kk}$  не образуют вектора.

«Внутреннее» произведение тензоров, отнесенных к произвольным системам координат, может быть образовано только из компонент с разноименными индексами. Например,

$$A_{ik} B^k = A^i; \lambda_{ik}^{lm} B_{lm} = \lambda_{ik \cdot m}^{l \cdot} B_i^m = \lambda_{iklm} B^{lm} = A_{ik}.$$

### 3.4. Свойство симметрии тензоров

Понятие симметрии относится к тензорам ранга не менее двух.

Тензор  $S_{ikl} \dots$  называется *симметричным* по паре индексов, например  $i$  и  $k$ , если компоненты, получающиеся при перестановке этих индексов, равны друг другу, т. е.  $S_{ikl} \dots = S_{kil} \dots$ .

Таким образом,  $S_{12l} \dots = S_{21l} \dots$ ;  $S_{23l} \dots = S_{32l} \dots$  и т. д.

Тензор  $A_{ikl}$  называется *антисимметричным* по паре индексов, если при их перестановке компоненты меняют знак, т. е.  $A_{ikl} \dots = -A_{kil} \dots$ . Таким образом,  $A_{12l} \dots = -A_{21l} \dots$ ;  $A_{23l} \dots = -A_{32l} \dots$  и т. д.

У антисимметричного тензора компоненты с равными индексами, по которым имеет место антисимметрия, равны нулю. Если  $A_{ikl} \dots = -A_{kil} \dots$ , то, например,

$$A_{11l} \dots = -A_{11l} \dots, \text{ т. е. } A_{11l} \dots = 0.$$

*Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора системы координат.*

Таким образом, тензор, симметричный (антисимметричный) в какой-либо системе координат, остается симметричным (антисимметричным) в любой другой системе координат.

Доказательство этого утверждения следует из закона преобразования тензора.

Действительно, если тензор  $T_{ik}$  симметричен в системе  $(K)$ , т. е.  $T_{ik} = T_{ki}$ , то  $T'_{ik} = \alpha_{i'j} \alpha_{k'm} T_{lm} = \alpha_{i'j} \alpha_{k'm} T_{ml} = T'_{ki}$ .

Аналогично показывается инвариантность свойства антисимметрии по отношению к выбору системы координат.

Симметричный  $S_{ik}$  и антисимметричный  $A_{ik}$  тензоры 2-го ранга имеют матрицы следующего вида:

$$\|S_{ik}\| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}; \quad \|A_{ik}\| = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Антисимметричный тензор 2-го ранга называется бивектором.

*Любой тензор  $T_{ik}$  может быть представлен в виде суммы симметричного тензора  $S_{ik}$  и антисимметричного  $A_{ik}$ .*

Доказательство следует из очевидного равенства

$$T_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}). \quad (3.1)$$

Тензор  $S_{ik} \equiv \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki})$  — симметричный, ибо  $S_{ik} = S_{ki}$ . Тензор

$A_{ik} \equiv \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki})$  — антисимметричный, ибо  $A_{ik} = -A_{ki}$ .

Утверждение доказано.

**Перестановка индексов, симметрирование и альтернирование.** Компоненты тензора, например ковариантного  $T_{ik}$ , можно рассматривать как элементы квадратной матрицы

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

Если в тензоре  $T_{ik}$  поменять местами индексы, то получится новый тензор  $T_{ki}$ , матрица которого

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}$$

будет транспонированной по отношению к матрице  $T_{ik}$  (столбцы станут строками); совокупность величины  $T_{ki}$  будет преобразовываться по формулам (2.7).

Таким образом, простейшая операция — перестановка индексов — приводит к построению нового тензора. Очевидно, что для симметричного тензора перестановка индексов приводит к тому же тензору.

Симметрированием называется операция перестановки пары индексов и последующее сложение полученного тензора с исходным тензором. В результате получается тензор, симметричный относительно принятой пары индексов.

Альтернированием называется операция перестановки пары индексов и последующее вычитание полученного тензора из исходного; при этом получается антисимметричный тензор относительно принятой пары индексов.

Из (3.1) следует, что симметричная часть  $S_{ik}$  тензора  $T_{ik}$  равна половине от результата симметрирования, а антисимметричная  $A_{ik}$  — половине от результата альтернирования.

Наличие у тензора свойства симметрии уменьшает число его независимых компонент.

Число независимых компонент симметричного тензора 2-го ранга равно шести, антисимметричного 2-го ранга — трем.

Примером симметричного тензора 2-го ранга может служить единичный тензор  $\delta_{ik}$ , примером антисимметричного тензора 2-го ранга — тензор  $C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i$ , где  $A_i$  и  $B_i$  — компоненты двух векторов.

Свойства симметрии и антисимметрии тензоров, отнесенных к системам обобщенных координат, устанавливаются по парам одноименных (ковариантных или контравариантных) индексов. Так, тензор  $A_{ik}^{\cdot\cdot l}$  — симметричен, а  $B_{ik}^{\cdot\cdot l}$  — антисимметричен, если  $A_{ik}^{\cdot\cdot l} = A_{kl}^{\cdot\cdot l}$ ,  $B_{ik}^{\cdot\cdot l} = -B_{ki}^{\cdot\cdot l}$ .

Все остальные положения этого параграфа имеют силу и для тензоров, рассматриваемых в системах обобщенных координат.

**Эквивалентность антисимметричного тензора аксиальному вектору.** Наличие у антисимметричного тензора только трех независимых компонент и специфический закон их преобразования позволяют сопоставить такому тензору некоторый аксиальный вектор, определяемый этими тремя компонентами.

Покажем, что формулы преобразования компонент антисимметричного тензора сводятся к формулам преобразования некоторого аксиального вектора.

Пусть имеем антисимметричный тензор  $A_{ik}$ . Тогда в новой системе координат его компоненты  $A_{ik}$  будут:

$$A'_{ik} = \alpha_{i'j} \alpha_{k'm} A_{lm} = \alpha_{i'1} \alpha_{k'2} A_{12} + \alpha_{i'2} \alpha_{k'1} A_{21} + \alpha_{i'1} \alpha_{k'3} A_{13} + \alpha_{i'3} \alpha_{k'1} A_{31} + \\ + \alpha_{i'2} \alpha_{k'3} A_{23} + \alpha_{i'3} \alpha_{k'2} A_{32}.$$

Эту формулу можно записать, используя равенства  $A_{lm} = -A_{ml}$  в виде

$$A'_{ik} = (\alpha_{i'j} \alpha_{k'm} - \alpha_{i'm} \alpha_{k'j}) A_{lm}, \quad (3.2)$$

где индексы  $l$  и  $m$  в сумме справа могут принимать только циклические перестановки: 12, 23, 31.

Введем обозначения для компонент тензора:  $A_{12} = -A_{21} \equiv A_3$ ,  $A_{31} = -A_{13} \equiv A_2$ ,  $A_{23} = -A_{32} \equiv A_1$ , или короче  $A_{lm} \equiv A_n$ , где индексы  $l, m, n$  составляют циклические перестановки.

Аналогично в новой системе компоненты тензора обозначим следующим образом:  $A'_{ik} \equiv A'_r$ , где индексы  $i, k, r$  составляют также циклические перестановки.

Тогда формулу (3.2) можно записать

$$A'_r = \sum_{(l, m, n)} (\alpha_{i'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{i'm} \alpha_{k'l}) A_n. \quad (3.3)$$

Здесь индексы  $(r, i, k)$  и  $(l, m, n)$  составляют циклические перестановки чисел  $(1, 2, 3)$ , а справа стоит сумма по циклическим перестановкам индексов  $(l, m, n)$ , т. е. всего три слагаемых.

Раскладывая орты  $i'_i$  новой системы  $(K)$  по ортам старой системы  $i_l$ , найдем  $i'_i = \alpha_{i'l} i_l$ . Поэтому, вычисляя векторное произведение ортов системы (3.3), получим  $i'_i \times i'_k = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (i_l \times i_m)$ , где справа стоит сумма по всем значениям  $l$  и  $m$ . Умножая это выражение скалярно на  $i_n$ , получим  $(i'_i \times i'_k) \cdot i_n = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (i_l \times i_m) \cdot i_n$ , причем при фиксированном индексе  $n$  здесь справа стоит только пара слагаемых (если среди  $l, m, n$  нет одинаковых индексов), отличающихся знаком.

Если старая система  $(K)$  была правой (или левой), в которой направление векторного произведения определено по правилу левого винта (см. § 1.4), то

$$(i'_i \times i'_k) \cdot i_n = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{i'm} \alpha_{k'l}, \quad (3.4)$$

где индексы  $(l, m, n)$  составляют циклическую перестановку.

Если новая система  $(K')$  тоже правая, как и  $(K)$  (или тоже левая, как и  $(K)$ ) то  $i'_i \times i'_k = i_r$  при циклической перестановке индексов  $(r, i, k)$ .

Если же новая система  $(K')$  левая, то  $i'_i \times i'_k = -i_r$  при циклической же перестановке индексов  $(r, i, k)$ .

Итак: 1) если рассматривается преобразование координатной системы такое, что правая система переходит в правую же, то  $(i'_i \times i'_k) \cdot i_n = i'_r \cdot i_n = \alpha_{r'n}$  при циклических перестановках индексов  $(r, i, k)$ ; 2) если преобразование системы  $(K)$  в  $(K')$  такое, что правая система переходит в левую, то  $(i'_i \times i'_k) \cdot i_n = -(i'_r \cdot i_n) = -\alpha_{r'n}$ . Таким образом, формулу (3.4) можно записать в виде  $\alpha_{r'n} = \pm (\alpha_{i'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{i'm} \alpha_{k'l})$ , где индексы  $(r, i, k)$  и  $(n, l, m)$  составляют циклические перестановки чисел  $(1, 2, 3)$ .

Возвращаясь к формуле (3.3), теперь получим

$$A'_r = \pm \alpha_{r'n} A_n \left( \equiv \pm \sum_{n=1}^3 \alpha_{r'n} A_n \right).$$

Итак, при преобразованиях правой координатной системы в правую имеем  $A'_r = +\alpha_{r'n} A_n$ , а при преобразованиях правой координатной системы в левую (или левой системы в правую)  $A'_r = -\alpha_{r'n} A_n$ .

С такими векторами мы уже встречались в главе первой при рассмотрении векторного произведения: это аксиальные векторы.

Таким образом, компоненты антисимметричного тензора преобразуются как компоненты аксиального вектора.

Если скаляры и тензоры более высоких рангов, формулы преобразования компонент которых меняют знак при преобразованиях, переводящих правую систему в левую. Все эти тензоры называются псевдотензорами; на свойствах псевдотензоров мы подробно остановимся в 3.9.

### 3.5. Единичный тензор. Метрический тензор

В предыдущей главе было показано (см. 2.4, пример 2), что известный из алгебры символ Кронекера  $\delta_{ik}$  является тензором 2-го ранга с матрицей

$$\| \delta_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \delta_{ik} = a_{l'i} a_{l'k} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Тензор  $\delta_{ik}$  носит название единичного тензора.

По смыслу определения единичного тензора его *компоненты равны либо нулю ( $i \neq k$ ), либо единице* во всех координатных системах. Это следует из определения  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{ik}'$  (см. 2.5).

Умножение  $\delta_{ik}$  на тензор с последующим свертыванием часто используется в алгебраических выкладках. Например,  $A_{ik}B_k - B_i = A_{ik}B_k - \delta_{ik}B_k = (A_{ik} - \delta_{ik})B_k$  (ибо  $B_i \equiv \delta_{ik}B_k$ ).

В определенном смысле метрический тензор является обобщением понятия единичного тензора  $\delta_{ik}$ . Прежде всего заметим, что квадрат линейного элемента в прямоугольных декартовых координатах может быть записан в виде  $ds^2 = \delta_{ik}dx^i dx^k$ , в то время как в произвольных координатах имеем  $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ . Кроме того, из определения  $\delta_{ik} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_k$  следует, что компоненты  $\delta_{ik}$  представляют собой косинусы углов между осями одной какой-то координатной системы (декартовой прямоугольной). Тензор  $\delta_{ik}$  может быть определен через  $\alpha_{i'k}$  — косинусы углов между осями двух произвольных декартовых прямоугольных систем (см. 2.5), причем  $\alpha_{i'k} = \mathbf{i}_i' \cdot \mathbf{i}_k$ .

В случае введения произвольных базисов, определяющих системы обобщенных координат, компоненты метрического тензора определяются через всевозможные произведения векторов основного и взаимного базисов одной и той же системы координат:  $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_k| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$ ;  $g^{ik} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = |\mathbf{e}^i| |\mathbf{e}^k| \cos(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k)$ ;  $g_i{}^k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}^k| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k)$ .

При этом, поскольку векторы  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}^i$  не являются ортами, компоненты  $g^{ik}$ ,  $g_{ik}$ ,  $g_i{}^k$  определяют косинусы углов между осями базисов только с точностью до множителей.

Что касается коэффициентов прямого  $\alpha_{i'k}$  и обратного  $\alpha_i{}^{k'}$  преобразований, то они также с точностью до множителей определяют косинусы углов между осями разноименных базисов двух различных систем координат:  $\alpha_{i'k} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}^k = |\mathbf{e}_i'| |\mathbf{e}^k| \cos(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}^k)$ ;  $\alpha_i{}^{k'} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{k'} = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}^{k'}| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{k'})$ .

Через эти коэффициенты могут быть выражены смешанные компоненты метрического тензора:

$$g_i{}^k = \alpha_i{}^{k'} \alpha_{i'k}. \quad (*)$$

Это следует, например, из (1.5) и определений (1.39).

Умножив (1.5) на  $\mathbf{e}^i$ , получим  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = \sum_{k=1}^3 \alpha_j{}^{k'} \mathbf{e}_k' \cdot \mathbf{e}^i$ , откуда — равенство (\*).

Из определений единичного и метрического тензоров следует:

- 1) единичный тензор симметричный ( $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ );
- 2) метрический тензор симметричный ( $g^{ik} = g^{ki}$ ;  $g_{ik} = g_{ki}$ ).

### 3. 6. Главные оси тензора.

#### Приведение тензора к главным осям

Вопрос о главных осях тензора имеет важное значение в физике.

Рассмотрим произвольный тензор 2-го ранга  $T_{ik}$ . Если этот тензор умножить на вектор  $\mathbf{A}$  и произвести свертывание по индексу вектора и одному индексу тензора, то в результате получаем некоторый вектор  $\mathbf{B}$  с компонентами  $B_i = T_{ik}A_k$ .

Можно говорить, что тензор  $T_{ik}$ , будучи умножен скалярно на некоторый вектор  $\mathbf{A}$ , преобразует его в новый вектор  $\mathbf{B}$  в том смысле, что из компонент вектора  $\mathbf{A}$  определенным действием получаются компоненты другого вектора — вектора  $\mathbf{B}$ . Вектор  $\mathbf{B}$  вообще отличен от  $\mathbf{A}$  по величине и направлению. Таким образом, тензор при умножении на вектор изменяет длину этого вектора и поворачивает его.

Поставим задачу отыскать для заданного тензора  $T_{ik}$  такие векторы  $\mathbf{A}$ , которые бы не поворачивались этим тензором, а только изменяли длину. Тогда  $T_{ik}A_k = \lambda A_i$ , где  $\lambda$  — скаляр.

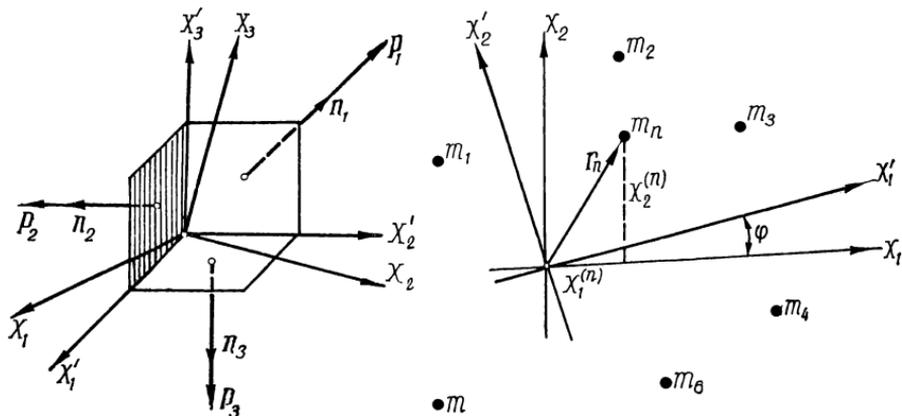


Рис. 3.1. Главные оси тензора напряжений  $p_{ik}$  в точке  $M$ . На площадках, перпендикулярных к осям  $(x'_1)$ ,  $(x'_2)$ ,  $(x'_3)$ , касательные напряжения равны нулю.

Рис. 3.2. Главные оси тензора моментов инерции плоской системы материальных точек.

Физический смысл этой задачи поясним на некоторых примерах.

Напряжение на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  равно (см. гл. 2)  $p_{nk} = p_{ik}n_i$ , причем вообще вектор  $\mathbf{p}_n$  не параллелен орту  $\mathbf{n}$ , т. е. на каждой площадке есть как нормальные, так и касательные напряжения.

Интерес представляют такие площадки, на которых есть только нормальные напряжения, а касательные равны нулю (рис. 3.1). Для этих площадок  $\mathbf{p}_n \parallel \mathbf{n}$  или  $\lambda \mathbf{n} = \mathbf{p}_n = p_{ik}n_i$ . Тогда ориентация этих площадок (орты  $\mathbf{n}$ ) определится из системы уравнений  $\lambda n_k = p_{ik}n_i$ .

Если диэлектрические свойства среды определяются тензором  $\epsilon_{ik}$ , то возникает вопрос, как следует направить электрическое поле  $\mathbf{E}$ , чтобы электрическая индукция  $\mathbf{D}$  была направлена по вектору напряженности  $\mathbf{E}$ ?

Общий вид зависимости  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$  имеет линейный характер, так что  $D_i = \epsilon_{ik}E_k$ .

Поставленная задача требует отыскания векторов  $\mathbf{E}$ , удовлетворяющих уравнениям  $\lambda E_i = \epsilon_{ik}E_k$ .

Если существуют для тензора  $T_{ik}$  векторы  $A$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda A_i = T_{ik} A_k, \quad (3.5)$$

то направления, определяемые этими векторами, называются *главными (собственными) направлениями тензора*  $T_{ik}$ . Оси этих направлений носят названия *главных осей тензора*.

Значения компонент тензора в координатной системе главных осей называются *главными значениями*.

Прежде чем переходить к задаче отыскания главных осей и главных значений компонент тензоров в общем случае, рассмотрим простейший пример тензора 2-го ранга на плоскости.

Пусть  $I_{ik}$  — тензор моментов инерции (относительно осей с началом в точке  $O$ ) системы материальных точек с массами  $m_n$ , расположенных в плоскости  $(x_1, x_2)$  (рис. 3.2). Этот тензор является плоским, он имеет только четыре компоненты. Матрица этого тензора имеет вид

$$\| I_{ik} \| = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{где } I_{11} = \sum_{n=1}^N m_n (x_2^{(n)})^2; \quad I_{22} = \sum_{n=1}^N m_n (x_1^{(n)})^2; \\ I_{12} = - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = I_{21}.$$

Если вектор  $A$  направлен по главной оси этого тензора, то согласно (3.5) его компоненты  $A_1, A_2$  должны удовлетворять системе однородных уравнений:

$$\lambda A_1 = I_{11} A_1 + I_{12} A_2; \quad \lambda A_2 = I_{12} A_1 + I_{22} A_2. \quad (*)$$

Эта система имеет нетривиальное (отличное от нуля) решение только в том случае, если

$$\left\| \begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} - \lambda \end{vmatrix} \right\| = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda (I_{11} + I_{22}) + I_{11} I_{22} - I_{12}^2 = 0. \quad (**)$$

Следовательно, система (\*) имеет отличное от нуля решение тогда и только тогда, когда  $\lambda = \lambda_1$  или  $\lambda = \lambda_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни уравнения (\*\*), т. е.

$$\lambda_1 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}; \\ \lambda_2 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}.$$

Если  $I_{12} = 0$ , то тогда исходные оси  $(x_1)$  и  $(x_2)$ , как это следует из (\*) и (3.5), являются уже главными.

Поскольку имеется два различных  $\lambda$ , удовлетворяющих системе при  $A_i \neq 0$ , это значит, что существует два различных главных направления, определяемых векторами  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$ . Направления этих векторов и определяются из системы (\*):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_1 - I_{22}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\lambda_2 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_2 - I_{22}}.$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы, которые составляют главные оси тензора  $I_{ik}$  с осью  $(x_1)$

Подставляя сюда значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и вычисляя  $\operatorname{tg} 2\varphi_1$  и  $\operatorname{tg} 2\varphi_2$ , получим:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}.$$

Отсюда  $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ , так что главные оси взаимно-перпендикулярны.

В системе главных осей тензор  $I_{ik}$  имеет компоненты:

$$I'_{11} = \lambda_1; \quad I'_{22} = \lambda_2; \quad I'_{12} = 0, \quad (***)$$

что можно проверить непосредственным вычислением. Это следует из соотношений (\*), записанных в системе главных осей:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1^{(1)'} &= I'_{11} A_1^{(1)'} + I'_{12} A_2^{(1)'}; & \lambda_1 A_2^{(1)'} &= I'_{12} A_1^{(1)'} + I'_{22} A_2^{(1)'}; \\ \lambda_2 A_1^{(2)'} &= I'_{11} A_1^{(2)'} + I'_{12} A_2^{(2)'}; & \lambda_2 A_2^{(2)'} &= I'_{12} A_1^{(2)'} + I'_{22} A_2^{(2)'}. \end{aligned}$$

Так как  $A_1^{(1)'} = |A^{(1)}|$ ;  $A_2^{(1)'} = 0$ ;  $A_1^{(2)'} = 0$ ;  $A_2^{(2)'} = |A^{(2)}|$ , то получим выражения (\*\*\*) . Используя это, можно в данном случае проще отыскать главные оси тензора  $I_{ik}$ .

Зная, что главные оси взаимно-перпендикулярны и что в системе главных осей  $I'_{12} = 0$ , выберем новую систему осей  $(x_1', x_2')$  такую, чтобы в ней компоненты тензора  $I'_{ik}$  обращались в нуль.

По общей формуле (2.7) имеем  $I'_{12} = \alpha_{1'l} \alpha_{2'k} I_{lk}$ .

Все косинусы  $\alpha_{i'l}$  могут быть выражены через функции одного параметра — угла  $\varphi$ , который составляет новая ось  $(x_1')$  со старой осью  $(x_1)$ . Действительно (рис. 3.2),  $\alpha_{1'1} = \cos \varphi$ ;  $\alpha_{1'2} = \sin \varphi$ ;  $\alpha_{2'2} = \cos \varphi$ ;  $\alpha_{2'1} = -\sin \varphi$ .

Таким образом (ср. § 2.6),

$$\begin{aligned} I'_{12} &= \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} I_{11} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} I_{22} + \alpha_{1'1} \alpha_{2'2} I_{12} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'1} I_{21} = \\ &= -\sin \varphi \cos \varphi I_{11} + \sin \varphi \cos \varphi I_{22} + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) I_{12} = \\ &= \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\varphi + I_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Чтобы  $I'_{12} = 0$ , необходимо  $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}$ .

Этим полностью определяется положение главных осей тензора  $I_{ik}$ . Главные значения этого тензора  $I'_{11}$  и  $I'_{22}$  следующие:

$$\begin{aligned} I'_{11} &= \alpha_{1'l} \alpha_{1'k} I_{lk} = \frac{I_{11} - I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} (= \lambda_1); \\ I'_{22} &= \alpha_{2'l} \alpha_{2'k} I_{lk} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} (= \lambda_2). \end{aligned}$$

Таким образом, в системе главных осей  $(x_1', x_2')$  тензор  $I'_{ik}$  имеет матрицу

$$\|I'_{ik}\| = \left\| \begin{array}{cc} I'_{11} & 0 \\ 0 & I'_{22} \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим вопрос об определении главных направлений и главных значений тензора  $T_{ik}$ .

Согласно (3.5), компоненты векторов  $\mathbf{A}$ , определяющие главные оси тензора  $T_{ik}$ , удовлетворяют системе трех однородных уравнений:

$$T_{ik} A_k - \lambda A_i = (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3 &= 0; \\ T_{21} A_1 + (T_{22} - \lambda) A_2 + T_{23} A_3 &= 0; \\ T_{31} A_1 + T_{32} A_2 + (T_{33} - \lambda) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эта однородная система служит для определения  $A_1, A_2, A_3$ . При этом находят отличное от нуля, или, как говорят, нетривиальное решение этой системы.

Как известно из алгебры, однородная система имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Равенство нулю определителя (3.7) представляет собой кубическое уравнение относительно  $\lambda$ . Это уравнение называется *характеристическим уравнением тензора*  $T_{ik}$ .

Таким образом, для определения из системы (3.6)  $A_1, A_2, A_3$  (отличных от нуля) необходимо и достаточно, чтобы значения  $\lambda$  в этой системе совпадали с одним из корней кубического уравнения (3.7). Корни этого уравнения, может случиться, не будут все вещественными, и тогда они не позволяют определить все три главных направления.

При отнесении тензора к системам обобщенных координат можно использовать его любые компоненты для определения его главных направлений и значений. Например, если определены ковариантные компоненты  $T_{ik}$  тензора, то уравнение, определяющее собственные векторы  $A$  тензора  $T_{ik}$ , имеет вид (см. (3.5))

$$\lambda A_i = T_{ik} A^k. \quad (3.7a)$$

Отсюда в силу  $A_i = g_{ik} A^k$  получаем систему линейных однородных уравнений относительно  $A^i$  вида (см. 3.6)  $(T_{ik} - \lambda g_{ik}) A^k = 0$ .

Однако, чтобы привести эту систему к виду (3.6), необходимо пользоваться смешанными компонентами тензора. Умножив предыдущие уравнения ( $i = 1, 2, 3$ ) на  $g^{il}$  и просуммировав по  $i$ , в силу (2.37) получим

$$(T^i_k - \lambda g^i_k) A^k = 0. \quad (3.7b)$$

Тогда для определения собственных значений тензора получаем характеристическое уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} T^1_{.1} - \lambda T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} - \lambda T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.7b)$$

Остановимся на рассмотрении только симметричных тензоров 2-го ранга, отнесенных к прямоугольным декартовым системам координат, так что  $T_{ik} = T_{ki}$ .

В этом случае все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  характеристического уравнения (3.7) вещественны.

Действительно, пусть  $\lambda$  — какой-либо из корней уравнения (3.7) и пусть ему отвечают в силу уравнения (3.6) какие-то величины  $A_i$ , вообще комплексные.

Тогда, умножив каждое ( $i = 1, 2, 3$ ) из тождеств  $\lambda A_i \equiv T_{ik} A_k$  на величины  $\bar{A}_i$ , комплексно сопряженные с  $A_i$ , и просуммировав по  $i$ , получим

$$\lambda A_i \bar{A}_i = T_{ik} A_k \bar{A}_i. \quad (*)$$

Как как  $T_{ik} = T_{kl}$ , то  $T_{ik} A_k \bar{A}_i = \frac{1}{2} (T_{ik} A_k \bar{A}_i + T_{ik} A_k \bar{A}_i) = \frac{1}{2} (T_{ik} A_k \bar{A}_i + T_{ki} A_k \bar{A}_i) = \frac{1}{2} T_{ik} (A_k \bar{A}_i + \bar{A}_k A_i)$ .

Отсюда видно, что сумма  $T_{ik} A_k \bar{A}_i$  вещественна, ибо все  $T_{ik}$  вещественны и выражение в скобках вещественно. Поскольку и  $A \bar{A}_i = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2$  — тоже вещественная величина, из (\*) следует, что корень  $\lambda$  вещественен. При этом, конечно, все компоненты  $A_k$  тоже вещественны (это следует из  $\lambda A_i = T_{ik} A_k$ ).

Итак,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — вещественные числа.

Заметим, что если  $T_{ik}$  — ковариантные компоненты тензора, то на основании (3.7а), умножая его на  $A_i$ , суммируя по  $i$  и учитывая, что  $T_{ik} = T_{ki}$ , аналогично предыдущему получим вещественность характеристического уравнения (3.7в).

Рассмотрим случай различных корней  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . Тогда каждому из скаляров  $\lambda_s$  отвечает своя система чисел  $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, A_3^{(s)}$  — компонент вектора  $\mathbf{A}^{(s)}$ , которые с точностью до постоянного множителя определяются из системы уравнений ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$(T_{ik} - \lambda_s \delta_{ik}) A_k^{(s)} = 0.$$

Например, для  $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}$  имеем  $(T_{11} - \lambda_1) A_1^{(1)} + T_{12} A_2^{(1)} + T_{13} A_3^{(1)} = 0$ ;  $T_{21} A_1^{(1)} + (T_{22} - \lambda_1) A_2^{(1)} + T_{23} A_3^{(1)} = 0$ ;  $T_{31} A_1^{(1)} + T_{32} A_2^{(1)} + (T_{33} - \lambda_1) A_3^{(1)} = 0$ .

Отсюда получим

$$\frac{A_1^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{22} - \lambda_1 & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} - \lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{A_2^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{23} & T_{21} \\ T_{33} - \lambda_1 & T_{31} \end{vmatrix}} = \frac{A_3^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{21} & T_{22} - \lambda_1 \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix}}. \quad (3.8)$$

Эти равенства однозначно определяют лишь направление вектора  $\mathbf{A}^{(1)}$ , т. е. направление первой главной оси тензора. Остальные два главных направления тензора  $T_{ik}$  определяются векторами  $\mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(3)}$ .

Важное значение имеет тот факт, что *все три главных оси тензора взаимно-перпендикулярны*.

Для случая различных корней  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  это доказывается просто.

Действительно, если корню  $\lambda_1$  отвечает вектор  $\mathbf{A}^{(1)}$ , а корню  $\lambda_2$  — вектор  $\mathbf{A}^{(2)}$ , то  $T_{ik} A_k^{(1)} = \lambda_1 A_i^{(1)}$ ;  $T_{ik} A_k^{(2)} = \lambda_2 A_i^{(2)}$ .

Умножим первую группу этих равенств на  $A_i^{(2)}$ , вторую — на  $A_i^{(1)}$ , просуммируем по  $i$  и вычтем одну сумму из другой:

$$T_{ik} A_k^{(1)} A_i^{(2)} - T_{ik} A_k^{(2)} A_i^{(1)} = (\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)}.$$

Так как  $T_{ik} = T_{ki}$ , то отсюда  $0 = (\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)}$ .

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $A_i^{(1)} A_i^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(2)} = 0$ , т. е.  $\mathbf{A}^{(1)} \perp \mathbf{A}^{(2)}$ .

Если среди корней характеристического уравнения (3.7) имеются кратные, то существование трех взаимно-перпендикулярных главных направлений доказывается следующим путем.

Пусть  $\lambda_1$  — какой-либо корень уравнения (3.7) и  $\mathbf{A}^{(1)}$  — вектор, определяющий главное направление, соответствующее этому главному значению тензора, т. е.  $\lambda_1 A_i^{(1)} = T_{ik} A_k^{(1)}$ .

Рассмотрим плоскость  $M$  (рис. 3.3), перпендикулярную к вектору  $\mathbf{A}^{(1)}$ . Если брать векторы из плоскости  $M$ , то тензор  $T_{ik}$  переводит эти векторы

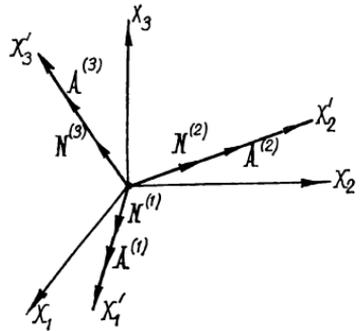
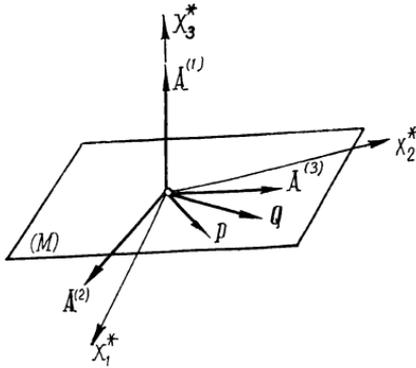


Рис. 3.3. Три взаимно-перпендикулярных главных оси симметричного тензора. Их существование устанавливается независимо от кратности корней характеристического уравнения.

Рис. 3.4. Главные оси симметричного тензора.

в другие, которые лежат в той же плоскости  $M$ . Действительно, пусть  $\mathbf{P}$  — вектор в плоскости  $M$ , так что  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^{(1)} = P_i A_i^{(1)} = 0$ . Тогда  $T_{ik} A_k^{(1)} P_i = \lambda_1 A_i^{(1)} P_i = 0$ .

Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{Q}$  с компонентами  $Q_k = T_{ik} P_i$  ортогонален к  $\mathbf{A}^{(1)}$  (ибо  $Q_k A_k^{(1)} = 0$ ) и, значит, лежит в той же плоскости  $M$ .

Введем декартову систему координат  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , так что ось  $(x_3^*)$  направлена по  $\mathbf{A}^{(1)}$ , а две другие оси лежат в плоскости  $M$ .

В этой системе координат векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  имеют только по две компоненты:  $P_1^*, P_2^*$  и  $Q_1^*, Q_2^*$ , а тензор  $T_{ik}$  имеет компоненты, определяемые матрицей:

$$\|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{vmatrix}; \quad T_{12}^* = T_{21}^*,$$

так как  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  лежат в плоскости  $M$ , а вместо девяти компонент симметричного тензора  $T_{ik}$  мы вправе рассматривать только четыре его компоненты (тензор на плоскости  $M$ ), которые и осуществляют перевод векторов из плоскости  $M$  в векторы, лежащие в той же плоскости (плоскость  $M$  — координатная плоскость  $(x_1^*, x_2^*)$ ).

Теперь будем искать в плоскости  $M$  такие векторы  $\mathbf{P}$ , которые бы не поворачивались тензором  $T_{ik}^*$ , а лишь изменяли свою длину. Тогда получим

систему двух уравнений  $\lambda A_i^* = T_{ik}^* A_k^*$  и характеристическое уравнение второго порядка

$$\left\| \begin{array}{cc} T_{11}^* - \lambda & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* - \lambda \end{array} \right\| = 0.$$

Пусть  $\lambda_2$  — корень этого уравнения, а вектор  $A^{(2)}$  соответствует  $\lambda_2$ , т. е.

$$\lambda_2 A_i^{(2)*} \equiv T_{ik}^* A_k^{(2)*}.$$

Тогда вектор  $A^{(2)}$  определяет второе главное направление тензора, и поскольку он лежит в плоскости  $M$ , то  $A^{(2)} \perp A^{(1)}$ .

Построим вектор  $A^{(3)}$ , перпендикулярный к  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$ . Покажем, что  $A^{(3)}$  определит третье главное направление тензора  $T_{ik}$ .

Действительно, вектор  $T_{ik}^* A_i^{(3)*}$  перпендикулярен к  $A^{(1)}$ , ибо он лежит в плоскости  $M$ , и перпендикулярен к  $A^{(2)}$ , ибо  $T_{ik}^* A_i^{(3)*} A_k^{(2)*} = \lambda_2 A_i^{(2)*} A_i^{(3)*} = 0$  (векторы  $A^{(2)}$  и  $A^{(3)}$  взаимно-перпендикулярны). Следовательно, вектор с компонентами  $T_{ik}^* A_i^{(3)*}$  коллинеарен вектору  $A^{(3)}$ , и тогда, учитывая  $T_{ik}^* = T_{ki}^*$ , имеем  $\lambda_3 A_i^{(3)*} = T_{ik}^* A_k^{(3)*}$ .

Это и означает, что  $A^{(3)}$  определяет третье главное направление тензора  $T_{ik}$ .

При таком построении главных направлений  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ ,  $A^{(3)}$  тензора  $T_{ik}$  нигде не требовалось, чтобы  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  были различными. Таким образом, существование трех взаимно-перпендикулярных главных осей у симметричного тензора  $T_{ik}$  показано независимо от кратности корней характеристического уравнения (3.7).

Выясним связь между корнями характеристического уравнения (3.7)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и компонентами тензора. Для этого приведем тензор к главным осям, т. е. найдем выражение компонент тензора в системе координат, оси которой являются главными осями тензора.

Пусть  $N^{(1)}$ ,  $N^{(2)}$ ,  $N^{(3)}$  — орты главных осей тензора:  $(N^{(i)} = \frac{A(i)}{[A(i)]})$ . Если  $(X'_1)$ ,  $(X'_2)$ ,  $(X'_3)$  — главные оси (рис. 3.4), то  $T_{ik} N_k^{(1)} = \lambda_1 N_i^{(1)}$ ;  $T_{ik} N_k^{(2)} = \lambda_2 N_i^{(2)}$ ;  $T_{ik} N_k^{(3)} = \lambda_3 N_i^{(3)}$ .

Запишем эти равенства в системе координат  $(X'_1, X'_2, X'_3)$ , т. е. в системе главных осей тензоров:  $T'_{ik} N_k^{(1)'} = \lambda_1 N_i^{(1)'}$ ;  $T'_{ik} N_k^{(2)'} = \lambda_2 N_i^{(2)'}$ ;  $T'_{ik} N_k^{(3)'} = \lambda_3 N_i^{(3)'}$ .

Отсюда, полагая  $i = 1, 2, 3$ , получим девять равенств (учитывая, что  $N_1^{(1)'} = N_2^{(2)'} = N_3^{(3)'} = 1$  и  $N_m^{(n)} = 0$  при  $m \neq n$ ):

$$T'_{11} = \lambda_1; T'_{12} = T'_{21} = T'_{13} = T'_{31} = T'_{23} = T'_{32} = 0; T'_{22} = \lambda_2; T'_{33} = \lambda_3.$$

Следовательно, тензор в системе своих главных осей имеет матрицу

$$\|T'_{ik}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, корни  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  характеристического уравнения представляют диагональные компоненты (единственные

отличные от нуля) тензора в системе главных осей; они и дают главные (собственные) значения тензора.

Для тензора напряжений его главные значения носят название *главных напряжений*.

Пусть вектор  $\mathbf{P}$  переводится с помощью тензора  $T_{ik}$  в вектор  $\mathbf{Q}$ , так что  $Q_i = T_{ik}P_k$ .

В системе главных осей ( $X'_1, X'_2, X'_3$ ) тензора  $T_{ik}$  это уравнение имеет вид  $Q'_i = T'_{ik}P'_k$ , или  $Q'_1 = T'_{11}P'_1 = \lambda_1 P'_1$ ;  $Q'_2 = T'_{22}P'_2 = \lambda_2 P'_2$ ;  $Q'_3 = T'_{33}P'_3 = \lambda_3 P'_3$ . (3.9)

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ , то у тензора  $T_{ik}$  не существует других главных направлений, кроме тех, которые определяются корнями  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . При этом из (3.9) следует, что если  $\mathbf{P}$  не совпадает ни с одним из главных направлений, то тензор  $T_{ik}$  не только изменяет длину этого вектора, но и поворачивает его. Если же, например,  $\mathbf{P} \parallel \mathbf{A}^{(1)}$ , т. е.  $P'_2 = P'_3 = 0$ , то  $\mathbf{Q} = \lambda_1 \mathbf{P}$  — вектор  $\mathbf{P}$  не поворачивается, а только изменяет свою длину.

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  (один корень характеристического уравнения кратный), то из (3.9) следует ( $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ ):

$$Q'_1 = \lambda P'_1; Q'_2 = \lambda P'_2; Q'_3 = \lambda_3 P'_3.$$

Отсюда видно, что любой вектор  $\mathbf{P}'^0$  из плоскости ( $X'_1, X'_2$ ) (т. е. когда  $P'_3 = 0$ ) только изменяет длину при умножении на тензор  $T_{ik}$ , но не поворачивается, ибо при этом  $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{P}^0$ . Значит, двойному корню характеристического уравнения отвечает целая *собственная плоскость* ( $X'_1, X'_2$ ), перпендикулярная к третьему главному направлению; в этой плоскости любое направление будет главным. Таким образом, если одно главное направление определено (корнем  $\lambda_3$ ), а два других корня совпадают, то два оставшихся главных направления определяются любыми двумя направлениями, перпендикулярными к первому.

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$ , все корни характеристического уравнения совпадают, то из (3.9) для любого вектора  $\mathbf{P}$  имеем:  $Q'_1 = \lambda P'_1$ ;  $Q'_2 = \lambda P'_2$ ;  $Q'_3 = \lambda P'_3$  или  $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{P}$ .

Таким образом, в этом случае *любой вектор* при умножении на тензор  $T_{ik}$  только изменяет свою длину, но не поворачивается и, следовательно, любое направление у тензора  $T_{ik}$  является главным. Такой тензор называется *шаровым* (рис. 3.5, в).

**Тензорный эллипсоид.** Любому вектору  $A_i$  можно однозначно сопоставить плоскость вида  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = A_i x^i = 1$  в том смысле, что три компоненты вектора  $A_i$  полностью определяют положение этой плоскости в любой системе координат.

Любому *симметричному\** тензору  $T_{ik} = T_{ki}$  можно однозначно сопоставить поверхность второго порядка вида  $T_{ik} x^i x^k = 1$ .

\* Если  $T_{ik}$  — не симметричный тензор, то однозначного соответствия между тензором и поверхностью не будет. Действительно, согласно (3.1), всегда можно записать  $T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$ ; ( $S_{ik} = S_{ki}$ ;  $A_{ik} = -A_{ki}$ ). Но тогда  $T_{ik} x^i x^k = S_{ik} x^i x^k + A_{ik} x^i x^k = S_{ik} x^i x^k = 1$ .

Тензорная поверхность однозначно определяется только симметричной частью тензора.

Компоненты тензора  $T_{ik}$  однозначно определяют поверхность 2-го порядка в любой системе координат. Эта поверхность носит название *тензорной* (рис. 3.5).

Нетрудно видеть, что главные оси тензора являются главными осями тензорной поверхности, которая в системе главных осей имеет уравнение

$$T'_{11} (X'_1)^2 + T'_{22} (X'_2)^2 + T'_{33} (X'_3)^2 = \lambda (X'_1)^2 + \lambda_2 (X'_2)^2 + \lambda_3 (X'_3)^2 = 1,$$

или

$$\frac{(X'_1)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} + \frac{(X'_2)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)} + \frac{(X'_3)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_3}\right)} = 1.$$

Если  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  положительны (случай наиболее важный в приложениях), то тензорная поверхность — эллипсоид, а  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$  — отрезки, отсекаемые на главных осях тензорной поверхностью.

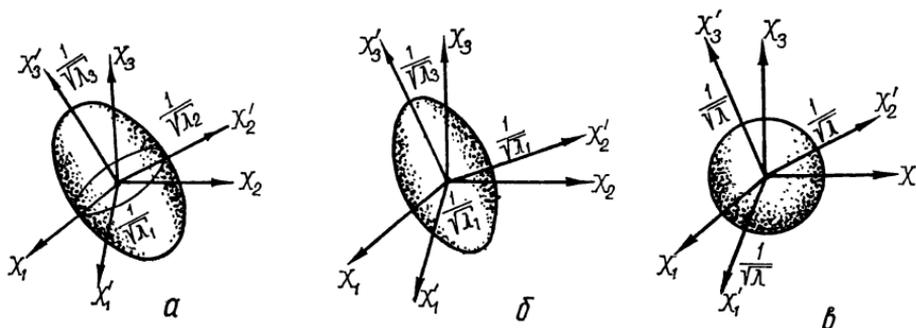


Рис. 3.5. Тензорный эллипсоид симметричного тензора:

Главные оси тензора — это главные оси тензорного эллипсоида. При различных корнях характеристического уравнения ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ ) все полуоси тензорного эллипсоида различны (а). В случае  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  тензорный эллипсоид — эллипсоид вращения (б). При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  тензорный эллипсоид вырождается в шар (в). Отсюда название «шаровой тензор», в этом случае матрица тензора в главных осях имеет вид

$$\| T'_{ik} \| = \lambda \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{vmatrix}, \text{ т. е. } T'_{ik} = \lambda \delta_{ik}$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то тензорный эллипсоид является эллипсоидом вращения.

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  (тензор  $T_{ik}$  — шаровой), то тензорный эллипсоид — шар.

### 3.7. Инварианты тензора

Компоненты вектора  $A_i$  меняются при изменении системы координат. Однако с помощью этих компонент можно составить величину, которая остается неизменной при изменении прямоугольной декартовой системы координат, а именно:

$$A_i A_i = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A'_i A'_i.$$

Эта величина носит название *инварианта вектора*, т. е.  $A_i A_i = I = \text{inv}$ .

Инварианты можно составить и из компонент тензора любого ранга.

Для получения инвариантов тензора 2-го ранга в общем виде распишем характеристическое уравнение (3.7), раскрыв определитель:

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33}) + \lambda \left( \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{22} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda^3$  являются скалярами и поэтому не зависят от выбора системы координат, коэффициенты этого уравнения также не должны меняться при изменении системы координат. Таким образом, величины\*

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \text{inv}; \\ I_2 &= \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) = \text{inv}; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \text{inv} \end{aligned}$$

являются *инвариантами* тензора 2-го ранга.

Используя эти инварианты ( $I_1$  — линейный инвариант,  $I_2$  — квадратичный,  $I_3$  — инвариант 3-го порядка), можно составить бесчисленное множество других инвариантов, представляющих всевозможные комбинации  $I_1, I_2, I_3$ .

Например,  $I_1^2 - 2I_2 = T_{ik} T_{ik}$ ;  $I_1^2 = (T_{ii})^2$  и т. д.

Исходя из характеристического уравнения (3.7в), можно получить инварианты тензора 2-го ранга через его компоненты в обобщенной системе координат. Они имеют вид:  $I_1 = T_i^{i\cdot}$ ;  $I_2 = \frac{1}{2} [(T_i^{i\cdot})^2 - T_i^{k\cdot} T_k^{\cdot l}]$ ;  $I_3 = \det \| T_i^{k\cdot} \|$ .

Те тензоры, у которых линейный инвариант  $I_1 = 0$ , называют *девиаторами*.

Любой тензор можно разложить на девиатор и шаровой тензор:  $T_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} T_{ii} \delta_{ik} + \frac{1}{3} T_{ii} \delta_{ik} = D_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} T_{ii}$ .

Тензор  $D_{ik}$  — девиатор, ибо  $D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = T_{ii} - \frac{1}{3} T_{ii} 3 = 0$ .

Тензор-девиатор в системах обобщенных координат имеет компоненты вида  $D_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik} T_i^{\cdot l}$ ,  $D^{ik} = T^{ik} - \frac{1}{3} g^{ik} T_i^{\cdot l}$ ,  $D_i^{\cdot k} = T_i^{\cdot k} - \frac{1}{3} g_i^{\cdot k} T_i^{\cdot l}$ .

При этом, как легко видеть, его свертка  $D_i^{\cdot i} = 0$ .

\* Выражения  $I_1, I_2, I_3$  через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  следует из известной теоремы алгебры — теоремы Виета.

## Общий вид зависимости между компонентами тензоров 2-го ранга. Теорема Гамильтона — Кэли

Одним из основных вопросов механики сплошных сред является выяснение зависимости между деформациями и напряжениями в деформируемом теле. Если деформации (скорости деформаций) малы, то ограничиваются наиболее общим видом линейной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций (скоростей деформаций) (см., например, задачу 4 гл. II).

Однако при изучении конечных деформаций изотропных сред, не следующих линейному закону связи между напряжениями и деформациями, приходится обращаться к более общим зависимостям между тензором напряжений и тензора деформаций или (и) тензора скоростей деформаций. Наиболее общий вид этой зависимости устанавливается на основании теоремы Гамильтона — Кэли из теории матриц.

Введем некоторые понятия, связанные с доказательством этой теоремы.

Если  $T_{ik}$  — тензор с матрицей  $T \equiv \|T_{ik}\|$ , то любому многочлену от  $\lambda$

$$\varphi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

можно поставить в соответствие матрицу

$$\varphi(T) = \|\varphi_{ik}\| = a_0T^n + a_1T^{n-1} + a_2T^{n-2} + \dots + a_{n-1}T + a_nE.$$

Здесь  $E$  — единичная матрица, так что  $E = \|\delta_{ik}\|$ , а компоненты матриц  $T^m$  вычисляются согласно правилу умножения матриц:

$$\begin{aligned} T^2 &= \|T_{il}T_{lk}\|; \\ T^3 &= \|T_{il}T_{lm}T_{mk}\|; \\ &\dots \\ T^n &= \|T_{i_1l_1}T_{l_1l_2} \dots T_{l_{n-1}k}\|. \end{aligned}$$

Если  $\varphi(T) = 0$ , то говорят, что матрица  $T$  есть корень  $\varphi(\lambda) = 0$ .

Заметим, что характеристическое уравнение тензора 2-го ранга  $T_{ik}$  (3.7), имеющего матрицу  $T = \|T_{ik}\|$  может быть записано в виде  $|T_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0$ , или  $\lambda^3 - \lambda^2/I_1 + \lambda I_2 - I_3 = 0$ , где  $I_1, I_2, I_3$  — инварианты тензора.

**Теорема Гамильтона — Кэли.** Каждая матрица является корнем своего характеристического уравнения.

Мы приведем для наглядности доказательство этой теоремы для матрицы 2-го порядка; это ограничение несущественно, и общее доказательство читатель может найти, например, в книге А. И. Мальцева «Основы линейной алгебры».

Итак, пусть  $T_{ik}$  — тензор 2-го ранга с матрицей  $T \equiv \|T_{ik}\|$  и характеристическим уравнением

$$|T_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = \lambda^3 - \lambda^2/I_1 + \lambda I_2 - I_3 = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим матрицу  $A$ , присоединенную к матрице  $\|T_{ik} - \lambda\delta_{ik}\|$ , т. е.

$$A_{il}(T_{ik} - \lambda\delta_{ik}) = \delta_{ik}(\lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3), \quad (2)$$

так что элементы матрицы  $A$  являются алгебраическими дополнениями характеристического определителя  $|T_{ik} - \lambda\delta_{ik}|$ .

Так как элементы  $A_{ik}$  — алгебраические дополнения определителя, являющегося многочленом третьей степени относительно  $\lambda$ , то они суть многочлены второй степени от  $\lambda$ , т. е.

$$A_{ik} = A_{ik}^{(0)} + \lambda A_{ik}^{(1)} + \lambda^2 A_{ik}^{(2)}. \quad (3)$$

Для определения коэффициентов  $A_{il}^{(m)}$  подставим (3) в (2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ . Получим

$$(A_{il}^{(0)} + \lambda A_{il}^{(1)} + \lambda^2 A_{il}^{(2)}) (T_{lk} - \lambda \delta_{lk}) = \delta_{lk} (\lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3),$$

откуда

$$\begin{aligned} -A_{lk}^{(2)} &= \delta_{lk}; \\ -A_{lk}^{(1)} + A_{il}^{(2)} T_{lk} &= -\delta_{lk} I_1; \\ -A_{ik}^{(0)} + A_{il}^{(1)} T_{lk} &= \delta_{ik} I_2; \\ A_{il}^{(0)} T_{lk} &= -\delta_{ik} I_3. \end{aligned}$$

Умножим эти матричные соотношения соответственно на матрицы  $T^3$ ,  $T^2$ ,  $T$  и  $E$  и сложим. Получим

$$\begin{aligned} -A_{is}^{(2)} T_{sl} T_{lm} T_{mk} - A_{is}^{(1)} T_{sm} T_{mk} + A_{il}^{(2)} T_{ls} T_{sm} T_{mk} - A_{is}^{(0)} T_{sk} + A_{il}^{(1)} T_{ls} T_{sk} + \\ + A_{il}^{(0)} T_{ls} \delta_{sk} = \delta_{is} T_{sl} T_{lm} T_{mk} - \delta_{is} T_{sm} T_{mk} I_1 + \delta_{is} T_{sk} I_2 - \delta_{is} \delta_{sk} I_3. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в левой части этого равенства все члены взаимно уничтожаются. Поэтому, производя в первой части очевидные преобразования, получаем  $T_{il} T_{lm} T_{mk} - T_{lm} T_{mk} I_1 + T_{ik} I_2 - \delta_{lk} I_3 = 0$ , или  $T^3 - T^2 I_1 + T I_2 - E I_3 = 0$ , что показывает, что матрица  $T$  есть корень характеристического уравнения (1).

Теорема доказана.

Покажем теперь, как теорема Гамильтона — Кэли применяется для отыскания наиболее общего вида зависимости между компонентами двух тензоров, например, тензора напряжений  $P_{ik}$  и тензора скоростей деформаций  $V_{lm}$  в изотропной среде.

Предполагая, что компоненты тензора  $P_{ik}$  представляют собой явную функцию от  $V_{lm}$ :  $P_{ik} = F(V_{lm})$ , запишем ее в виде разложения в ряд  $P_{ik}$  по степеням компонент симметричного тензора  $V_{lm}$ , а именно:

$$P_{ik} = a_0 \delta_{ik} + a_1 V_{ik} + a_2 V_{il} V_{lk} + a_3 V_{il} V_{lm} V_{mk} + \dots \quad (4)$$

Здесь коэффициенты  $a_n$  должны быть скалярами вследствие изотропности среды и могут зависеть от инвариантов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  тензора  $V_{ik}$ . В общем случае эти коэффициенты могут быть представлены в виде степенных рядов

$$a_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{prs}^{(n)} I_1^p I_2^r I_3^s. \quad (5)$$

Ряд (4) может быть записан в виде соотношения между матрицами  $P$  и  $V$  тензоров:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n V^n, \quad (6)$$

где  $V^0 \equiv E$ .

На основании теоремы Гамильтона — Кэли  $V^3 - V^2 I_1 + V I_2 - E I_3 = 0$ , так что степени матрицы  $V$  выше второй могут быть выражены через  $V^2$ ,  $V$  и  $E$ .

Таким образом  $V^n = A_n V^2 + B_n V + C_n E$  ( $n > 2$ ), где скаляры  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  — это степенные ряды от инвариантов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  тензора  $V_{ik}$ . Их вид приведен, например, в книге М. Рейнера «Реология» (М., 1965).

Тогда соотношение (6) может быть записано так:

$$P = a_0 E + a_1 V + a_2 V^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n (A_n V^2 + B_n V + C_n E),$$

или

$$P = \left( a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n C_n \right) E + \left( a_1 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n B_n \right) V + \left( a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n A_n \right) V^2. \quad (7)$$

Таким образом, самый общий случай зависимости между компонентами тензоров  $P_{ik}$  и  $V_{ik}$  имеет вид:  $P_{ik} = K_0 \delta_{ik} + K_1 V_{ik} + K_2 V_{il} V_{lk}$ ;

$$K_0 = a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n C_n; \quad K_1 = a_1 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n B_n; \quad K_2 = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n A_n. \quad (8)$$

Коэффициенты  $K_0, K_1, K_2$  в общем случае являются степенными функциями главных инвариантов  $I_1, I_2, I_3$  тензора  $V_{ik}$ .

Следовательно, общее изотропное уравнение, связывающее компоненты двух тензоров второго ранга, является уравнением второго порядка относительно компонент. Однако, поскольку коэффициенты этого уравнения — степенные ряды от инвариантов, которые в свою очередь есть функции компонент тензора, то уравнение (8) может быть, вообще говоря, уравнением любой степени. В выражении (8) неопределенными остаются коэффициенты  $a_{krs}^{(n)}$ , которые входят в ряды (5). Величины этих коэффициентов могут быть определены из соответствующего эксперимента.

Например, если поставить эксперимент так, что из всех компонент  $V_{ik}$  отлична от нуля только компонента  $V_{11}$  (одномерный случай), то в этом случае

$$I_1 = V_{11}; \quad I_2 = I_3 = 0,$$

а ряды  $A_n, B_n$  и  $C_n$  приобретают выражения  $A_n = I_1^{n-2}, B_n = C_n = 0$ .

$$\text{Тогда из (5) и (7) следует } P_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_1^n; \quad P_{22} = a_0; \quad P_{33} = 0; \quad a_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p00}^{(n)} I_1^p.$$

Таким образом, из эксперимента можно определить коэффициенты  $a_{000}^{(n)}$ . При этом в первом приближении можно считать  $a_n \cong a_{000}^{(n)} = \text{const}$ .

### 3.8. Признак тензорности величин

В дополнение к приведенному определению тензора как величины, преобразующейся по определенному закону, можно дать другое определение тензора. Это определение обычно рассматривается как признак тензорности величин.

Сформулируем признак тензорности для девяти величин, являющийся определением тензора 2-го ранга.

*Пусть  $A_i, B_i$  — компоненты двух произвольных векторов; если с помощью девяти величин  $T_{ik}$  можно образовать инвариант вида*

$$T_{ik} A_i B_k = \text{inv}, \quad (3.10)$$

*то девять величин  $T_{ik}$  образуют тензор 2-го ранга.*

Действительно, в силу инвариантности выражения (3.10) и закона преобразования компонент векторов  $A_i$  и  $B_i$  при переходе к другой произвольной системе декартовых координат имеем  $T'_{ik} A'_i B'_k = T_{lm} A_l B_m = T_{lm} \alpha_{l'i'} \alpha_{k'm} A'_i B'_k$  или  $(T'_{ik} - \alpha_{l'i'} \alpha_{k'm} T_{lm}) A'_i B'_k = 0$ . Отсюда в силу произвольности векторов  $A$  и  $B$   $T'_{ik} = \alpha_{l'i'} \alpha_{k'm} T_{lm}$ .

Эта формула преобразования величин  $T_{ik}$  доказывает их тензорность.

Аналогично формулируется и доказывается признак тензорности, являющийся определением тензора любого ранга.

Кроме того (в случае системы обобщенных координат), если, например,

$$T_{ik} A^i B^k = \text{inv}, \quad T^{ik} A_i B_k = \text{inv}, \quad T_i{}^k A^i B_k = \text{inv},$$

где  $A_i, B_i$  — ковариантные, а  $A^i B^i$  — контравариантные компоненты двух произвольных векторов, то величины  $T_{ik}, T^{ik}, T_i{}^k$  являются соответственно ковариантными, контравариантными и смешанными компонентами тензора 2-го ранга.

### 3.9. Псевдотензоры

При рассмотрении векторного произведения мы отмечали некоторую неопределенность в направлении вектора  $A \times B$ : направление этого вектора устанавливается условно, в зависимости от выбранной системы координат (правая или левая). Было показано (см. задачу 11, гл. 1), что бесконечно малые повороты, а следовательно, и угловая скорость твердого тела являются векторами; однако направление этих векторов выбирается условно.

В то же время направления таких векторов, как скорость, ускорение, сила, не зависят от того, определяются ли они в правой системе или в левой.

В связи с этим закон преобразования компонент первой группы векторов (векторное произведение, угловая скорость) будет отличаться от закона преобразования компонент векторов второй группы (сила, скорость) при таких преобразованиях координат, когда система правая переходит в левую, или наоборот (см. 3.4)

Все линейные ортогональные преобразования координат:

$$\begin{aligned} x'_i &= \alpha_{i'k} x_k + x_i^{0'} \quad (\text{прямое преобразование}); \\ x_i &= \alpha_{k'i} x'_k + x_i^{0i} \quad (\text{обратное преобразование}); \\ \alpha_{l'i'} \alpha_{l'k} &= \delta_{ik} \\ \alpha_{l'i'} \alpha_{k'l} &= \delta'_{ik} \quad (\text{ортогональность преобразования}) \end{aligned}$$

можно классифицировать с помощью значения определителя

$$\det \|\alpha_{i'k}\| \equiv \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Этот определитель, составленный из коэффициентов общего ортогонального преобразования координат, имеет только два значения, а именно:

$$\Delta = +1, \quad \Delta = -1.$$

Действительно, используя соотношения (2.5) между косинусами и теорему об умножении определителей\*, получим

$$\det \| \delta'_{ik} \| = \det \left\| \sum_{l=1}^3 \alpha_{i'l} \alpha_{k'l} \right\| = \det \| \alpha_{i'l} \| \cdot \det \| \alpha_{k'l} \| = \{ \det \| \alpha_{i'l} \| \}^2 = \Delta^2.$$

Поскольку

$$\det \| \delta'_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то имеем

$$\Delta^2 = 1, \quad \Delta = \pm 1.$$

В связи с этим все линейные ортогональные преобразования координат могут быть разбиты на два класса.

**1. Класс преобразования движения (непрерывные преобразования).** Непрерывное преобразование (преобразование движения) координатных систем состоит в непрерывном сдвиге и вращении системы ( $K'$ ) из совмещенного с ( $K$ ) положения в любое другое. При этом исходная система и любая преобразованная система могут быть либо обе левые, либо обе правые. Правую систему нельзя получить непрерывным преобразованием из левой, как и левую из правой. Для этого класса преобразований координат имеем  $\Delta = +1$ .

Действительно, тождественное преобразование  $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$  дает  $\Delta = +1$ . При непрерывном преобразовании системы ( $K$ ) в ( $K'$ ) вследствие того, что определитель  $\Delta \equiv \det \| \alpha_{i'l} \|$  является непрерывной функцией от косинусов  $\alpha_{i'l}$ , углов между осями, его значение не может меняться скачком от  $+1$  к  $-1$ .

Примером преобразования движения может служить такое преобразование (см. рис. 3.6):  $x'_1 = x_2, x'_2 = -x_1, x'_3 = x_3$ .

**2. Класс преобразования отражения.** Две системы ( $K$ ) и ( $K'$ ), осуществляющие преобразование отражения координат, не могут быть совмещены друг с другом непрерывным их движением; две их одноименные оси можно совместить так, что их положительные направления совпадут, а третьи при этом окажутся зеркальным отображением одна другой. При этом если система ( $K$ ) правая, то ( $K'$ ) — левая, и наоборот.

Для этого класса преобразований координат имеем  $\Delta = -1$ .

Примером преобразования отражения может служить такое преобразование (см. рис. 3.6):  $x'_1 = -x_1, x'_2 = x_3, x'_3 = x_2$ .

В зависимости от закона преобразования компонент по отношению к этим двум классам линейных ортогональных преобразований все тензорные величины можно разделить на истинные тензоры, или просто тензоры, и псевдотензоры.

**Псевдотензор** — это величина, компоненты которой преобразуются по закону

$$P'_{ikl\dots} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'r} \alpha_{l's} \dots P_{mrs\dots} \Delta, \quad (3.12)$$

где  $\Delta = \det \| \alpha_{i'l} \|$ .

---

\* Если  $a_{ik}$  — элементы одного определителя (третьего порядка) и  $b_{ik}$  — другого, то элементы  $c_{ik}$  определителя  $\Delta$ , представляющего собой произведение двух первых ( $\det \| c_{ik} \| = \det \| a_{ik} \| \cdot \det \| b_{ik} \|$ ), образуются по одному из следующих правил:

$$c_{ik} = a_{il} b_{kl}; \quad c_{ik} = a_{il} b_{lk}; \quad c_{ik} = a_{li} b_{ki}; \quad c_{ik} = a_{li} b_{lk}$$

(помнить, что  $a_{il} b_{ki} \equiv \sum_{l=1}^3 a_{il} b_{kl}$ ), см. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры, § 20, гл. II.

Закон преобразования  $3^n$  чисел, определяющих в каждой системе координат псевдотензор  $n$ -го ранга, совпадает с законом преобразования компонент истинного тензора того же ранга только при преобразовании координат, относящихся к классу преобразований движения (непрерывных преобразований). В случае преобразований, переводящих правую систему координат в левую, или наоборот, закон преобразования отличается знаком.

Для истинного тензора закон преобразования компонент сохраняется при любых линейных ортогональных преобразованиях координат и имеет вид

$$T'_{ikl} = \alpha_{i' m} \alpha_{k' r} \alpha_{l' s} \dots T_{mrs} \dots$$

Что касается алгебры псевдотензоров, то из законов преобразования для тензоров и псевдотензоров можно установить следующие положения.

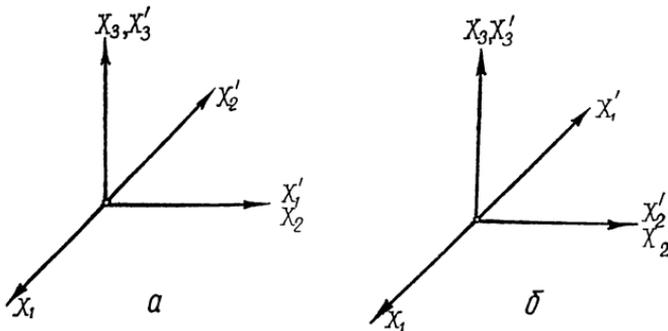


Рис. 3.6. Примеры преобразования координат. Преобразование вращения (а), когда  $\det \|\alpha_{i'k}\| = +1$ , и преобразование отражения (б), когда  $\det \|\alpha_{i'k}\| = -1$ .

- 1) сумма двух псевдотензоров одного ранга — это псевдотензор того же ранга;
  - 2) произведение двух псевдотензоров — тензор (истинный), ранг которого равен сумме рангов сомножителей;
  - 3) произведение псевдотензора на тензор — псевдотензор;
  - 4) свертывание псевдотензора дает псевдотензор низшего ранга.
- Рассмотрим несколько примеров псевдотензоров.

**Пример 1.** Если определением объема служит интеграл  $\tau = \iiint dx_1 dx_2 dx_3$ , то в другой системе координат, используя теорему о преобразовании переменных в тройном интеграле, получим

$$\tau' = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Здесь якобиан равен

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Он вычисляется на основании (2.3).

Поэтому  $\tau' = \tau \cdot \Delta$ . Таким образом, согласно определению, величина  $\tau$  является псевдотензором нулевого ранга, или псевдоскаляром. Его называют иногда относительным инвариантом.

В то же время, если за определение объема взять  $|\tau| = \left| \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 \right|$ , то объем будет скаляром, не изменяющим своего значения при любом ортогональном линейном преобразовании декартовых координат. Отрезок прямой  $ds^2 = \Delta x_i \Delta x_i$  также не меняет своего значения при любом преобразовании координат. Эти величины представляют собой скаляры; их называют иногда абсолютными скалярами, или абсолютными инвариантами.

**Пример 2.** Рассмотрим компоненты  $C_i$  векторного произведения двух векторов  $A$  и  $B$ . В некоторой системе  $(K)$  декартовых координат получим

$$C_i = A_k B_l - A_l B_k,$$

причем индексы  $(i, k, l)$  образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

В другой системе декартовых координат  $(K')$  имеем  $A'_k = \alpha_{k'm} A_m$ ,  $B'_i = \alpha_{i'n} B_n$ .

Поэтому  $C'_i = \alpha_{k'm} \alpha_{l'n} A_m B_n - \alpha_{l'm} \alpha_{k'n} A_m B_n = (\alpha_{k'm} \alpha_{l'n} - \alpha_{l'm} \alpha_{k'n}) A_m B_n$ .

Справа стоит сумма по всем значениям индексов  $m$  и  $n$ , причем при  $m = n$  слагаемые равны нулю. Запишем эту сумму в таком виде, чтобы индексы  $m$  и  $n$  первого члена в скобках, т. е.  $\alpha_{k'm} \alpha_{l'n}$ , составляли циклическую перестановку: (12), (23) и (31). Тогда

$$C'_i = (\alpha_{k'm} \alpha_{l'n} - \alpha_{l'm} \alpha_{k'n}) (A_m B_n - A_n B_m). \quad (3.13)$$

Здесь индексы  $(m, n)$ , как и индексы  $(i, k, l)$ , составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3.

Мы уже получали (см. 3.4)  $\alpha_{k'm} \alpha_{l'n} - \alpha_{l'm} \alpha_{k'n} = (\mathbf{i}'_k \times \mathbf{i}'_l) \cdot \mathbf{i}_r$ , где индексы  $(m, n, r)$  составляют циклическую перестановку. Но при этом мы можем записать

$$A_m B - A_n B_m = C_r. \quad (3.14)$$

Если новая система  $(K')$  правая, как и  $(K)$ , то  $\mathbf{i}'_k \times \mathbf{i}'_l = \mathbf{i}'_i$ , а если левая, т. е. преобразование координат является преобразованием отражения, то  $\mathbf{i}'_k \times \mathbf{i}'_l = -\mathbf{i}'_i$  при циклической перестановке индексов  $(i, k, l)$ .

Таким образом, можем записать  $\mathbf{i}'_k \times \mathbf{i}'_l = \mathbf{i}'_i \Delta$ , где  $\Delta$  — определитель (3.11). Тогда  $(\mathbf{i}'_k \times \mathbf{i}'_l) \cdot \mathbf{i}_r = (\mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_r) \Delta = \alpha_{i'r} \Delta$ .

Поэтому, учитывая (3.14), формулу (3.13) можно записать в виде  $C'_i = \alpha_{i'r} C_r \Delta$ .

Таким образом, векторное произведение двух векторов представляет собой псевдовектор.

**Единичный псевдотензор.** Единичный тензор  $\delta_{ik}$  имеет во всех декартовых системах координат одни и те же компоненты (нуль и единица).

Существует единичный псевдотензор  $\epsilon_{ikr}$ , антисимметричный по любой паре из его индексов, который не меняет своих компонент при преобразовании движения, а при преобразовании отражения те компоненты его, которые равны единице, меняют знак.

27 компонент тензора  $\epsilon_{ikl}$  определяются как всевозможные смешанные произведения ортов координатных осей.

В системе  $(K)$  с ортами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  его компоненты равны

$$\epsilon_{ikl} = (\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_k) \cdot \mathbf{i}_l. \quad (3.15)$$

Как следует из определения,

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, k, l \text{ составляют циклическую перестановку;} \\ -1, & \text{если } i, k, l \text{ составляют нециклическую перестановку;} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях, т. е. если среди } i, k, l \text{ есть одинаковые числа.} \end{cases}$$

Таким образом, отличные от нуля компоненты единичного псевдотензора

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1.$$

Покажем, что величины  $\epsilon_{ikl}$  образуют псевдотензор. В системе  $(K')$

$$\epsilon'_{ikl} = (\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k) \cdot \mathbf{i}'_l. \quad (3.16)$$

Раскладывая орты системы  $(K')$  по ортам старой системы  $(K)$  и подставляя это разложение в (3.16), получим  $\epsilon'_{ikl} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} (\mathbf{i}_m \times \mathbf{i}_n) \cdot \mathbf{i}_r$ .

Если система  $(K)$ , как и  $(K')$ , — правая (преобразование координат относится к преобразованиям движения), то  $(\mathbf{i}_m \times \mathbf{i}_n) \cdot \mathbf{i}_r = \epsilon_{mnr}$ .

Если система  $(K)$  — левая, а  $(K')$  — правая (преобразование координат относится к группе отражения), то  $(\mathbf{i}_m \times \mathbf{i}_n) \cdot \mathbf{i}_r = -\epsilon_{mnr}$  (индексы  $m, n, r$  составляют циклическую перестановку).

Таким образом, можем записать  $(\mathbf{i}_m \times \mathbf{i}_n) \cdot \mathbf{i}_r = \epsilon_{mnr} \Delta$ , где  $\Delta$  — определитель (3.11).

Следовательно,  $\epsilon'_{ikl} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} \epsilon_{mnr} \Delta$ .

Это доказывает, что 27 величин  $\epsilon_{ikl}$  образуют псевдотензор третьего ранга.

**Образование псевдотензоров различных рангов.** С помощью единичного псевдотензора можно образовать псевдотензоры различных рангов. Если  $T_{ikl}$  — истинный тензор 3-го ранга, то величина  $\Pi = \epsilon_{ikl} T_{ikl}$  является псевдоскаляром. В этом можно убедиться, рассматривая закон преобразования величины  $\Pi$ .

Если  $T_{ik}$  — истинный тензор 2-го ранга, то величины  $\Pi_i = \epsilon_{ikl} T_{kl}$  образуют псевдотензор. При этом, если  $T_{kl} = A_k B_l$ , то величины  $\Pi_i = \epsilon_{ikl} A_k B_l$  являются компонентами векторного произведения  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

Действительно,  $\Pi_1 = \epsilon_{1kl} A_k B_l = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$  и т. д.

Если  $\Phi$  — истинный скаляр, то величины  $\Pi_{ikl} = \epsilon_{ikl} \Phi$  образуют псевдотензор 3-го ранга.

Аналогично с помощью тензорного умножения  $\epsilon_{ikl}$  на истинные тензоры различных рангов можно образовать псевдотензоры всевозможных рангов.

### 3.10. Линейное $n$ -мерное пространство.

#### **Векторы и тензоры в $n$ -мерном пространстве**

В математике часто приходится иметь дело с *совокупностями* (множествами) некоторых объектов. Эти объекты могут иметь самую разнообразную природу; их называют *элементами* совокупности.

Точка является элементом привычного трехмерного пространства. Совокупность всевозможных точек образует трехмерное пространство.

Точка трехмерного пространства определяется тремя независимыми параметрами (координатами). В то же время во многих разделах математики (линейная алгебра, геометрия, теория функций) и теоретической физики (статистическая физика, теория относительности) приходится рассматривать множества таких объектов, каждый из которых определяется не тремя, а в общем случае  $n$  параметрами.

Совокупности таких объектов, оказывается, обладают теми же свойствами, что и привычное трехмерное пространство, а отличаются от него лишь тем, что их элементы имеют не три, а  $n$  координат.

Так, для элементов таких совокупностей имеются правила сложения и правило умножения на число. Эти правила удовлетворяют тем же условиям (аксиомам), что и правила сложения векторов и умножения вектора на скаляр: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и др. (см. 1.2, 1.3) В такой совокупности можно ввести понятия нулевого элемента, противоположного элемента и т. д.

Такая совокупность объектов называется *линейным* (аффинным) *пространством*.

Приведем несколько примеров линейных пространств.

1. Совокупность решений однородной системы линейных алгебраических уравнений образует линейное пространство (сумма двух произвольных решений системы есть снова решение той же системы, произведение решения на произвольное число дает снова решение).

2. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей некоторого натурального числа  $n$ , с обычными правилами сложения и умножения их на число образует линейное пространство.

3. Совокупность свободных векторов на плоскости.

4. Совокупность свободных векторов в пространстве.

5. Совокупность всех систем  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  вещественных чисел образует линейное пространство, если положить, что для таких систем имеют место аксиомы 1)  $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ , 2)  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ , где  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Элементы линейного пространства называют векторами, хотя по своей природе они могут быть совершенно непохожими на привычные нам направленные отрезки.

Геометрические представления, связанные со словом «вектор», помогают построению общей (абстрактной) теории линейных пространств. В качестве примера можно привести понятие о линейной независимости элементов пространства и о базисе пространства, которые аналогичны введенным выше для обычного трехмерного пространства (см. 1.3).

Максимальное число линейно независимых векторов в линейном пространстве определяет его *размерность*: в  $n$ -мерном линейном пространстве всегда имеется точно  $n$  линейно-независимых векторов и любые  $n + 1$  векторов связаны линейным соотношением.

В соответствии с результатами 1.3 разложения векторов в обычном трехмерном пространстве такое определение размерности пространства представляется естественным обобщением.

После этого можно говорить и о *базисе* в  $n$ -мерном линейном пространстве, как о совокупности  $n$  линейно-независимых векторов из этого пространства, и об единственности *разложения* любого вектора по векторам базиса, и о *координатах* вектора, как коэффициентах разложения этого вектора по векторам базиса. Кстати заметим, что эти числа (координаты) полностью и единственным образом определяют этот вектор в  $n$ -мерном пространстве в каждом базисе.

Если в линейном  $n$ -мерном пространстве в дополнение к правилам сложения и умножения определить скалярное произведение двух векторов, такое пространство называется  *$n$ -мерным евклидовым пространством*. В евклидовом пространстве можно рассмотреть такие понятия, как длина  $n$ -мерного вектора, угол между векторами, ортогональный базис, взаимные базисы и т. д.

Кроме  $n$ -мерных векторов, определяемых полностью  $n$  действительными числами, имеет смысл рассматривать более сложные объекты, которые в каждом базисе требуют для своего определения  $n^2$  чисел,  $n^3$  чисел,  $n^4$  чисел и т. д.

Эти понятия (тензоры 2-го ранга, 3-го ранга и т. д.) не отвлеченное теоретическое обобщение, они необходимы для описания многих реально существующих величин и явлений в физике.

Числа (компоненты), которые определяют данный объект в каждом базисе, меняются при переходе от одного базиса к другому. Однако, поскольку совокупность этих чисел каждый раз определяет один и тот же объект, закон их преобразования имеет такие же особенности, как и в случае трехмерного пространства.

Так, при изменении базиса компоненты вектора  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) переходят в  $x'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и закон преобразования имеет вид

$$x'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i'k} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\|\alpha_{i'k}\|$  — матрица, определяющая преобразование первоначального базиса.

Компоненты тензора 2-го ранга в  $n$ -мерном пространстве преобразуются при изменении базиса по закону

$$A'_{ik} = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Таких компонент тензор 2-го ранга в  $n$ -мерном пространстве имеет всего  $n^2$ ,

Наконец, вообще тензор  $m$ -го ранга в  $n$ -мерном пространстве имеет  $n^m$  компонент, которые при изменении базиса преобразуются по закону

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n \alpha_{i_1' k_1} \alpha_{i_2' k_2} \dots \alpha_{i_m' k_m} T_{k_1 k_2 \dots k_m}.$$

Таким образом, на  $n$ -мерное евклидово пространство переносится почти без изменений большая часть\* построений трехмерного пространства\*\*

## Задачи с решениями

**Задача 1.** Выразить скалярное произведение тензоров (диссипативную функцию в гидромеханике)  $D = \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_k}$ , где  $\hat{p}_{ik} = 2\mu V_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} V_{ll}$ ;  $V_{ik}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ik} V_{ll}$ ;  $V_{ll} = \frac{\partial V_l}{\partial x_l}$ , через компоненты тензора  $V_{ik}^0$  и через  $V_{ll}$ .

**Решение.** Заметим прежде всего, что тензор  $V_{ik}^0$  — девиатор, ибо  $V_{ll}^0 = 0$ .  
Имеем

$$D = \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} + \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left( \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} + \hat{p}_{ki} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \right).$$

Так как  $\hat{p}_{ik} = \check{p}_{ki}$ , то  $D = \hat{p}_{ik} V_{ik}$ , где  $V_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) = V_{ik}^0 + \frac{1}{3} \delta_{ik} V_{ll}$ .

Тогда имеем далее:

$$D = \hat{p}_{ik} V_{ik} = \hat{p}_{ik} V_{ik}^0 + \hat{p}_{ik} \frac{1}{3} \delta_{ik} V_{ll} = 2\mu V_{ik}^0 V_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} V_{ll} V_{ik}^0 + \frac{1}{3} \hat{p}_{ii} V_{ll};$$

$$\delta_{ik} V_{ik}^0 = V_{ii}^0 = 0; \hat{p}_{ii} = 2\mu V_{ii}^0 + \zeta \delta_{ii} V_{ll} = 3\zeta V_{ll}.$$

Поэтому окончательно  $D = 2\mu V_{ik}^0 V_{ik}^0 + \zeta V_{ll} V_{ll} = 2\mu (V_{ik}^0)^2 + \zeta (V_{ll})^2$ . В случае несжимаемой жидкости ( $V_{ll} = 0$ ) получим  $D = 2\mu V_{ik} V_{ik} = 2\mu (V_{ik})^2$ .

\* Такие векторы, как векторное произведение, ротор, как понятия, связанные своим определением с трехмерностью пространства, не переносятся на  $n$ -мерное пространство и заменяются тензорами (см. 3.4).

\*\* Подробнее см. Г е л ь ф а н д И. М. Лекции по линейной алгебре. М. — Л. ГИТТЛ, 1951. Ш и л о в Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. М. — Л., ГИТТЛ. 1952.

**Задача 2.** Выразить свободную энергию упругого тела  $F = \frac{1}{2} p_{ik} u_{ik}$  через компоненты тензора  $u_{ik}^0$  и через  $u_{ll} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$ , если  $p_{ik} = 2\lambda u_{ik}^0 + K u_{ll} \delta_{ik}$ , где  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ ;  $u_{ik}^0 = u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}$ .

**Ответ.**  $F = \lambda u_{ik}^0 u_{ik}^0 + \frac{K}{2} u_{ll} u_{ll}$ .

**Задача 3.** Показать, что ось симметрии системы материальных точек является главной осью тензора моментов инерции для каждой точки этой оси.

**Решение.** Пусть ось  $(x_1)$  является осью симметрии системы. Возьмем на этой оси любую точку 0 и проведем две оси  $(x_2)$  и  $(x_3)$  так, чтобы  $(x_1)$ ,  $(x_2)$ ,  $(x_3)$  составляли систему  $(K)$  прямоугольных декартовых координат. Покажем, что ось  $(x_1)$  системы  $(K)$  является главной осью для тензора  $I_{ik}$ .

Если  $(x_1)$  является осью симметрии системы, то это значит, что для каждой точки с массой  $m_i$  и координатами  $x_1^{(i)}$ ,  $x_2^{(i)}$ ,  $x_3^{(i)}$  в системе найдется точка с той же массой  $m_j = m_i$ , координаты которой  $x_1^{(j)} = x_1^{(i)}$ ;  $x_2^{(j)} = -x_2^{(i)}$ ;  $x_3^{(j)} =$

$$= -x_3^{(i)}. \text{ Тогда } I_{12} = - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = - \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N m_j x_1^{(j)} x_2^{(j)}.$$

Здесь мы всю сумму разбили на две по точкам, симметричным относительно оси  $(x_1)$ . В силу сказанного эти суммы равны по величине и обратны по знаку. Поэтому  $I_{12} = 0$ . Аналогично получим  $I_{13} = 0$ .

Таким образом, в нашей системе  $(K)$  тензор  $I_{ik}$  имеет матрицу

$$\| I_{ik} \| = \left\| \begin{array}{ccc} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{23} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{array} \right\|,$$

что указывает на то, что ось  $(x_1)$  системы  $(K)$  является главной осью тензора  $I_{ik}$ .

**Задача 4.** Показать, что любая ось, перпендикулярная к плоскости симметрии системы материальных точек, является главной осью тензора для точки пересечения этой оси с плоскостью симметрии.

**Решение.** Пусть ось  $(x_1)$  пересекает в точке 0 плоскость симметрии тела. Выберем начало системы прямоугольных декартовых координат  $(K)$  в этой точке. Поскольку плоскость  $(x_2, x_3)$  является плоскостью симметрии системы, то для каждой точки с массой  $m_i$  и координатами  $x_1^{(i)}$ ,  $x_2^{(i)}$ ,  $x_3^{(i)}$  найдется точка с массой  $m_j = m_i$  и координатами

$$x_1^{(j)} = -x_1^{(i)}, \quad x_2^{(j)} = x_2^{(i)}, \quad x_3^{(j)} = x_3^{(i)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{12} &= - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = - \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N m_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} = \\ &= - \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично покажем, что  $I_{13} = 0$ .

Таким образом, в этой системе имеем

$$\| I_{ik} \| = \left\| \begin{array}{ccc} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{array} \right\|.$$

Если теперь систему  $(K)$  повернуть вокруг оси  $(x_1)$  на угол (см. 3.6)

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2I_{23}}{I_{22} - I_{33}},$$

то в новой системе  $(K')$ , ось  $(x'_1)$  которой совпадает с  $(x_1)$ , получим

$$\| I'_{ik} \| = \left\| \begin{array}{ccc} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{array} \right\|,$$

т. е. система  $(K')$  является главной.

**Задача 5.** Пусть система  $(K)$  есть система главных осей тензора моментов инерции, причём начало этой системы совпадает с центром масс.

*Показать, что для любой точки этих осей главные оси совпадают с  $(K)$ .*

**Решение.** Так как начало системы  $(K)$  совпадает с центром масс, то

$$\sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} = \sum_{n=1}^N m_n x_2^{(n)} = \sum_{n=1}^N m_n x_3^{(n)} = 0. \quad (*)$$

Поскольку оси системы  $(K)$  главные, то  $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$ . (\*\*)

Рассмотрим систему  $(K')$  с началом в точке  $(x_1 = a, x_2 = x_3 = 0)$ , оси которой параллельны осям  $(K)$ . Тогда в системе  $(K')$   $I_{ik} = - \sum_{n=1}^N m_n x_i^{(n)'} x_k^{(n)'}$

$(i \neq k)$ . Но  $x_1^{(n)'} = x_1^{(n)} - a$ ;  $x_2^{(n)'} = x_2^{(n)}$ ;  $x_3^{(n)'} = x_3^{(n)}$ .

Подставляя эти выражения в  $I'_{ik}$  и учитывая (\*) и (\*\*), получим  $I'_{ik} = 0$   $(i \neq k)$ , т. е. оси системы  $(K')$  являются главными.

Сдвиг начала системы по направлению других осей системы  $(K)$  приводит к тому же результату.

**Задача 6.** Исходя из геометрического образа, связанного с понятием симметричного тензора 2-го ранга  $T_{ik}$  — поверхности  $T_{ik}x_i x_k = 1$ , дать геометрическое истолкование инвариантов тензора  $I_1, I_2, I_3$  (см. 3.7).

**Решение.** Пусть  $a, b, c$  — главные полуоси эллипсоида  $T_{ik}x_i x_k = 1$ , повернутого произвольным образом относительно осей системы  $(x_1, x_2, x_3)$ .

1. Находим величину полуосей эллипсоида  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  в направлении осей  $(x_1), (x_2)$  и  $(x_3)$ . При  $x_2 = x_3 = 0$  имеем  $x_1 = \bar{a}$  и  $T_{11}\bar{a}^2 = 1$ . Отсюда  $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{T_{11}}}$ .

Аналогично  $\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{T_{22}}}$ ;  $\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{T_{33}}}$ . Следовательно,  $I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \frac{1}{\bar{a}^2} + \frac{1}{\bar{b}^2} + \frac{1}{\bar{c}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \operatorname{inv}$ .

Итак, сумма обратных квадратов трех взаимно-перпендикулярных полуосей эллипсоида не зависит от положения образуемого ими триэдра и равна первому инварианту тензора, определяющего поверхность эллипсоида.

2. Уравнение эллиптического сечения  $x_3 = 0$  эллипсоида имеет вид

$$T_{11}x_1^2 + 2T_{12}x_1x_2 + T_{22}x_2^2 = 1.$$

Главные полуоси этого эллипса равны  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни уравнения  $\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ , так что  $\lambda_1 \lambda_2 = T_{11} T_{22} - T_{12}^2$ . Площадь этого сечения равна  $F_3 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$ .

Обозначим величины площадей остальных сечений ( $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ ) через  $F_1$  и  $F_2$ . Вычисляя их, получим выражение инварианта  $I_2$  через  $F_1, F_2, F_3$ :

$$I_2 = \lambda_3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = \pi^2 \left( \frac{F}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} + \frac{1}{F_3^2} \right) = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2}.$$

Итак, сумма обратных квадратов площадей эллипсов, образованных тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями, пересекающимися в центре, не зависит от их положения и определяется величиной второго инварианта тензора.

3. Объем тензорного эллипсоида равен  $V = \frac{4\pi}{3} abc$ .

Определитель  $I_3$  в главных осях имеет вид

$$I_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}.$$

Отсюда

$$I_3 = \frac{16\pi^3}{9V^2}.$$

Итак, третий инвариант тензора определяется величиной объема тензорного эллипсоида, которая одинакова в различных системах координат.

**Задача 7.** Найти разложение симметричного тензора 2-го ранга по ортам собственных (главных) его направлений.

**Решение.** Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  — орты главных направлений тензора, ковариантные компоненты которого равны  $T_{ik}$ .

Тогда по определению главных направлений из (3.7в) имеем девять тождеств ( $\alpha, i = 1, 2, 3$ ):  $(T_{ik} - \lambda_{(\alpha)} g_{ik}) a_{(\alpha)}^k = 0$ ,

где  $\lambda_{(\alpha)}$  — собственное число, соответствующее вектору  $\mathbf{a}_{(\alpha)}$ .

Умножая каждую группу уравнений на  $a_{(\alpha)l}$  и суммируя по  $\alpha$ , получим

$$T_{ik} \sum_{\alpha=1}^3 a_{(\alpha)}^k a_{(\alpha)l} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{(\alpha)} g_{ik} a_{(\alpha)}^k a_{(\alpha)l}.$$

Учитывая (2.45), получим окончательно  $T_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{(\alpha)} a_{(\alpha)k} a_{(\alpha)l}$ , что и представляет собой искомое разложение.

## Упражнения

1. Образовать скаляры путем свертывания тензоров, матрицы которых имеют вид:

$$\left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \right\|; \left\| \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \right\|; \left\| \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \right\|.$$

2. Найти вектор, образованный умножением тензора  $T_{ik}$  на вектор  $A^i$  с последующим свертыванием по индексу вектора и: 1) первому индексу тензора, 2) второму индексу тензора, если

$$\|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3.$$

3. Найти скаляр, образованный умножением тензора  $T_{ik}$  на векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  с последующим свертыванием по индексу вектора  $\mathbf{A}$  и первому индексу тензора и по индексу  $\mathbf{B}$  и второму индексу тензора, если  $T_{ik}$  и  $\mathbf{A}$  заданы условием предыдущей задачи, а  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2 + 6\mathbf{i}_3$ .

4. Дано:

$$\|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3.$$

Разложить тензор  $T_{ik}$  на симметричный  $S_{ik}$  и антисимметричный  $K_{ik} = -K_{ki}$ .  
Найти:

1)  $T_{ik}A_k$ ;  $T_{ik}A_i$ ;  $T_{ik}A_iA_k$ ;

2)  $K_{ik}T_{ik}$ ;  $K_{ik}S_{ik}$ ;  $K_{ik}A_i$ ;  $K_{ik}A_iA_k$ ;

3)  $T_{ik}\delta_{ik}$ ;  $K_{ik}\delta_{ik}$ ;  $S_{ik}\delta_{ik}$ ;

4)  $T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}$ ;  $(T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll})A_i$ ;  $(T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll})A_iA_k$ ;

5) показать, что если  $S_{ik}$  — симметричный тензор, а  $K_{ik}$  — антисимметричный, то  $S_{ik}K_{ik} = 0$ .

5. Найти инварианты тензора упражнений 1 и 4.

6. Найти главные значения и главные направления тензоров:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Показать, что если  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — главные значения симметричного тензора  $T_{ik}$ , то  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = g^{kl}T_{kl}$ ;  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = T^{kl}T_{kl}$ ;  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^3 = T^{kl}T_{lm}T^m_{.k}$ .

8. Показать, что если  $A^i_{.kl}a^kb^lc_l$  — скаляр при произвольных векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , то  $A^i_{.kl}$  являются компонентами тензора 3-го ранга.

9. Показать, что если скаляр  $A_{ikl}dx^i dx^k dx^l = 0$  при произвольных дифференциалах, то  $A_{123} + A_{231} + A_{312} + A_{132} + A_{321} + A_{213} = 0$ .

## Векторный и тензорный анализ

Физические свойства, имеющие тензорный характер, могут меняться с течением времени и от точки к точке в некоторой части пространства.

Это приводит к рассмотрению тензор-функций скалярного аргумента и радиуса-вектора точки:  $T_{ik} = T_{ik}(\mathbf{r}, t)$ .

Дифференциальные и интегральные операции над тензор-функциями составляют предмет тензорного анализа.

### 4.1. Тензорное поле. Циркуляция

**Тензор-функции скалярного аргумента.** Если каждому допустимому численному значению скалярной величины  $t$  соответствует одно вполне определенное значение тензорной величины  $T_{ik}$ , то говорят, что задана тензор-функция от скалярного аргумента  $t$ :

$$T_{ik} = T_{ik}(t).$$

Частным видом тензор-функции является вектор-функция скалярного аргумента, рассмотренная ранее.

В некоторых случаях приходится рассматривать тензоры 2-го и более высоких рангов как функции скалярного аргумента.

Если напряженное состояние среды меняется с течением времени, то в каждой точке надо рассматривать девять функций времени  $p_{ik} = p_{ik}(t)$ , которые для каждого значения  $t$  образуют тензор. По определению, производной по  $t$  от тензора с компонентами  $p_{ik}$  называется тензор, компоненты которого (в неизменяемой с течением  $t$  системе координат) вычисляются как пределы:

$$\frac{dp_{ik}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ik}(t + \Delta t) - p_{ik}(t)}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Правила дифференцирования тензоров более высокого ранга, чем векторы, по существу ничем не отличаются от правил, приведенных для векторов. Они всегда могут быть установлены из определения тензора, его алгебраических свойств и производной по скалярному аргументу.

*Дифференцирование тензора по скалярному аргументу не меняет его ранга.*

**Тензорное поле.** Если каждой точке пространства или его части (области) однозначно сопоставлен некоторый тензор, то говорят, что задано поле этого тензора (или *тензорное поле*).

Частные виды тензорных полей — скалярное или векторное, когда характеристикой поля является скалярная или соответственно векторная однозначная функция точки:  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  или  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

В атмосфере мы имеем дело со скалярными полями давления  $p = p(\mathbf{r})$ , температуры  $T = T(\mathbf{r})$ , плотности  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ .

Движение газа или жидкости приходится характеризовать векторными полями скорости  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$ , ускорения  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{r})$ . При изучении напряженного состояния среды необходимо рассматривать тензорное поле напряжений  $p_{ik} = p_{ik}(\mathbf{r})$ .

Любое тензорное поле характеризуется однозначной функцией точки, функцией радиуса-вектора точки  $\mathbf{r}$ .

Тензорные поля, которые меняются с течением времени, называются *нестационарными* (неустановившимися). Их характеристиками служат тензоры, являющиеся функциями точки и времени:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t); \quad p_{ik} = p_{ik}(\mathbf{r}, t) \text{ и т. п.}$$

Если тензор, характеризующий поле, имеет одинаковое значение для всех точек, то говорят об *однородном* поле:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(t); \quad p_{ik} = p_{ik}(t) \text{ и т. п.}$$

В дальнейшем всюду мы будем рассматривать лишь *непрерывные тензорные поля*  $T_{ikl\dots} = T_{ikl\dots}(\mathbf{r})$ . Это значит, что разности

$$T_{ikl\dots}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - T_{ikl\dots}(\mathbf{r})$$

по абсолютной величине могут быть сделаны как угодно малыми при достаточно малом  $|\Delta\mathbf{r}|$ .

Тензорный анализ является наиболее важной частью тензорного исчисления, ибо именно тензорные поля, а не отдельные тензоры важны в приложениях. Тем не менее, конечно, все операции тензорной алгебры справедливы и для тензоров, образующих поля, если считать, что алгебраические операции производятся над тензорами поля в *каждой точке пространства*.

Например, сложение тензоров двух полей одинакового ранга и размерности в каждой точке пространства приводит к построению нового тензорного поля того же ранга, являющегося суммой двух полей слагаемых тензоров. Аналогично производятся над тензорами полей в каждой точке пространства и другие алгебраические операции (например, умножение, свертывание и т. д.), которые приводят к новым полям.

**Циркуляция векторного поля.** В векторном поле  $\mathbf{A}$  возьмем некоторую кривую  $M_1M_2$  (рис. 4.1) и разобьем ее с помощью точек  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  на малые участки:  $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ .

Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i,$$

где  $\mathbf{A}_i$  — значение вектора поля в какой-то точке участка  $\Delta \mathbf{r}_i$ .

Предел этой суммы, если он существует при неограниченном возрастании числа элементов  $\Delta \mathbf{r}_i$  и убывании до нуля длины всех элементов, называется криволинейным интегралом вдоль  $M_1M_2$  и обозначается

$$\lim_{\substack{|\Delta \mathbf{r}_i| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \int_{M_1M_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1M_2} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3.$$

Здесь вектор  $d\mathbf{r}$  направлен в каждой точке кривой  $M_1M_2$  по касательной, а его модуль равен дифференциалу дуги кривой:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = dL.$$

Особый интерес представляют криволинейные интегралы, которые берутся по замкнутому контуру (например,  $L$  на рис. 4.1):

$$\Gamma = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (4.2)$$

Здесь  $d\mathbf{L}$  — направленный элемент контура, т. е.  $d\mathbf{L} = \mathbf{t} dL$  ( $\mathbf{t}$  — орт касательной,  $dL$  — дифференциал дуги контура).

Интеграл (4.2) называется *циркуляцией* вектора  $\mathbf{A}$  по контуру ( $L$ ).

Если вектор  $\mathbf{A}$  представляет силу, то циркуляция этого вектора по любому замкнутому

Рис. 4.1. Криволинейный интеграл и циркуляция векторного поля.

пути дает работу силы при перемещении материальной частицы по этому замкнутому пути.

Понятие циркуляции вектора тесно связано с понятием так называемого вихря вектора (или ротора вектора) — это будет показано ниже.

## 4.2. Теорема Остроградского и теорема Стокса

Рассмотрим две основные теоремы математического анализа, устанавливающие связь между интегралом по некоторой области и интегралом по границе этой области.

Теорема Остроградского дает выражение интеграла по объему через интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем.

Теорема Стокса связывает интеграл по поверхности с криволинейным интегралом по контуру, который служит границей этой поверхности.

Векторная формулировка этих теорем, на которой мы остановимся позже (см. 4.4), делает их особенно наглядными, и в таком виде они широко используются при изучении скалярных и векторных полей.

Мы рассмотрим также ряд формул (см. 4.9), примыкающих к теоремам Остроградского и Стокса и представляющих интерес при изучении полей скаляров, векторов и тензоров 2-го ранга.

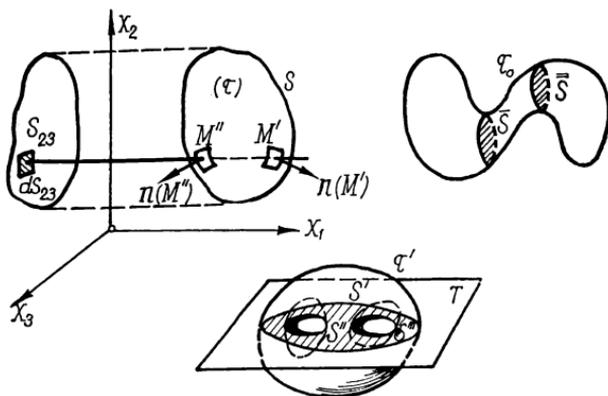


Рис. 4.2. К теореме Остроградского. Теорема Остроградского справедлива для областей, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями любой формы. Область может содержать «поры» (см.  $\tau'$ ).

**Теорема Остроградского.** Если функции  $P(x_1, x_2, x_3)$ ,  $Q(x_1, x_2, x_3)$ ,  $R(x_1, x_2, x_3)$  и  $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x_3}$  непрерывны внутри объема  $\tau$  и на замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей  $\tau$ , то

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) d\tau = \\ & = \iint_S [P \cos(\mathbf{n}, x_1) + Q \cos(\mathbf{n}, x_2) + R \cos(\mathbf{n}, x_3)] dS, \quad (4.3) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}$  — орт нормали, внешней к  $\tau$  (рис. 4.2).

Для установления справедливости формулы (4.3) достаточно доказать, например, что  $\iiint_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint_S P \cos(\mathbf{n}, x_1) dS$ .

**Доказательство.** Пусть любая прямая, параллельная оси  $x_1$ , встречает поверхность  $S$  не более, чем в двух точках\*  $M'$  и  $M''$  (рис. 4.2), в которых определены орты внешней нор-

\* Это ограничение несущественно, и от него легко можно освободиться (см. замечание 3).

мали  $\mathbf{n}(M')$  и  $\mathbf{n}(M'')$ . Тогда, если  $S_{23}$  — проекция поверхности  $S$  на плоскость  $(x_2x_3)$ , для точек  $M'$  и  $M''$ , лежащих на такой прямой, получим

$$\iint_{\tau} \int \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint_{S_{23}} \left( \int \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 \right) dS_{23} = \iint_{S_{23}} [P(M') - P(M'')] dS_{23}.$$

Но элемент  $dS_{23}$  проекции можно выразить через элементы поверхности  $S$  у точек  $M'$  и  $M''$ :

$$dS_{23} = dS(M') \cdot \cos[\mathbf{n}(M'), x_1] = -dS(M'') \cdot \cos[\mathbf{n}(M''), x_1].$$

$$\text{Поэтому } \iint_{\tau} \int \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint_S P(M) dS(M) \cdot \cos[\mathbf{n}(M), x_1],$$

где  $M$  — текущая точка на поверхности  $S$ .

Аналогично устанавливаются формулы:

$$\iint_{\tau} \int \frac{\partial Q}{\partial x_2} d\tau = \iint_S Q dS \cdot \cos(\mathbf{n}, x_2); \quad \iint_{\tau} \int \frac{\partial R}{\partial x_3} d\tau = \iint_S R dS \cdot \cos(\mathbf{n}, x_3).$$

Теорема Остроградского доказана.

#### Замечания к теореме Остроградского.

1. Поверхность  $S$ , ограничивающая объем  $\tau$ , предполагается гладкой, т. е. обладающей нормалью, которая непрерывно меняет свое направление от точки к точке.

Теорема применима и в случае, если  $S$  — кусочно-гладкая, т. е. склеена из конечного числа гладких кусков (например, поверхность призмы, пирамиды, цилиндра с донышками и т. п.). В этом случае теорему можно применить к каждой части объема  $\tau$ , ограниченной гладкой поверхностью, и полученные результаты сложить\*. Аналитически каждый гладкий кусок кусочно-непрерывной поверхности при подходящем выборе системы координат можно задать уравнением  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , где  $f$  — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка.

2. Поверхность  $S$  предполагается двусторонней, т. е. можно определить положительное направление ее нормали так, что орт  $\mathbf{n}$ , идущий в этом направлении, указывает все время одну и ту же сторону поверхности.

3. Ограничение, состоящее в том, что прямые, параллельные координатным осям, пересекают  $S$  не более чем в двух точках, несущественно.

Действительно, если весь объем  $\tau$  не удовлетворяет этому условию (например,  $\tau_0$  на рис. 4.2), то его всегда можно разбить на конечное число объемов, удовлетворяющих ему. Тогда, применяя формулу Остроградского к каждому из таких объемов и складывая результаты, получим слева интеграл по всему объему  $\tau_0$ , а справа — интеграл только по поверхности  $S_0$ , ограничивающей этот объем, ибо интегралы по смежным для составляющих объемов поверхностям ( $\bar{S}$ ,  $\bar{S}$  на рис. 4.2) взаимно уничтожаются, так как они вычисляются дважды, но с прямо противоположным направлением нормали.

4. Теорема справедлива также и для объемов с «порами», т. е. в случае объема (например,  $\tau'$  на рис. 4.2), ограниченного несколькими замкнутыми поверхностями ( $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$ ). Справедливость теоремы нетрудно установить, проведя внутри  $\tau'$  поверхность, рассекающую объем  $\tau'$  по «порам» (например, плоскость на рис. 4.2), и применяя формулу Остроградского к соседним объемам, которые уже не содержат «пор».

\* См. замечание 3.

Пусть векторное поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  в системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  имеет компоненты:

$$A_1 = P(x_1, x_2, x_3); \quad A_2 = Q(x_1, x_2, x_3); \quad A_3 = R(x_1, x_2, x_3).$$

Тогда формула Остроградского примет вид

$$\iiint_{\tau} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) d\tau = \int_S \{ A_1 \cos(\mathbf{n}, x_1) + A_2 \cos(\mathbf{n}, x_2) + A_3 \cos(\mathbf{n}, x_3) \} dS.$$

Если учесть, что компоненты орта внешней нормали  $\mathbf{n}$  суть  $n_1 = \cos(\mathbf{n}, x_1)$ ;  $n_2 = \cos(\mathbf{n}, x_2)$ ;  $n_3 = \cos(\mathbf{n}, x_3)$ , то формулу можно записать в виде

$$\iiint \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) d\tau = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.3a)$$

Выражение, стоящее в объемном интеграле, также имеет векторную интерпретацию, на которой мы остановимся ниже (см. § 4.4).

**Теорема Стокса.** Если функции  $P(x_1, x_2, x_3)$ ,  $Q(x_1, x_2, x_3)$ ,  $R(x_1, x_2, x_3)$  и  $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x_3}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x_3}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x_2}$  непрерывны на поверх-

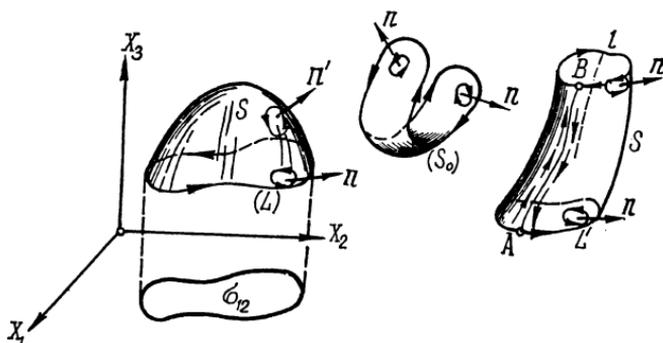


Рис. 4.3. К теореме Стокса. Теорема Стокса справедлива для кусочно-гладких поверхностей, ограниченных одним контуром (поверхность  $S$ ) либо несколькими контурами (поверхность  $S'$ ). Положительное направление нормали выбирается в любой точке поверхности так, чтобы с направлением положительного обхода элементарного контура у этой точки составлять правый винт.

ности  $S$  и на замкнутом контуре  $L$ , который является границей  $S$ , то

$$\int_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) \cos(\mathbf{n}, x_1) + \left( \frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) \cos(\mathbf{n}, x_2) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \cos(\mathbf{n}, x_3) \right\} dS = \oint_L P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности  $S$  (рис. 4.3).

При этом важно условиться относительно направления обхода контура  $L$  и положительного направления нормали  $\mathbf{n}$ .

Поверхность  $S$  предполагается двусторонней, а положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  на ней связано с положительным направлением обхода ее границы — контура  $L$ . Положительный обход контура  $L$  выбирается таким образом, чтобы поверхность оставалась всегда *слева* для наблюдателя, обходящего контур так, что положительный орт  $\mathbf{n}$  в точках у контура  $L$  направлен от ног к голове наблюдателя. В любой точке поверхности, таким образом, положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  с положительным обходом элементарного контура у этой точки составляет правый винт (рис. 4.3).

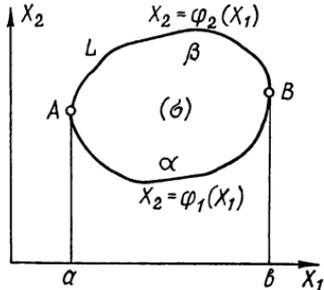


Рис. 4.4. К теореме Грина.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы Стокса, рассмотрим случай, когда поверхностью  $S$  является плоская область  $(\sigma)$ . Покажем, что в этом случае имеет место формула

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) d\sigma = \oint_l P dx_1 + Q dx_2. \quad (4.4a)$$

Эта формула имеет самостоятельное значение и выражает *теорему Грина*.

Здесь  $P(x_1, x_2)$ ,  $Q(x_1, x_2)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x_2}$  — непрерывные функции, а  $l$  — замкнутый контур, являющийся границей плоской области  $\sigma$  (рис. 4.4).

Предположим сначала, что контур  $l$  пересекается прямыми, параллельными  $(x_2)$  только в двух точках. Тогда в предположениях теоремы, как известно из анализа, двойной интеграл может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma &= \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{x_2=\varphi_1(x_1)}^{x_2=\varphi_2(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 = \\ &= \int_a^b [P(x_1, \varphi_2(x_1)) - P(x_1, \varphi_1(x_1))] dx_1. \end{aligned}$$

Но каждый интеграл в правой части — это криволинейный интеграл функции  $P(x_1, x_2)$  по кривым  $A\alpha B$  и  $A\beta B$ . Поэтому можно записать

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma = \int_{A\beta B} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2) dx_1.$$

Меняя в первом интеграле направление интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma &= - \int_{B\beta A} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2) dx_1 = \\ &= - \oint_l P(x_1, x_2) dx_1, \end{aligned} \quad (*)$$

где справа стоит криволинейный интеграл по замкнутому контуру  $l$ , который обходится против часовой стрелки.

Аналогично предполагая, что прямые, параллельные оси  $(x_1)$ , пересекают контур  $l$  только в двух точках, установим формулу

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x_1} d\sigma = \oint_l Q dx_2. \quad (**)$$

Вычитая из (\*\*\*) уравнение (\*), получим формулу Грина (4.4а). Переходим к доказательству теоремы Стокса.

Предположим, что прямые, параллельные оси  $x_3$ , пересекают поверхность  $S$  только в одной точке (рис. 4.3). Проекция поверхности  $S$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  даст плоскую область  $\sigma_{12}$ , а проекция контура  $L$  даст границу области  $\sigma_{12}$  — замкнутый контур  $l$ . За положительный обход контура  $l$  принимают направление обхода против часовой стрелки, так что с положительным направлением оси  $x_3$  этот обход составляет систему правого винта. Соответственно устанавливается обход контура  $L$ , а положительное направление внешней нормали на поверхности  $S$  таково, что ее орт  $\mathbf{n}$  составляет с осью  $(x_3)$  острый угол. Тогда  $d\sigma_{12} = dS \times \cos(\mathbf{n}, x_3)$ ;  $\cos(\mathbf{n}, x_3) > 0$ . Преобразуем интеграл  $\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1$ ,

учитывая, что контур  $L$  принадлежит поверхности  $S$ , уравнение которой может быть записано в виде  $x_3 = f(x_1, x_2)$ . Поэтому, если заменить под знаком интеграла  $x_3$  на  $f(x_1, x_2)$  то подынтегральная функция  $P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]$  будет содержать только переменные  $x_1$  и  $x_2$ , которые для переменной точки на контуре  $L$  имеют то же значение, что и в соответствующей точке на контуре  $l$ . Поэтому интегрирование по  $L$  можно заменить на интегрирование по  $l$ , т. е.  $\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1 \equiv \oint_l P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dx_1$ .

Применяя к этому интегралу формулу Грина (4.4а) и учитывая, что  $x_3$  входит в выражение для  $P$  как непосредственно, так и через посредство  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , найдем  $\oint_l P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dx_1 =$

$$= - \iint_{\sigma_{12}} \left[ \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] d\sigma_{12}.$$

Выражая элемент  $d\sigma_{12}$  через  $dS$  и переходя к интегралам по контуру  $L$  и поверхности  $S$ , получим  $\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1 =$

$$= - \iint_S \left[ \frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right] \cos(\mathbf{n}, x_3) dS. \quad (***)$$

Как известно\*, косинусы углов, которые составляет внешняя нормаль к поверхности  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , с координатными осями, имеют выражения:  $\cos(\mathbf{n}, x_1) = \frac{p}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}$ ;  $\cos(\mathbf{n}, x_2) = \frac{q}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}$ ;  $\cos(\mathbf{n}, x_3) = \frac{1}{\mp \sqrt{1+p^2+q^2}}$ , где  $p = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ ;  $q = \frac{\partial f}{\partial x_2}$ . Отсюда, выбирая в формулах нижний знак (ибо  $\cos(\mathbf{n}, x_3) > 0$ ), имеем  $\frac{df}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, x_3) = -\cos(\mathbf{n}, x_2)$ .

Тогда формула (\*\*\*) примет вид

$$\oint_L P dx_1 = \iint_S \left[ \frac{\partial P}{\partial x_3} \cos(\mathbf{n}, x_2) - \frac{\partial P}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, x_3) \right] dS.$$

Рассматривая другие функции —  $Q(x_1, x_2, x_3)$  и  $R(x_1, x_2, x_3)$  — и совершая циклическую перестановку координат  $x_1, x_2, x_3$ , получим две аналогичные формулы:

$$\oint_L Q dx_2 = \iint_S \left[ \frac{\partial Q}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, x_3) - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \cos(\mathbf{n}, x_1) \right] dS;$$

$$\oint_L R dx_3 = \iint_S \left[ \frac{\partial R}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, x_1) - \frac{\partial R}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, x_2) \right] dS.$$

Складывая найденные формулы, получим (4.4).

Теорема Стокса доказана.

В 4.9 мы дадим более наглядное, хотя и не такое строгое доказательство теоремы Стокса, исходя из ее векторной формулировки. Здесь же мы приведем еще несколько замечаний, относящихся в равной степени и к формуле Грина, и к формуле Стокса. Эти замечания, в частности, снимают ограничения относительно условий пересечения поверхности  $S$  и области  $\sigma$  прямыми, параллельными координатным осям.

#### Замечания к теореме Стокса.

1. Поверхность  $S$  предполагается гладкой или кусочно-гладкой.

2. Поверхность  $S$  может быть как угодно расположена относительно осей системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  (см.  $S_0$  на рис. 4.3), а также может иметь границу в виде нескольких замкнутых контуров (например, поверхность  $S'$  на рис. 4.3).

Поверхность  $S_0$  всегда может быть разрезана на конечное число подходящих кусков, к которым применяется теорема Стокса, затем результаты складываются (ср. замечание 3 к теореме Остроградского). Поверхность  $S'$  можно разрезать, например, по  $AB$  и считать за ее границы контуры  $L, L'$  и два берега  $AB$ . Тогда к такой поверхности можно применить формулу Стокса. При «склеивании» по  $AB$  криволинейные интегралы по двум берегам  $AB$  взаимно уничтожаются, ибо они вычисляются в противоположных направлениях, и остаются только интегралы по  $L$  и  $L'$ .

Пусть векторное поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  имеет в системе  $(x_1, x_2, x_3)$  компоненты:  $A_1 = P(x_1, x_2, x_3)$ ;  $A_2 = Q(x_1, x_2, x_3)$ ;  $A_3 = R(x_1, x_2, x_3)$ .

\* См., например, Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 1, § 155.

Тогда формула (4.4) примет вид 
$$\iint_S \left\{ \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \cos(\mathbf{n}, x_1) + \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \cos(\mathbf{n}, x_2) + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \cos(\mathbf{n}, x_3) \right\} dS = \oint_L A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3. \quad (4.5)$$

Если обозначить дифференциал радиуса-вектора вдоль контура  $L$  через  $d\mathbf{L} = \mathbf{i}_1 dx_1 + \mathbf{i}_2 dx_2 + \mathbf{i}_3 dx_3$ , то правая часть этой формулы может быть записана в виде  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ .

Векторную интерпретацию левой части формулы мы приведем позже (с. 140).

**Связность области.** Преобразуя интеграл по контуру в интеграл по поверхности по формуле Стокса, надо не забывать, что и контур  $L$ , и поверхность  $S$ , для которой контур  $L$  служит границей, должны целиком лежать в рассматриваемой области, где выполнены условия теоремы Стокса. Однако могут быть такие области, где не для каждого контура  $L$ , хотя и расположенного полностью в области, можно выбрать соответствующую поверхность  $S$ .

Например, если область представляет собой внутренность тора, то для контура  $L_1$  (рис. 4.5) нельзя подобрать такую поверхность, которая была бы ограничена этим контуром и лежала целиком внутри тора. Если рассматривается область вне тора, то для контура  $L_2$  нельзя выбрать поверхность, для которой границей служил бы только этот контур и которая не пересекала бы тора, т. е. находилась целиком в области вне тора.

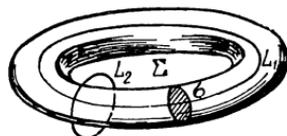


Рис. 4.5. Преобразование двухсвязных областей в односвязные. Двухсвязная область вне тора может быть сделана односвязной, если к ее границам добавить перепонку ( $\Sigma$ ), закрывающую отверстие кольца. Двухсвязная область внутри тора станет односвязной, если к ее границам присоединить перегородку ( $\sigma$ ).

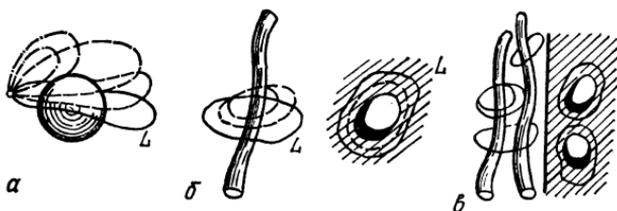


Рис. 4.6. Одно- и многосвязные области:

- а) область вне шара является односвязной; любой контур  $L$  можно стянуть в точку, не выходя за пределы области; б) двухсвязные области; область вне трубки, плоскость вне выреза — контур  $L$  невозможно стянуть в точку, не пересекая трубки (выреза); в) трехсвязные области: область вне двух трубок, плоскость вне двух вырезов.

*Односвязной* называется область, в которой любой замкнутый контур может быть стянут в точку непрерывным образом, не пересекая границ этой области. Односвязными являются все простран-

ство, вся плоскость, часть плоскости, ограниченная одной замкнутой кривой, область внутри (или вне) шара, куба и т. п.

Если вырезать из всего пространства некоторую кривую, замкнутую или простирающуюся на бесконечность, то в таком пространстве можно найти контур, который нельзя стянуть в точку, оставляя его все время в рассматриваемой области. Такое пространство дает пример *двухсвязной области* (рис. 4.6). Пространство внутри (или вне) тора — двухсвязное (рис. 4.5).

Могут быть трехсвязные области (рис. 4.6) и вообще области  $n$ -й связности. Область  $n$ -й связности может быть превращена в односвязную присоединением дополнительных границ, «запрещающих» те контуры, которые не могут быть стянуты в точку. Например, область внутри тора может быть сделана односвязной, если присоединить к ней границу в виде перегородки  $\sigma$  (рис. 4.5); область вне тора будет односвязной, если к ее границам добавить поверхность  $\Sigma$ , закрывающую отверстие кольца.

### 4.3. Скалярное поле.

#### *Производная по направлению. Оператор $\nabla$*

**Поверхности уровня.** Геометрической характеристикой скалярного поля являются поверхности уровня.

Рассмотрим скалярное поле величины  $\varphi$  в системе декартовых координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , так что  $\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ .

Те точки, для которых скаляр  $\varphi$  принимает некоторое одинаковое значение  $C$ , образуют поверхность  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = C$ .

Такая поверхность носит название *поверхности уровня*, или *изоповерхности*.

Придавая различные значения  $C$ , мы получим набор, семейство поверхностей уровня, на каждой из которых скаляр принимает постоянное значение (рис. 4.7).

Семейство поверхностей уровня в некоторой степени наглядно характеризует скалярное поле. Места сближения изоповерхностей указывают на быстрое изменение здесь функции  $\varphi$  в поперечном направлении.

Изоповерхности для однозначного поля  $\varphi$  не пересекаются, ибо в этом случае в точках пересечения функция  $\varphi$  имела бы несколько значений, что невозможно.

Наиболее существенной характеристикой скалярного поля является дифференциальная его характеристика — *градиент скалярного поля*.

**Градиент скалярного поля и производная по направлению.** Дифференциальная характеристика скалярного поля является обобщением производной по скалярному аргументу.

При анализе поведения функции  $f(t)$  скалярного аргумента в некоторой точке  $M(t = t_0)$  главную роль играют значения производных  $\frac{df}{dt}$ ,  $\frac{d^2f}{dt^2}$  и т. д. в этой точке. При этом производная

$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}$ , если она существует, позволяет судить о том, как быстро изменяется функция  $f(t)$  при смещении из точки  $M$  по оси аргумента  $t$  в положительном направлении этой оси. Как известно, эта производная является числовой характеристикой быстроты изменения функции в точке  $M$  вдоль положительного направления оси аргумента  $t$ .

В случае скалярного поля, определяемого функцией  $\varphi$  трех переменных  $x_1, x_2, x_3$ , составляющих вектор  $\mathbf{r} = i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3$ , можно ожидать, что совокупность значений трех производных в некоторой точке поля  $M$ :  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_M, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)_M, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)_M$  — позволит определить, как быстро ме-

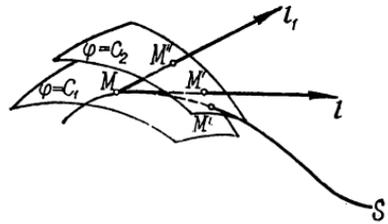
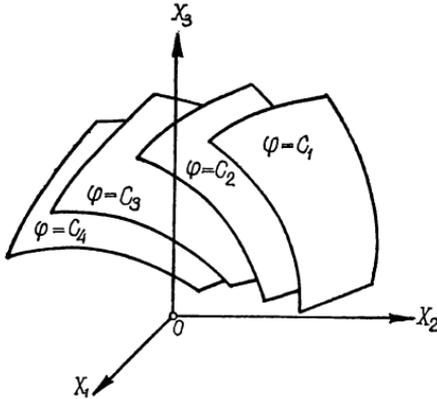


Рис. 4.7. Поверхности уровня скалярного поля.

Рис. 4.8. Производная скалярного поля  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  по направлению и по кривой. В направлении  $l_1$  поле меняется быстрее, чем в направлении  $l$ . Производная по кривой  $(S)$  в точке  $M$  численно совпадает с производной по направлению  $l$ , если  $l$  — орт касательной к этой кривой в точке  $M$ .

няется поле  $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(\mathbf{r})$  при смещении из точки  $M$  в любом направлении поля.

Если в каждой точке поля  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  существуют производные  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ , то их совокупность составляет вектор и позволяет найти быстроту изменения поля в любом направлении.

Ранее (стр. 95) было показано, что три величины  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$  образуют вектор.

Этот вектор называется *градиентом* поля  $\varphi$  и обозначается  $\text{grad } \varphi$ . Если  $i_1, i_2, i_3$  — орты декартовой системы  $(K)$ , то

$$\text{grad } \varphi = i_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = i_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим теперь, как с помощью  $\text{grad } \varphi$  можно определить быстроту изменения поля в любом направлении. Средняя быстрота

изменения поля  $\varphi$  при смещении из точки  $M$  в  $M'$  в некотором направлении, определяемом ортом  $\mathbf{l}$ , характеризуется отношением

$$\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M},$$

где  $M'M$  — величина смещения по направлению  $\mathbf{l}$  (рис. 4.8).

Ясно, что это отношение будет другим для направления  $\mathbf{l}_1$  (см. рис. 4.8), ибо хотя  $\varphi(M') = \varphi(M'')$  (точки  $M'$  и  $M''$  находятся на одной поверхности уровня), но  $M'M \neq M''M$ .

Таким образом, в одних направлениях поле меняется быстрее, в других — медленнее.

Предел этого отношения, если он существует, когда точка  $M'$  приближается по прямой  $\mathbf{l}$  к  $M$ , называется *производной от  $\varphi$  в точке  $M$  по направлению  $\mathbf{l}$*  и обозначается  $\frac{d\varphi}{dl}$ :  $\frac{d\varphi}{dl} =$

$$= \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M}.$$

Эта производная и есть численное значение быстроты изменения поля  $\varphi$  в точке  $M$  по направлению  $\mathbf{l}$ .

Если  $\varphi(M) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ , то  $\varphi(M') = \varphi[x_1 + M'M \cdot \cos(\mathbf{l}, x_1), x_2 + M'M \cdot \cos(\mathbf{l}, x_2), x_3 + M'M \cdot \cos(\mathbf{l}, x_3)]$ .

Разлагая  $\varphi(M')$  в ряд Тейлора, получим  $\varphi(M') = \varphi(M) + \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cos(\mathbf{l}, x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \cos(\mathbf{l}, x_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \cos(\mathbf{l}, x_3) \right] M'M + O(M'M^2)$ , где  $O(M'M^2)$  — величина второго порядка малости относительно смещения  $M'M$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда, вычисляя } \frac{d\varphi}{dl}, \text{ получим } \frac{d\varphi}{dl} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cos(\mathbf{l}, x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \cos(\mathbf{l}, x_2) + \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \cos(\mathbf{l}, x_3) = l_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Это выражение может быть записано в виде  $\frac{d\varphi}{dl} = \mathbf{l} \cdot \text{grad } \varphi$ . (4.8)

Следовательно, *производная от  $\varphi$  по направлению  $\mathbf{l}$  равна проекции градиента  $\varphi$  на это направление.*

Таким образом, если в точке поля определен  $\text{grad } \varphi$ , то всегда можно найти быстроту изменения поля вдоль любого заданного направления. Поэтому говорят, что  $\text{grad } \varphi$  является мерой неоднородности скалярного поля  $\varphi$ .

Как видно, вектор  $\text{grad } \varphi$  в любой точке поля определяет бесконечную совокупность производных по направлению функции  $\varphi$ . В выражении для  $\frac{d\varphi}{dl}$  характеристика поля (однозначная вектор-функция точки  $\text{grad } \varphi$ ) и характеристика направления (орт  $\mathbf{l}$ , не зависящий от поля  $\varphi$ ) разделены.

**Производная по кривой.** Понятие производной по направлению тесно связано с понятием производной по линии или производной по кривой.

Рассмотрим кривую  $s$ , проходящую через точку  $M$ , в которой направление к этой кривой совпадает с направлением  $\mathbf{l}$  (рис. 4.8).

Если вычислить предел  $\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\overline{\varphi(M')} - \varphi(M)}{\Delta s}$ , где  $\overline{M'}$  — точка на кривой (s), а  $\Delta s$  — длина дуги  $\overline{M'M}$  по кривой (s), то получим  $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dl}$ . (4.9)

Действительно, если уравнение кривой (s) записать в виде (s — параметр, представляющий длину дуги кривой)  $x_1 = x_1(s)$ ;  $x_2 = x_2(s)$ ;  $x_3 = x_3(s)$ , то  $\varphi = \varphi[x_1(s), x_2(s), x_3(s)]$ . Поэтому, используя правило дифференцирования сложных функций, получим\*

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cos(l, x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \cos(l, x_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \cos(l, x_3) = \frac{d\varphi}{dl}. \end{aligned}$$

Производная  $\frac{d\varphi}{ds}$  называется производной поля  $\varphi$  по линии s. Она, следовательно, численно равна производной по направлению, касательному в рассматриваемой точке к данной кривой.

**Свойства градиента скалярного поля.** Для выяснения свойств градиента поля запишем (4.8) в виде  $\frac{d\varphi}{dl} = |\text{grad } \varphi| \cos(l, \text{grad } \varphi)$ .

Отсюда следует:

1. *Быстрота изменения поля имеет наибольшее значение в направлении  $\text{grad } \varphi$  [когда  $\cos(l, \text{grad } \varphi) = 1$ ] и равна*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{\max} &= |\text{grad } \varphi| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2}. \end{aligned}$$

2. *Вектор  $\text{grad } \varphi$  направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции  $\varphi$ .*

Действительно, если орт  $l$  лежит в плоскости, касательной к поверхности уровня, то по определению этой поверхности [ $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ ], для любой кривой, лежащей на поверхности уровня и касающейся  $l$ , имеем  $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ , а вследствие (4.9)  $\frac{d\varphi}{dl} = 0$ . Значит, вектор  $\text{grad } \varphi$  ( $|\text{grad } \varphi| \neq 0$ ) направлен по нормали к поверхности уровня, а так как  $\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{\max} = |\text{grad } \varphi| > 0$  — в сторону возрастания значений  $\varphi$  (рис. 4.9).

Отсюда следует, что если  $n$  — орт нормали к поверхности уровня, направленный в сторону роста  $\varphi$ , то

$$\frac{d\varphi}{dn} = |\text{grad } \varphi| \text{ и } \text{grad } \varphi = n \frac{d\varphi}{dn}. \quad (4.10)$$

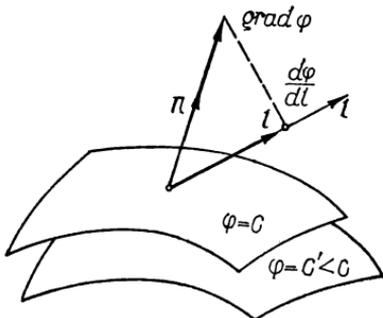


Рис. 4.9. Градиент скалярного поля. Вектор  $\text{grad } \varphi$  направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания  $\varphi$ .

\* Относительно равенства  $\frac{dx_l}{ds} = \cos(l, x_l)$  см. задачу 1, гл. 4.

**Оператор  $\nabla$  и другое определение  $\text{grad } \varphi$ .** Векторное поле градиента скаляра  $\varphi$  имеет ряд особенностей, на которых мы специально остановимся в 4.10. Сейчас нам важно отметить, что для его построения надо проделать над функцией  $\varphi$  ряд операций: взять частные производные от  $\varphi$ , умножить на соответствующие орты и сложить — тогда получим вектор  $\text{grad } \varphi$ . Обычно совокупность этих операций обозначают одним символом — *оператором  $\nabla$  (набла)*, который, таким образом, в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$\nabla \equiv i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (4.11)$$

Будучи применен к скаляру  $\varphi$ , этот оператор дает векторное поле градиента  $\varphi$ , так что в прямоугольных декартовых координатах

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi = i_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (4.12)$$

Вектор  $\text{grad } \varphi$  может быть определен независимо от системы координат. Применим формулу Остроградского (4.3а) для специального вида векторного поля  $\mathbf{A} = c\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , где  $c$  — вектор произвольный, но постоянный.

Подставляя это выражение для  $\mathbf{A}$  в (4.3а), вследствие постоянства  $c$  получим  $c \cdot \left( \iiint_{\tau} \text{grad } \varphi \, d\tau - \iint_S \varphi \mathbf{n} \, dS \right) = 0$ .

Поскольку вектор  $c$  произволен, то равенство нулю скалярного произведения на другой вектор означает равенство нулю этого вектора, т. е.

$$\iiint_{\tau} \text{grad } \varphi \, d\tau = \iint_S \varphi \mathbf{n} \, dS. \quad (4.13)$$

Пусть теперь  $\tau$  малый объем, окружающий некоторую точку  $M$  скалярного поля  $\varphi$ . Возьмем какую-либо из компонент  $\text{grad } \varphi$ , например  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ . Тогда по теореме о среднем имеем  $\iiint_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, d\tau =$

$= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{M'} \tau$ , где точка  $M'$  — какая-то средняя точка объема  $\tau$ .

Следовательно,  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{M'} = \frac{1}{\tau} \iint_S \varphi \cos(n, x_1) \, dS$ .

Будем теперь стягивать объем  $\tau$  к точке  $M$  так, чтобы его поверхность  $S$  также стремилась к нулю. Тогда средняя точка  $M'$  сольется с  $M$  в силу непрерывности  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  и

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_M \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{1}{\tau} \iint_S \varphi \cos(n, x_1) \, dS.$$

Так как аналогичные соотношения справедливы для других компонент, то

$$(\nabla\varphi)_M = (\text{grad } \varphi)_M = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \iint_S \varphi \mathbf{n} \, dS. \quad (4.14)$$

Если предел справа существует, это равенство может служить определением градиента скалярного поля. Преимущество этого определения состоит в том, что оно не содержит никакого указания на координатную систему и потому может быть использовано для определения проекции градиента на оси любой системы координат (косоугольной декартовой, криволинейной и т. п.).

#### 4.4. Векторное поле. Дивергенция и вихрь векторного поля. Дифференцирование вектора по направлению

**Векторные линии.** Геометрической характеристикой векторного поля могут служить *векторные линии*.

*Векторными линиями поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  называются кривые, в каждой точке которых касательная имеет направление вектора в этой точке* (рис. 4.10).

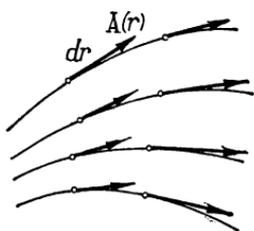


Рис. 4.10. Векторные линии поля.

Рис. 4.11. Поток векторного поля через поверхность.

Векторные линии поля  $\text{grad } \varphi$  представляют собой кривые, ортогональные в каждой точке к поверхностям уровня  $\varphi = \text{const}$ ; это линии быстрейшего изменения функции  $\varphi(\mathbf{r})$ .

Векторные линии поля скоростей вращающегося твердого тела представляют концентрические окружности с центрами на оси вращения, а векторные линии поля скоростей твердого тела, движущегося прямолинейно, — прямые линии.

Векторные линии поля скоростей движущейся жидкости — *линии тока* — в общем случае имеют различный вид в разные моменты времени [ $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ ]; в случае стационарного поля скоростей [ $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$ ], т. е. когда движение жидкости установившееся, векторные линии имеют неизменный вид и представляют траектории частиц жидкости. В тех местах, где линии тока сгущаются,

движение жидкости более интенсивно, скорость движения здесь возрастает\*.

Если задано векторное поле  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , то, по определению векторной линии, ее элемент  $d\mathbf{r}$ , направленный по касательной, коллинеарен с вектором  $\mathbf{A}$  в данной точке, т. е.  $d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = 0$ .

Это векторная форма дифференциального уравнения векторных линий. Отсюда, учитывая пропорциональность компонент коллинеарных векторов, в декартовой системе координат получим

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{A_3(x_1, x_2, x_3)}. \quad (4.15)$$

Проинтегрировав эту систему двух дифференциальных уравнений, найдем семейство векторных линий поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

В случае нестационарного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  дифференциальные уравнения векторных линий имеют аналогичный вид: при этом время  $t$  надо рассматривать как фиксированный параметр, определяющий в каждый момент времени вид семейства линий тока.

Если  $\mathbf{A} \neq 0^{**}$  в некоторой точке, то через нее проходит одна и только одна векторная линия, касательная к которой в данной точке имеет определенное направление, т. е. совпадает по направлению с вектором поля; уравнение какой-либо линии тока выделяется из семейства определением постоянных интегрирования из условия прохождения через данную точку.

Если в какой-то точке  $\mathbf{A} = 0$  (все знаменатели (4.15) обращаются в нуль), то направление векторной линии в этой точке становится неопределенным; через эту точку может проходить бесконечное множество линий, может и не проходить бесконечное множество линий, может и не проходить ни одной. Такие точки являются особыми точками системы уравнений (4.15).

Векторные линии могут дать некоторые сведения о структуре векторного поля. Более существенны дифференциальные характеристики векторного поля.

**Поток векторного поля.** Пусть двусторонняя и кусочно-гладкая поверхность  $S$ , замкнутая или незамкнутая, помещена в векторное поле  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Рассмотрим ее элемент  $dS$  и определим в некоторой точке этого элемента положительный орт нормали  $\mathbf{n}$  и вектор поля  $\mathbf{A}$  (рис. 4.11).

Потоком векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  через элемент  $dS$  называется величина  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS = A_n dS$ .

Потоком векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  через всю поверхность  $S$  называется поверхностный интеграл

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS = \iint_S A_n dS. \quad (4.16)$$

\* В сверхзвуковом потоке — наоборот, скорость в местах сгущения векторных линий убывает.

\*\* Теорема существования решения системы (4.15) требует, кроме  $\mathbf{A} \neq 0$ , еще и непрерывности  $A_1, A_2, A_3$  вместе с их первыми производными по координатам.

Этот интеграл определяется для замкнутой и для незамкнутой поверхности  $S$ . Поверхностный интеграл понимается как сумма соответствующих интегралов по гладким кускам, составляющим поверхность. Скалярное произведение  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  выражает проекцию вектора поля на положительное направление нормали  $\mathbf{n}$ . Понятие потока векторного поля определено независимо от системы координат; в системе декартовых координат поток может быть записан в форме

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint \{A_1 \cos(x_1, \mathbf{n}) + A_2 \cos(x_2, \mathbf{n}) + A_3 \cos(x_3, \mathbf{n})\} dS.$$

Смысл понятия потока векторного поля через поверхность поясним на характерном примере.

Пусть в пространстве задано стационарное движение несжимаемой жидкости, заполняющей неразрывно данное пространство, так что вектор скорости течения жидкости  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$  есть непрерывная функция точки.

Определим количество жидкости, протекающей в единицу времени через некоторый кусок гладкой поверхности  $S$  (рис. 4.12).

Рассмотрим на поверхности некоторый элемент  $dS$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Контур этого элемента определяет элементарную *трубку тока*  $AB$  — поверхность, образованную векторными линиями, проведенными через точки небольшого замкнутого контура. Через любое поперечное сечение трубки проходит в единицу времени одинаковое количество жидкости. Чтобы подсчитать это количество, заметим, что за единицу времени  $dt$  через  $dS$  пройдет объем жидкости, равный объему цилиндра с основанием  $dS$  и образующей  $|\mathbf{V}| dt$ , а высота  $h$  этого цилиндра, очевидно, равна проекции вектора  $\mathbf{V} dt$  на нормаль к основанию, т. е.  $h = |\mathbf{V}| dt \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}) = |\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}| dt$ .

Следовательно, в единицу времени через элемент  $dS$  пройдет в направлении  $\mathbf{n}$  объем жидкости, равный  $dQ = |\mathbf{V}| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}) dS = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ .

Полный объем  $Q$  жидкости, протекающей в единицу времени через всю поверхность  $S$ , получается интегрированием  $dQ$  по всей поверхности:  $Q = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ .

Таким образом, *поток векторного поля скорости  $\mathbf{V}$  несжимаемой жидкости через элемент поверхности  $dS$  численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через соответствующую трубку тока, а поток  $\mathbf{V}$  через поверхность  $S$  (замкнутую или незамкнутую) численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через эту поверхность.*

Если жидкость несжимаема, то для подсчета массы жидкости, протекающей через поверхность  $S$  в единицу времени, достаточно объем умножить на постоянную всюду плотность жидкости:  $m = \rho Q = \rho \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ .

В случае сжимаемой жидкости необходимо для подсчета задать скалярное поле плотности, т. е.  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ . Тогда масса жидкости, протекающей в еди-

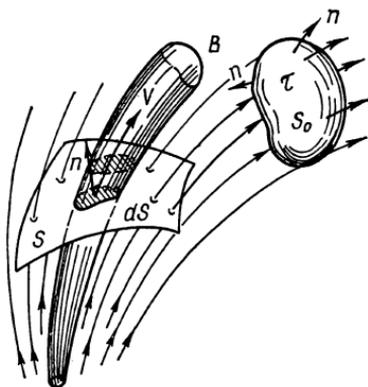


Рис. 4.12. Поток векторного поля скорости движения жидкости через поверхность. Поток скорости жидкости через поверхность численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через нее.

ницу времени через поверхность  $S$ , равна потоку вектора  $\rho(\mathbf{r}) \mathbf{S}(\mathbf{r})$  через эту поверхность:

$$m = \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.17)$$

Величина  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  положительна, если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{n}$  образуют острый угол, и отрицательна, если эти два вектора образуют тупой угол. Следовательно, в нашем примере  $Q = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$  представляет собой *избыток* жидкости, протекающей в сторону положительной нормали  $\mathbf{n}$ , а не абсолютное количество жидкости, прошедшей через  $S$  независимо от направления течения.

В связи с этим особо отметим случай замкнутой поверхности ( $S_0$  на рис. 4.12), ограничивающей некоторый объем  $\tau$ . Условимся всегда направлять  $\mathbf{n}$  во внешнюю часть пространства так, что движение жидкости в сторону положительной нормали  $\mathbf{n}$  означает «вытекание» из объема  $\tau$ , а в сторону  $(-\mathbf{n})$  — «втекание». Тогда величина потока  $Q$ , вычисленная для замкнутой поверхности, даст разность между жидкостью, вытекающей из объема, ограниченной этой поверхностью, и жидкостью, поступающей в этот объем. Равенство нулю потока скорости жидкости через замкнутую поверхность означает, следовательно, что в объем  $\tau$  жидкости втекает столько, сколько и вытекает. Если поток  $Q$  положителен, то в объеме  $\tau$  есть источники, т. е. такие места, где жидкость как-то создается (например, трубочки, из которых выбрасывается дополнительно жидкость, куски тающего льда и т. п.). Если поток  $Q$  отрицателен, то в объеме  $\tau$  есть *стоки*, где жидкость как-то «уничтожается» замерзает, испаряется и т. п.).

Если жидкость сжимаема, т. е. плотность  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ , то роль источников для потока скорости могут выполнять места разрежения, уменьшения плотности, а роль стоков — места уплотнения, увеличения плотности. Действительно, поскольку масса жидкости остается неизменной и уменьшение плотности означает увеличение объема, занимаемого жидкостью, то из мест разрежения появится дополнительный поток жидкости, увеличивающий ее скорость.

Таким образом, величина потока вектора через замкнутую поверхность позволяет некоторым образом оценить поведение поля в области, ограниченной этой поверхностью. Однако такая оценка для конечной области может оказаться весьма приближенной. Например, равенство нулю потока поля скорости жидкости через замкнутую поверхность может означать или отсутствие внутри объема, ограниченного ею, источников и стоков, или наличие источников и стоков равной мощности\*, или, по крайней мере, наличие такого распределения источников и стоков, что их общая мощность равна нулю.

\* Под мощностью источника (стока) понимается количество жидкости, которое выбрасывается (забирается) в единицу времени источником (стоком).

В связи с этим оказывается удобным ввести в рассмотрение *локальную*, точечную характеристику распределения источников и стоков в данном поле жидкости, так называемую *дивергенцию*\*\* скорости.

Рассмотрим подробнее понятие дивергенции векторного поля.

**Дивергенция векторного поля. Векторная формулировка теоремы Остроградского.** Дивергенция векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  является скалярной функцией точки и, таким образом, образует скалярное поле, построенное по данному векторному полю.

Фиксированную точку  $M$  векторного поля окружим произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , вычислим поток вектора  $\mathbf{A}$  через  $S$  и разделим на величину объема  $\tau$ , ограниченного  $S$ :

$$\frac{1}{\tau} \iiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

При гидродинамической интерпретации потока вектора эта величина может быть названа средней мощностью источников и стоков в объеме  $\tau$ , приходящейся на единицу объема.

Может оказаться, что существует предел этого отношения, когда объем  $\tau$  стягивается по произвольному закону к точке  $M$  так, что площадь поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем, и величина объема  $\tau$  стремятся к нулю. Тогда этот предел называется *дивергенцией* поля  $\mathbf{A}$  в точке  $M$  и обозначается  $(\operatorname{div} \mathbf{A})_M$ . Таким образом, по определению,

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (\tau) \rightarrow M}} \frac{1}{\tau} \iiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.18)$$

Значение этого предела не должно по определению зависеть от вида поверхности  $S$ .

Не для всякого векторного поля  $\mathbf{A}$  можно построить поле дивергенции  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ .

*Дивергенция векторного поля  $\mathbf{A}$  существует в каждой точке, если компоненты поля  $A_1, A_2, A_3$  непрерывны вместе с частными производными по координатам.*

Доказательство этого утверждения следует из теоремы Остроградского. В предположении существования и непрерывности  $A_1, A_2, A_3, \frac{\partial A_1}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_2}, \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$  из формулы (4.3 а) имеем

$$\frac{1}{\tau} \iiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\tau} \iiint_{\tau} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) d\tau.$$

Если область  $\tau$  стягивается к некоторой своей внутренней точке  $M$ , то интеграл справа имеет предел, равный

$$\left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)_M.$$

\* *divergentia* (лат.) — расходимость.

Тогда, следовательно, должен существовать и предел левой части, который по определению (4.18) равен дивергенции поля  $\mathbf{A}$  в точке  $M$ .

Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x_k}. \quad (4.19)$$

Это же выражение можно получить непосредственно, если подсчитать поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность бесконечно малого параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям. Выбор такой поверхности не ограничивает общности определения  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ , ибо предел (4.18) не зависит, по определению, от формы поверхности.

Пусть  $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$  — площади граней бесконечно малого параллелепипеда (рис. 4.13), перпендикулярных соответственно к осям  $x_1, x_2, x_3$ . На противоположных гранях орты нормалей равны  $\mathbf{i}_k$  и  $-\mathbf{i}_k$ , где  $\mathbf{i}_k$  — орт оси  $(x_k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{ [\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{A}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)] \Delta S_1 + \dots \} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{ [A_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3)] \Delta S_1 + \dots \} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta S_k. \end{aligned}$$

Поскольку  $\Delta x_1 \Delta S_1 = \Delta x_2 \Delta S_2 = \Delta x_3 \Delta S_3 = \tau$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$ .

Следует, однако, подчеркнуть, что скалярное поле  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  введено независимо от координатной системы и в выражении (4.18) правая часть, очевидно, не зависит от выбора системы координат.

Для того чтобы получить выражение  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в любой другой системе координат, можно воспользоваться определением (4.18), где в качестве бесконечно малой поверхности  $S$  следует выбирать поверхность, состоящую из кусков координатных поверхностей.

Используя, понятие дивергенции, введенное независимо от координатной системы, можно записать формулу Остроградского (4.3а) в виде

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.20)$$

В таком виде формула Остроградского имеет широкое применение во многих разделах теоретической физики.

Таким образом, теорема Остроградского может быть сформулирована так:

*Интеграл по объему от дивергенции векторного поля равен потоку поля через поверхность, ограничивающую этот объем,*

если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны в объеме и на поверхности.

Используя выражение (4.11) для оператора  $\nabla$ , можно записать  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (4.21)$$

Таким образом, в этом случае применение оператора  $\nabla$  к вектору  $\mathbf{A}$  означает скалярное умножение символического вектора  $\nabla$  на данный вектор  $\mathbf{A}$ .

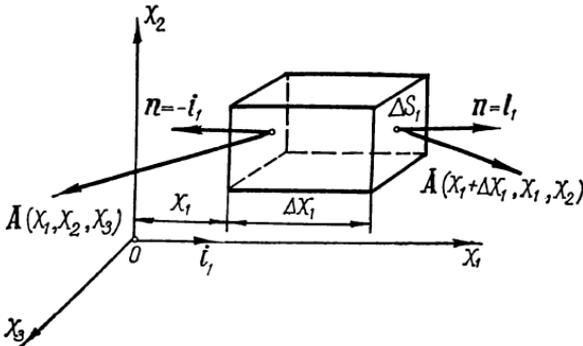


Рис. 4.13. Вычисление  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в прямоугольных декартовых координатах.

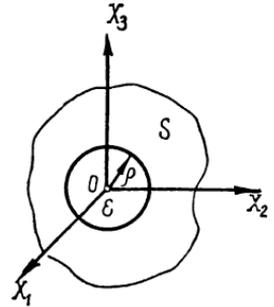


Рис. 4.14. Выделение особой точки в начале координат.

Рассматривая выражения (4.14) и (4.18), мы можем придать оператору  $\nabla$  вид, не зависящий от системы координат:

$$\nabla (\dots) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} (\dots) dS. \quad (4.22)$$

Эта символическая запись устанавливает, что применение оператора  $\nabla$  к некоторому выражению (...), скаляру  $\varphi$  или вектору  $\mathbf{A}$  означает вычисление определенного предела, стоящего справа в (4.22), а именно:

$$\nabla \varphi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} \varphi dS;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS.$$

Рассмотрим несколько примеров, разъясняющих физический смысл дивергенции векторного поля.

**Дивергенция поля скорости жидкости.** Рассмотрим стационарное поле скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  жидкости. Выберем в нем некоторую точку  $M$  и окружим ее поверхностью  $S$ , ограничивающей объем  $\tau$ . Если поток скорости через эту поверхность положителен и, следовательно,  $\frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS > 0$ , то это значит, что из области  $\tau$  через  $S$  вытекло жидкости по объему больше, чем вошло.

Если в области  $\tau$  нет ни источников, ни стоков, то тогда мы должны заключить, что в области происходит расширение жидкости, т. е. уменьшение ее плотности. Величина  $\frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$  характеризует в среднем это объемное

расширение жидкости в области  $\tau$  в единицу времени, т. е. она представляет собой среднюю скорость объемного расширения (или сжатия, если она отрицательна) жидкости в области  $\tau$ . Следовательно, предел

$$(\operatorname{div} \mathbf{V})_M = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (\tau) \rightarrow M}} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS,$$

если он существует, характеризует скорость изменения объема жидкости в точке ( $M$ ). Это означает, что если частица жидкости в точке  $M$  имела объем  $\Delta\tau$ , то через единицу времени ее объем будет  $\Delta\tau'$ , причем  $\Delta\tau' = \Delta\tau (1 + \operatorname{div} \mathbf{V})$ .

Естественно, что в поле течения несжимаемой жидкости, лишенной источников и стоков, в каждой точке  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ .

**Уравнение неразрывности.** В случае стационарного движения жидкости в любую замкнутую область в единицу времени войдет по массе столько жидкости, сколько и выйдет, если внутри этой области нет источников и стоков. Таким образом, учитывая (4.17), для любой замкнутой поверхности получаем

$$\iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Если плотность и скорость жидкости в каждой точке может меняться с течением времени, т. е.  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , то в области  $\tau$ , ограниченной поверхностью  $S$ , в единицу времени происходит изменение массы жидкости, равное

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho d\tau.$$

Поскольку область  $\tau$  занимает некоторый фиксированный объем, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Это изменение массы жидкости внутри неподвижной поверхности должно быть равно той массе, которая прошла в область  $\tau$  через поверхность  $S$ , т. е.

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

(Знак  $(-)$  здесь поставлен в связи с тем, что  $\iint_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{V} dS$  определяет массу, вытекающую из  $\tau$ , так как  $\mathbf{n}$  — орт внешней к  $\tau$  нормали).

Воспользовавшись формулой Остроградского для преобразования правой части этого выражения, получим

$$\iiint_{\tau} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} \right) d\tau = 0.$$

Так как это уравнение имеет место для любого объема  $\tau$ , то при непрерывности подынтегрального выражения имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0. \quad (4.23)$$

Это известное уравнение неразрывности аэромеханики.

**Поле источников и стоков.** Рассмотрим векторное поле вида  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ,

где  $q = \text{const}$ ,  $\mathbf{r} = i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$  — радиус-вектор. Вычислим дивергенцию этого поля. Получим

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \frac{q(r^2 - 3x_1^2)}{r^5}; \quad \frac{\partial A_2}{\partial x_2} = \frac{q(r^2 - 3x_2^2)}{r^5}; \quad \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{q(r^2 - 3x_3^2)}{r^5}.$$

Отсюда во всех точках, кроме начала координат ( $r = 0$ ), имеем

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 3 \frac{q}{r^3} - \frac{3qr^2}{r^5} = 0.$$

В начале координат  $\text{div } \mathbf{A}$  (впрочем, как и сам вектор  $\mathbf{A}$ ) не определена; эта точка не принадлежит полю.

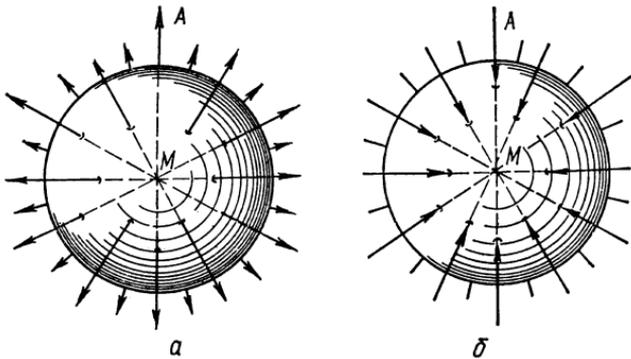


Рис. 4.15. Источник (а) и сток (б).

Нетрудно видеть, что для любой области, не включающей начала координат, поток через ее поверхность  $S$  равен нулю, ибо во всех точках области  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , и, следовательно, по теореме Остроградского (4.3а) и поток через  $S$  равен нулю.

Вычислим поток вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность, окружающую начало координат.

Если поверхность  $S$  окружает начало координат, т. е. область  $\tau$  включает точку, где ни  $\mathbf{A}$ , ни  $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$  не определены, то непосредственное применение теоремы Остроградского невозможно.

Для вычисления потока вектора  $\mathbf{A}$  через  $S$  опишем из начала координат сферу радиуса  $\rho$  с поверхностью  $\epsilon$  (рис. 4.14), применим теорему Остроградского к области  $\tau$ , заключенной между  $S$  и  $\epsilon$ .

В этой области всюду  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , поэтому  $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_\epsilon \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\epsilon = 0$ . Но

на сфере ( $\epsilon$ ) имеем  $\mathbf{A}|_\epsilon = \mathbf{A}|_{r=\rho} = q\rho/\rho^3$ ;  $\mathbf{n}|_\epsilon = -\rho/\rho$ . Следовательно,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_\epsilon \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\epsilon = \int_\epsilon q\rho/\rho^3 \cdot \rho/\rho d\epsilon = \frac{q}{\rho^2} \int_\epsilon d\epsilon = 4\pi q.$$

Таким образом, поток векторного поля  $\mathbf{A}$  через поверхность, охватывающую начало координат, отличен от нуля и равен  $4\pi q$ .

Это векторное поле называется полем точечного источника ( $q > 0$ ) или стока ( $q < 0$ ) (см. задачу 24, гл. 4). Общий характер векторных линий полей

точечного источника и стока показан на рис. 4.15. Обычно поле источника записывают в виде

$$A = \frac{Q}{4\pi r^3} \mathbf{r}, \quad (4.24)$$

где  $Q$  — мощность (обильность) источника или стока, равная потоку вектора  $A$  через поверхность, охватывающую место источника. Таким образом, мощность источника (стока) определяется объемом жидкости, которая выбрасывается (забирается) в единицу времени источником (стоком).

Нетрудно показать, что поле источников, расположенных в точках, определяемых радиусами векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  с мощностями  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4\pi} \left( Q_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + Q_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \dots + Q_n \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}. \end{aligned}$$

**Вихрь (ротор) векторного поля.** Векторная формулировка теоремы Стокса. Наряду с дивергенцией вектора важное значение имеет другая дифференциальная характеристика векторного поля — ротора\* вектора  $A$ , или вихря вектора  $A$ . Этот вектор будем обозначать  $\text{rot } A$ .

Вектор  $\text{rot } A$  в точке  $M$  определяется как предел отношения интеграла по поверхности от аксиального вектора к объему

$$\frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} \times A) dS$$

при стягивании объема  $\tau$  к точке  $M$ .

Таким образом, вектор  $\text{rot } A$  является аксиальным вектором (псевдовектором), равным по определению

$$(\text{rot } A)_M = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (\tau) \rightarrow M}} \frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} \times A) dS. \quad (4.25)$$

Следовательно, формальное определение вихря поля аналогично определению градиента скалярного поля (4.14), дивергенции векторного поля (4.18) в том смысле, что отыскивается предел отношения величины векторного поверхностного интеграла (в каждом случае своего) к величине объема, ограниченного поверхностью интегрирования, при стягивании области  $\tau$  к некоторой внутренней точке. Предел этот по определению *не зависит от формы бесконечно малой поверхности*.

Мы воспользуемся этим обстоятельством для выяснения геометрического смысла  $\text{rot } A$  и возьмем в качестве поверхности  $S$  поверхность бесконечно малого прямого цилиндра (рис. 4.16). Образующая этого цилиндра имеет длину  $\Delta l$  и ориентирована по

\* rotate (лат.) — вращать.

орту  $l$  некоторого направления (рис. 4.16), боковая поверхность  $S_0$ , а доньшки  $S_1$  и  $S_2$  имеют равную площадь ( $S_1 = S_2 = \Delta\sigma$ ). Пусть, наконец, на боковой поверхности орт внешней нормали  $n_0$ , а на доньшках —  $n_1$  и  $n_2$ , причем  $l = n_1 = -n_2$ .

Рассмотрим проекцию  $\text{rot } A$  на направление образующей цилиндра  $l$ . Отбрасывая индекс  $M$  в выражении (4.25), получим

$$l \cdot \text{rot } A = \text{rot}_l A = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l \Delta \sigma} \left\{ \iint_{S_1} l \cdot (n_1 \times A) dS_1 + \right. \\ \left. + \iint_{S_2} l \cdot (n_2 \times A) dS_2 + \iint_{S_0} l \cdot (n_0 \times A) dS_0 \right\}.$$

Так как  $l = n_1 = -n_2$ , то интегралы по поверхностям  $S_1$  и  $S_2$  дают нуль.

В интеграле по боковой поверхности  $S_0$  воспользуемся свойством циклической перестановки смешанного произведения:

$$l \cdot (n_0 \times A) = A \cdot (l \times n_0) = A \cdot (n_1 \times n_0).$$

Тогда, замечая, что  $dS_0 = \Delta l dL$ ,  $(n_1 \times n_0) dL = dL$ , где  $dL$  — направленный элемент контура основания цилиндра, получим

$$\frac{1}{\Delta l \Delta \sigma} \iint_{S_0} l \cdot (n_0 \times A) dS_0 = \\ = \frac{\Delta l}{\Delta l \Delta \sigma} \oint_L A \cdot dL.$$

Отметим, что в этом выражении в качестве  $L$  можно брать контур поперечного сечения цилиндра, содержащего рассматриваемую точку  $M$ .

Следовательно,

$$l \cdot \text{rot } A = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \sigma} \oint_L A \cdot dL. \quad (4.26)$$

Это выражение может служить определением проекции вектора  $\text{rot } A$  на любое направление  $l$ . Здесь следует отметить соответствие положительного направления  $l$  направлению обхода контура  $L$  (рис. 4.19), а именно: направление обхода контура  $L$  и положительное направление  $l$  подчиняются правилу правого винта (для наблюдателя из вершины  $l$  обход контура  $L$  совершается против часовой стрелки).

Итак, проекция  $\text{rot } A$  на какое-либо направление  $l$  в каждой точке поля равна пределу отношения циркуляции по границе плоской площадки, проходящей через эту точку перпендикулярно к  $l$ , к площади этой площадки, когда граница площадки стягивается к рассматриваемой точке.

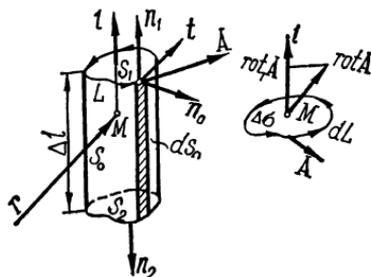


Рис. 4.16. Определение  $\text{rot } A$  в точке. Проекция  $\text{rot } A$  на любое направление  $l$  связана с циркуляцией вектора  $A$  по границе плоской площадки, находящейся в плоскости, перпендикулярной к  $l$ .

Так как проекция  $l \cdot \text{rot } \mathbf{A}$  будет наибольшей тогда, когда  $l$  совпадает по направлению с  $\text{rot } \mathbf{A}$ , то и предел отношения циркуляции по границе площадки к площади этой площадки будет наибольшим, если площадка перпендикулярна к  $\text{rot } \mathbf{A}$ . Это наибольшее значение предела равно модулю  $\text{rot } \mathbf{A}$ .

Проекции вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  на оси декартовой системы через проекции вектора  $\mathbf{A}$  можно получить двумя способами.

Первый способ состоит в выборе поверхности  $S$  в виде параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, и подсчете правой части выражения (4.25). В качестве упражнения читателю предлагается получить этим путем проекции  $\text{rot}_x \mathbf{A}$ ,  $\text{rot}_y \mathbf{A}$ ,  $\text{rot}_z \mathbf{A}$ .

Второй способ состоит в использовании выражения (4.22) для оператора  $\nabla$ . Определение (4.25) вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  показывает, что  $\text{rot } \mathbf{A}$  получается таким применением оператора  $\nabla$  к вектору  $\mathbf{A}$ , которое соответствует векторному умножению символического вектора  $\nabla = i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  на вектор  $\mathbf{A}$ , а именно:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} dS \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Отсюда

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\text{rot}_1 \mathbf{A} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \quad \text{rot}_2 \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; \quad \text{rot}_3 \mathbf{A} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \quad (4.27)$$

Сокращенно  $i$ -ю компоненту псевдовектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  можно записать в виде  $\text{rot}_i \mathbf{A} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$ , причем индексы  $(i, k, l)$  составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Те точки поля, в которых вихрь не равен нулю, называются *вихревыми*. Они могут образовывать целые области — вихревые линии, трубки и т. п.

Вихрь поля скоростей вращающегося твердого тела равен удвоенной угловой скорости вращения.

Действительно, как известно, поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, имеет вид  $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$ , где  $\omega$  — мгновенная угловая скорость.

Вычислим  $\text{rot } \mathbf{V} = \text{rot } (\omega \times \mathbf{r})$ . Для проекции на ось  $(x_1)$ , учитывая, что  $\omega$  не зависит от координат, имеем

$$\text{rot}_1 \mathbf{V} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) = 2\omega_1.$$

Аналогично получим  $\text{rot}_2 \mathbf{V} = 2\omega_2$ ;  $\text{rot}_3 \mathbf{V} = 2\omega_3$ . Следовательно,  $\text{rot } \mathbf{V} = 2\omega$ .

В связи с введением понятия вихря поля и определением его независимо от системы координат можно дать наглядное толкование векторной формулировки теоремы Стокса (4.5).

Учитывая выражения (4.27) для проекций  $\text{rot } \mathbf{A}$ , формулу (4.5) можно записать так:

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (4.28)$$

В таком виде формула, выражающая теорему Стокса, нашла широкое применение. Сама же теорема Стокса исходя из записи (4.28) может быть сформулирована так:

*Поток вихря  $\text{rot } \mathbf{A}$  векторного поля  $\mathbf{A}$  через поверхность  $S$ , ограниченную замкнутым контуром  $L$ , равен циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  по этому контуру, если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны на поверхности  $S$  и на контуре  $L$ .*

**Дифференцирование векторного поля по направлению.** Рассмотрим дифференциальную характеристику векторного поля, подобно градиенту в скалярном поле.

Вектор градиента скалярного поля, заданный в какой-либо точке, определяет бесконечную совокупность производных скаляра по всевозможным направлениям.

В векторном поле под производной вектора  $\mathbf{A}$  по направлению  $l$  (рис. 4.17) будем понимать вектор  $\frac{d\mathbf{A}}{dl}$ , определяемый пределом

$$\frac{d\mathbf{A}}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(l + \Delta l) - \mathbf{A}(l)}{\Delta l},$$

где  $l$  — координата, отсчитываемая по прямой, определяемой ортом  $l$ . Следует ожидать, что величина, позволяющая определить в точке бесконечную совокупность векторов  $\frac{d\mathbf{A}}{dl}$ , будет более высокого ранга, чем вектор (градиент), определяющий совокупность скаляров  $\frac{d\varphi}{dl}$ .

Рассмотрим в векторном поле поверхность  $S$ , окружающую некоторую точку  $M$ . В каждой точке этой поверхности отыщем орт  $\mathbf{n}$  внешней нормали и вектор поля  $\mathbf{A}$  (рис. 4.18).

Для каждой из трех компонент вектора  $\mathbf{A}$  составим вектор

$$\mathbf{R}_i^{(S)} = \frac{1}{\tau} \iint_S A_i \mathbf{n} \, dS,$$

где  $\tau$  — объем, ограниченный поверхностью  $S$ . Легко проверить, что девять величин (проекции этих трех векторов) составляют тензор 2-го ранга:  $R_{ik}^{(S)} = \frac{1}{\tau} \iint_S A_i n_k \, dS$ .

Векторы  $R_i^{(S)}$  зависят от поверхности  $S$ , но их предельные значения, если они существуют, по определению предела не зависят от вида бесконечно малой поверхности  $S$ , стягивающейся к точке  $M$ .

Имея в виду выражение (4.22) для оператора  $\nabla$ , эти предельные значения мы будем обозначать через  $\nabla A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Таким образом,  $\nabla A_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} R_i^{(S)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S A_i n dS$ .

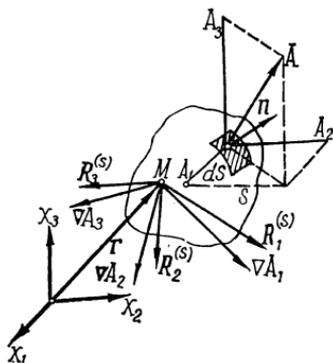
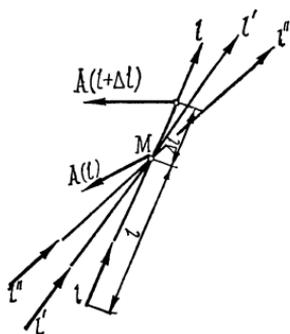


Рис. 4.17. Производная векторного поля по направлению. В каждой точке  $M$  векторного поля  $A$  можно рассматривать бесконечную совокупность производных вектора по всевозможным направлениям ( $l, l', l''$  и т. д.). Все эти производные могут быть найдены, если в точке  $M$  известен тензор второго ранга  $\nabla A$ .

Рис. 4.18. Построение тензора  $\nabla A$ . В каждой точке  $M$  векторного поля  $A$  можно определить три вектора  $R_i^{(S)}$ . Предельные значения их дают векторы  $\nabla A_i$ , проекции которых образуют тензор 2-го ранга  $\nabla A$  с компонентами  $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ .

Следует, однако, помнить, что  $\nabla A_i$  — три вектора, а не один, как это было в случае применения оператора  $\nabla$  к скалярной функции. В прямоугольных декартовых координатах применение оператора  $\nabla$  к трем компонентам  $A_i$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla A_i &= \left( i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) A_i = i_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} + \\ &+ i_3 \frac{\partial A_i}{\partial x_3} = i_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Отсюда определяются компоненты векторов  $\nabla A_i$ , например, первая компонента  $i$ -го вектора  $\nabla A_i$  равна  $\frac{\partial A_i}{\partial x_1}$  и т. п. Нетрудно показать, что девять величин  $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ , определенных в прямоугольной декартовой системе координат, — компоненты трех векторов  $\nabla A_i$  — составляют тензор 2-го ранга (см. гл. 2).

Действительно,

$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'_k} = \alpha_{i'l} \frac{\partial A_l}{\partial x'_k} = \alpha_{i'l} \frac{\partial A_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} \frac{\partial A_l}{\partial x_m}.$$

Для выяснения связи между  $\frac{\partial A_l}{\partial x_k}$  и производной вектора по направлению  $\frac{dA}{dl}$  воспользуемся тем же приемом, что и при определении проекции  $\text{rot } A$  на направление  $l$  (см. с. 139). Выбирая в качестве поверхности  $S$  бесконечно малый цилиндр с образующей по орту  $l$ , проектируя  $\nabla A_l$  на  $l$  и производя те же вычисления, что и при определении  $l \cdot \text{rot } A$ , получим  $l \cdot \nabla A_l = \frac{dA_l}{dl}$ .

Эти три величины составляют вектор — производную вектора  $A$  по направлению  $l$ . Ее можно записать в виде

$$l \cdot \nabla A = (l \cdot \nabla) A = \frac{dA}{dl}. \quad (4.29)$$

Используя определение  $\nabla A_i$ , найдем проекции  $\frac{dA}{dl}$ :

$$\frac{dA_i}{dl} = l \cdot \nabla A_i = l_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial A_i}{\partial x_3}.$$

Вспомним, что производная скаляра по направлению имеет выражение  $\frac{d\varphi}{dl} = l \cdot \text{grad } \varphi = l_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ .

В скалярном поле бесконечную совокупность производных скаляра по направлению определяет вектор  $i_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$  — градиент поля. Он, как было сказано, является мерой неоднородности скалярного поля  $\varphi$ .

В векторном поле бесконечную совокупность производных вектора по направлению определяет тензор 2-го ранга  $\nabla A$  с компонентами  $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ . Его можно рассматривать как меру неоднородности векторного поля  $A$ .

Как пример использования производной вектора по направлению рассмотрим поле ускорений движущейся жидкости. Поле скоростей  $V = V(r, t)$  в общем случае неоднородное и нестационарное.

Пусть частица жидкости за  $dt$  переместилась из  $M$  в  $M'$  (рис. 4.19), получив приращение скорости  $dV$ . Приращение скорости частицы состоит (рис. 4.20) из следующих частей:

1)  $dV_{л}$ , определяемой нестационарностью поля скоростей; скорость частицы по истечении времени  $dt$  изменится на

$$dV_{л} = \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

— локальное, местное изменение скорости (рис. 4.20);

2)  $dV_k$ , определяемой неоднородностью поля скоростей, скорость частицы при переходе из  $M$  в  $M'$  изменится на величину  $dV_k$ , которая определяется производной по направлению перемещения частицы, т. е. по направлению век-

тора  $V$  (вдоль траектории); это конвективное (переносное) изменение скорости равно

$$dV_k = \frac{dV}{dt} dt,$$

причем орт направления, по которому берется производная от  $V$ , равен  $\frac{V}{|V|}$ .

По формуле (4.29) имеем

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{V}{|V|} \cdot \nabla \right) V = \frac{1}{|V|} (V \cdot \nabla) V.$$

Так как  $dl = |V| dt$ , то  $dV_k = (V \cdot \nabla) V dt$ .

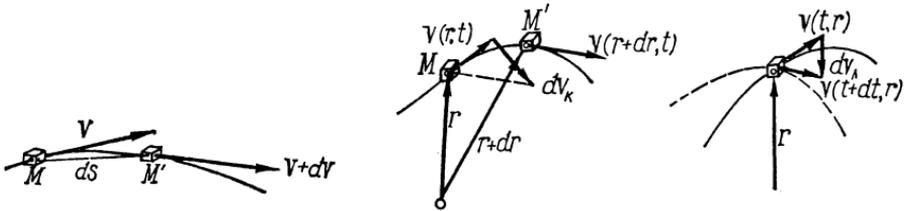


Рис. 4.19. Полное изменение скорости жидкой частицы.

Рис. 4.20. Локальное и конвективное изменение скорости жидкой частицы. Скорость частицы при перемещении ее из  $M$  в  $M'$  меняется вследствие как нестационарности поля  $V$  (локальное изменение), так и неоднородности его (конвективное изменение).

Таким образом,  $dV = dV_{л} + dV_k = \frac{\partial V}{\partial t} dt + (V \cdot \nabla) V dt$ .

Следовательно, поле ускорений в жидкости имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V,$$

или в компонентах

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}. \quad (4.30)$$

## 4.5. Поле тензора 2-го ранга. Поток, дивергенция и производная по направлению тензорного поля

Рассмотрим поле тензора 2-го ранга  $T(\mathbf{r})$ , имеющего компоненты  $T_{ik} = T_{ik}(\mathbf{r})$ . Примерами полей тензора 2-го ранга могут служить поле тензора напряжений в упругой среде и поле моментов инерций в твердом теле.

**Поток тензорного поля.** Рассмотрим двустороннюю кусочно-гладкую поверхность  $S$ , помещенную в тензорное поле  $T(\mathbf{r})$ . Для каждого элемента  $dS$  этой поверхности определим положительный орт нормали.

Потоком тензорного поля через поверхность называется поверхностный интеграл, взятый от скалярного произведения тензора на вектор нормали:  $\mathbf{W} = \iint_S T \cdot \mathbf{n} dS$ .

Поток тензорного поля является *вектором*, в отличие от потока векторного поля (4.16), являющегося скаляром. Компоненты потока тензорного поля равны

$$W_i = \iint_S T_{ik} n_k dS = \iint_S (T_{i1} n_1 + T_{i2} n_2 + T_{i3} n_3) dS. \quad (4.31)$$

Если свертывание происходит по первым индексам, то

$$W_i = \iint_S T_{ki} n_k dS.$$

Укажем несколько приложений потока поля тензора 2-го ранга.

1) Пусть  $T_{ik} \equiv p_{ik}$  — тензор напряжений в упругом теле. Выделим в этом теле некоторую поверхность и определим равнодействующую  $\mathbf{P}$  всех сил напряжения, приложенных к этой поверхности (замкнутой или незамкнутой). Если  $p_n$  — напряжение у элемента  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , то равнодействующая  $\mathbf{P} = \iint_S p_n dS$ , а ее компоненты  $P_k = \iint_S p_{nk} dS$ . Согласно (2.7) имеем  $p_{nk} = p_{ik} n_i$ . Следовательно,  $P_k = \iint_S p_{ik} n_i dS$ .

Итак, поток тензора напряжений через поверхность, взятую в упругой среде, равен равнодействующей всех сил напряжений, приложенных к этой поверхности.

2) Вычислим поток единичного тензора  $\delta_{ik}$  через замкнутую поверхность. Получим  $W_i = \iint_S \delta_{ik} n_k dS = \iint_S n_i dS$ , или  $\mathbf{W} = \iint_S \mathbf{n} dS$ .

Поскольку  $\iint_S \mathbf{n} dS = 0$  (см. 4.8), поток единичного тензора через замкнутую поверхность равен нулю.

**Дивергенция тензорного поля.** Дивергенция поля тензора 2-го ранга, как и поток этого поля, является *вектором* и определяется следующим пределом:

$$\operatorname{div} T = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S T \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.32)$$

Здесь поверхность  $S$ , ограничивающая объем  $\tau$ , стягивается к рассматриваемой точке так, что ее площадь вместе с величи-

ной объема  $\tau$  стремится к нулю. Предел не зависит от вида бесконечно малой поверхности  $S$ .

Компоненты вектора  $\text{div } T$  получаются путем дифференцирования компонент тензора  $T_{ik}$  по координатам и свертывания по тем индексам, по которым производится свертывание справа в (4.32). Таким образом,

$$(\text{div } T)_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S T_{ik} n_k dS,$$

или

$$(\text{div } T)_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S T_{ki} n_k dS. \quad (4.33)$$

Используя выражение для оператора  $\nabla$ , дивергенцию тензора второго ранга можно записать в виде  $\text{div } T = \nabla \cdot T$ .

**Дифференцирование тензорного поля по направлению.** Отыскивая производную тензора 2-го ранга по некоторому направлению, определяемому ортом  $l$ , и используя результаты предыдущего параграфа, полученные при определении производной вектора по направлению, получим (ср. 4.29)  $\frac{dT}{dl} = l \cdot \nabla T$ .

Компоненты этого тензора в прямоугольной декартовой системе координат получим, если учесть символическую запись  $\nabla T = \left( i_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) T$ , в виде  $\frac{dT_{ik}}{dl} = (l \cdot i_m) \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m} = l_m \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$ .

Бесконечная совокупность производных  $\frac{dT_{ik}}{dl}$  тензора 2-го ранга по направлению определяется компонентами тензора 3-го ранга  $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$ .

Операция, соответствующая образованию вихря векторного поля, к тензорным полям 2-го ранга не применима вообще.

## 4.6. Ковариантное дифференцирование тензоров. Ковариантная производная вектора. Символы Кристоффеля

Рассмотрим выражение дифференциала вектора через дифференциалы его компонент.

В декартовой системе координат имеем  $dA = d(A_l i_l) = i_l dA_l$ .

Как уже отмечалось в декартовых системах координат (и только в декартовых), векторный базис *одинаков* для всех точек пространства, поэтому для любого базисного вектора  $di_l = 0$ .

Однако в случае отнесения вектора к системе обобщенных координат векторный базис ( $e_1, e_2, e_3$ ) является *локальным*, так что каждый базисный вектор, вообще говоря, является вектор-функцией обобщенных координат здесь и в дальнейшем мы будем обозначать их через  $(x^1, x^2, x^3)$ , т. е.

$$e_l = e_l(x^1, x^2, x^3); \quad e^l = e^l(x^1, x^2, x^3).$$

Вследствие этого

$$dA = d(A_l e^l) = e^l dA_l + A_l de^l, \quad dA = d(A^l e_l) = e_l dA^l + A^l de_l. \quad (4.34)$$

Таким образом, абсолютный дифференциал вектора, кроме части, отражающей изменение компонент вектора при переходе от точки к точке, содержит еще часть  $A_l de^l$ ,  $A^l de_l$ , связанную с тем, что базис введенной системы координат также меняется от точки к точке.

$$\text{Так как } dA = \frac{\partial A}{\partial x^k} dx^k,$$

то на основании (4.34) частная производная вектора  $A$  по обобщенной координате  $x^k$  имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} e^l + A_l \frac{\partial e^l}{\partial x^k} = \frac{\partial A^l}{\partial x^k} e_l + A^l \frac{\partial e_l}{\partial x^k}. \quad (4.35)$$

Компоненты (ко- или контравариантные) этих векторов  $\frac{\partial A}{\partial x^k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) образуют девять величин, совокупность которых называют *ковариантной* (абсолютной) *производной вектора* (ковариантного или контравариантного).

Совокупность ковариантных компонент векторов  $\frac{\partial A}{\partial x^k}$  обозначим через

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e_i \equiv A_{i;k} \quad (4.36)$$

и будем называть ее *ковариантной производной ковариантного вектора*.

Совокупность контравариантных компонент векторов  $\frac{\partial A}{\partial x^k}$  обозначим через  $A^i_{;k}$ , т. е.

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e^i \equiv A^i_{;k}, \quad (4.37)$$

и назовем ее *ковариантной производной контравариантного вектора*.

В дальнейшем будет показано, что  $A_{i;k}$ ,  $A^i_{;k}$  являются компонентами тензора 2-го ранга.

Найдем явное выражение ковариантных производных через компоненты векторного поля.

В соответствии с определением из (4.35) получим

$$\begin{aligned} A_{i;k} &= \frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e_i = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} e^l + A_l \frac{\partial e^l}{\partial x^k} \cdot e_i, \\ A^i_{;k} &= \frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e^i = \frac{\partial A^l}{\partial x^k} e_l + A^l \frac{\partial e_l}{\partial x^k} \cdot e^i. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Учитывая, что компоненты  $g^j_i = e_i \cdot e^j$  равны либо нулю, либо единице, получим  $\frac{\partial}{\partial x^k} (e_i \cdot e^j) = 0$ .

Отсюда, дифференцируя, имеем

$$e_i \cdot \frac{\partial e^j}{\partial x^k} = -e^j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k}. \quad (4.39)$$

Введем обозначение:

$$\Gamma^j_{ik} \equiv e^j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k}. \quad (4.40)$$

Эти величины (их всего 27 в трехмерном пространстве) носят название *символов Кристоффеля второго рода*. Тогда в силу (4.39) и (4.40) формулы (4.38) примут вид

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_j \Gamma_{ik}^j; \quad A_{,k}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^j \Gamma_{jk}^i. \quad (4.41)$$

Из этих формул следует, что абсолютная (ковариантная) производная векторного поля учитывает не только быстроту изменения самого поля как такового при перемещении вдоль координатных линий (члены  $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ ), но также и быстроту изменения локального базиса (вторые члены в (4.41)). Если координатный базис не меняется от точки к точке (декартовы системы координат), то из (4.40) следует, что все символы Кристоффеля второго рода равны нулю. В этом случае ковариантные производные обращаются в наборы частных производных компонент по координатам.

Таким образом, слагаемые  $-A_j \Gamma_{ik}^j$  и  $A^j \Gamma_{jk}^i$  обязаны своим происхождением исключительно введению местного, подвижного координатного базиса. Поэтому символы Кристоффеля должны выражаться через производные от компонент метрического тензора. Найдем их явное выражение.

Прежде всего заметим, что из (4.40) следует

$$e_i \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \quad (4.42)$$

Таким образом,  $\Gamma_{jk}^i$  являются коэффициентами разложения векторов  $\frac{\partial e_j}{\partial x^k}$  по векторам основного базиса.

Введем *символы Кристоффеля первого рода*  $\Gamma_{i,jk}$ , являющиеся коэффициентами разложения векторов  $\frac{\partial e_j}{\partial x^k}$ , по векторам взаимного базиса, т. е.

$$e^i \Gamma_{i,jk} = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \quad (4.43)$$

Тогда из (4.43) и (4.42) имеем

$$\Gamma_{i,jk} = e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k}, \quad (4.44)$$

$$\Gamma_{i,jk} = g_{il} \Gamma_{jk}^l; \quad \Gamma_{jk}^i = g^{il} \Gamma_{i,jk}. \quad (4.45)$$

Заметим теперь, что в силу (см. 2.33)

$$\frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial r}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial r}{\partial x^k} = \frac{\partial e_k}{\partial x^j} \quad (4.46)$$

из определений (4.40) и (4.44) следует, что *символы Кристоффеля симметричны по двум нижним индексам* (у  $\Gamma_{i,jk}$  эти индексы отделены запятой):

$$\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj}; \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

Тогда, учитывая симметрию  $\Gamma_{i,jk}$  по  $j$  и  $k$  и свойства (4.46), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,jk} &= e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \left( e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k} + e_i \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} (e_i \cdot e_j) + \frac{\partial}{\partial x^j} (e_i \cdot e_k) - e_j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - e_k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - e_j \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} - e_k \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} (e_k \cdot e_j) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\Gamma_{i, ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) = \Gamma_{i, kj}, \quad (4.47)$$

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il} \Gamma_{l, ik} = \Gamma_{kj}^i. \quad (4.48)$$

*Символы Кристоффеля не являются тензорами.* Это следует из закона преобразования символов Кристоффеля при изменении пространственной системы координат:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{l, ik}^j &= e_i' \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x'^k} = \alpha_i'^l e_l \cdot \frac{\partial}{\partial x^m} (e_n \alpha_j^n) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} = \\
&= \alpha_i'^l \alpha_k'^m \alpha_j^n e_l \cdot \frac{\partial e_n}{\partial x^m} + \alpha_i'^l \alpha_k'^m (e_l \cdot e_n) \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m} = \\
&= \alpha_i'^l \alpha_k'^m \alpha_j^n \Gamma_{l, mn} + \alpha_i'^l \alpha_k'^m \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m} g_{ln}. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\Gamma_{jk}^i = \alpha_i'^l \alpha_k'^m \alpha_j^n \Gamma_{mn}^l + \alpha_i'^l \alpha_k'^m \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m}. \quad (4.50)$$

*Ковариантные производные вектора являются компонентами тензора второго ранга.*

Действительно, учитывая (4.50), получим

$$\begin{aligned}
A_{i; k}^j &= \frac{\partial A_i^j}{\partial x'^k} - A_j^i \Gamma_{ik}^j = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha_i'^l A_l) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} - \alpha_j^i A_r \left( \alpha_n^{j'} \alpha_k'^m \alpha_l^n \Gamma_{lm}^n + \alpha_n^{j'} \alpha_k'^m \frac{\partial \alpha_l^n}{\partial x^m} \right) = \\
&= \alpha_i'^l \alpha_k'^m \left\{ \frac{\partial A_l}{\partial x^m} - A_n \Gamma_{lm}^n \right\} = \alpha_i'^l \alpha_k'^m A_{l; m}. \\
A_{i; k}^j &= \frac{\partial A^j}{\partial x'^k} + A^j A_r \Gamma_{jk}^r = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha_i'^l A^l) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} + \alpha_r^j A^r \left( \alpha_i^{j'} \alpha_k'^m \alpha_n^n \Gamma_{nm}^l + \alpha_n^{j'} \alpha_k'^m \frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x^m} \right) = \\
&= \alpha_i'^l \alpha_k'^m \left\{ \frac{\partial A^l}{\partial x^m} + A^n \Gamma_{nm}^l \right\} = \alpha_i'^l \alpha_k'^m A_{l; m}.
\end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение  $\alpha_r^{j'} \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m} = -\alpha_j^n \frac{\partial \alpha_r^j}{\partial x^m}$ , которое получается при дифференцировании выражения  $\alpha_r^{j'} \alpha_j^n = g_r^n$  (см. 3.5).

Таким образом, величины  $A_{i; k}$  преобразуются как ковариантные компоненты тензора 2-го ранга, а величины  $A_{i; k}^j$  — как смешанные компоненты.

Из определений (4.36) и (4.37), учитывая, что  $e^i = g^{il}e_l$ , следуют соотношения

$$A_{i;k} = g_{il}A^l_k; \quad A^i_{;k} = g^{il}A_{l;k}. \quad (4.51)$$

Таким образом,  $A_{i;k}$  и  $A^i_{;k}$  являются компонентами (ковариантными и смешанными) *одного и того же тензора*, который и называется *абсолютной (ковариантной) производной вектора*.

**Ковариантная производная тензоров.** Естественным обобщением формул для ковариантной производной вектора является определение ковариантного дифференцирования тензора 2-го ранга:

$$T_{ik;l} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} - T_{mk}\Gamma_{il}^m - T_{im}\Gamma_{kl}^m, \quad T^i_{;l} = \frac{\partial T^ik}{\partial x^l} + T^{mk}\Gamma_{ml}^k + T^{im}\Gamma_{ml}^k; \\ T^i_{;k;l} = \frac{\partial T^i_{;k}}{\partial x^l} + T^m_{;k}\Gamma_{ml}^i - T^l_{;m}\Gamma_{kl}^m. \quad (4.52)$$

Можно показать, что эти величины преобразуются при изменении системы координат как соответствующие компоненты тензора 3-го ранга ( $T_{ik;l}$  — как ковариантные компоненты;  $T^i_{;l}$  — как смешанные — дважды контравариантные, один раз ковариантные и т. д.).

Ковариантные производные тензора любого ранга определяются аналогично: первое слагаемое — это частные производные компонент тензора по координатам; остальные слагаемые (их число равно рангу тензора) являются суммами из компонент тензора и символов Кристоффеля первого рода, причем индекс суммирования служит поочередно индексы компонент тензора и противоположный (верхний или нижний — в зависимости от «немого» индекса тензора) индекс символов Кристоффеля. Эти последние слагаемые входят с минусом, если «немой» индекс компонент тензора — «ковариантный» (нижний) и с плюсом, если «немой» индекс у тензора — «контравариантный» (верхний).

$$\text{Например, } \lambda^i_{;k;l} = \frac{\partial \lambda^i_{;k}}{\partial x^l} - \lambda^m_{;k}\Gamma_{lm}^i - \lambda^i_{;m}\Gamma_{kl}^m + \lambda^i_{;m}\Gamma_{lm}^i.$$

*Ковариантная производная от тензора n-го ранга является тензором ранга n + 1.*

В частном случае тензора нулевого ранга (скаляра) его ковариантная производная совпадает с частными производными по координатам  $f_{;l} = \frac{\partial f}{\partial x^l}$ .

Ковариантная производная от скаляра является ковариантным вектором (ковариантные компоненты градиента скаляра).

При таком определении операции ковариантного дифференцирования нетрудно вывести правила ковариантного дифференцирования суммы и произведения тензоров, которые совпадают с правилами обычного дифференцирования. Например, для тензора 2-го ранга имеем

$$(A_{ik} + B_{ik})_{;l} = A_{ik;l} + B_{ik;l}, \quad (A_{ik}B_{mn})_{;l} = A_{ik;l}B_{mn} + A_{ik}B_{mn;l}$$

Справедливость этих формул можно показать простым вычислением правых и левых частей и сравнением результатов вычислений между собой.

**Теорема Риччи:** *ковариантная производная метрического тензора равна нулю.* Теорема доказывается простым вычислением. Согласно (4.47) и (4.48),

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{im}\Gamma_{kl}^m - g_{mk}\Gamma_{li}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{i,k}^l - \Gamma_{k,i}^l = \\ = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \right) = 0.$$

Отсюда как следствие имеем часто используемое соотношение

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{k,il}. \quad (4.53)$$

Аналогично можно показать, что  $g^i{}_{;l} = 0$ .

Равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора позволяет обращаться с его компонентами как с постоянными при ковариантном дифференцировании. Так, например, справедливы соотношения  $g_{il}A^l{}_{;k} = (g_{il}A^l)_{;k} = A_{i;k}$ ,  $g_{ii}T^i{}_{;k} = (g_{ii}T^i)_{;k} = T^i{}_{;k}$ ,  $T_{ik;l}g^{lm}g^{kn} = (T_{ik}g^{lm}g^{kn})_{;l} = T^m{}_{;l}$  и т. п.

**Однородное векторное поле. Параллельный перенос вектора.** Векторное поле  $A$  называется *однородным*, если оно не меняется от точки к точке. Ковариантная производная однородного поля равна нулю.

Действительно, пусть в бесконечно близких точках  $x^i$  и  $x^i + dx^i$  вектор  $A$  имеет одну и ту же величину и направление, т. е.  $A(x^1, x^2, x^3) = A(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ . Однако компоненты вектора в этих точках будут, вообще говоря, различны, как различны в них и местные координатные базисы. Поэтому можно записать  $A = A^i e_i = (A^i + dA^i)(e_i + de_i)$ . Отсюда получим  $e_i dA^i + A^i de_i + dA^i de_i = 0$ , или с точностью до бесконечно малых первого порядка  $e_i dA^i + A^i de_i = dA = 0$ , где  $dA$  — абсолютный дифференциал вектора  $A$ .

$$\text{Тогда } \frac{\partial A}{\partial x^k} dx^k = 0, \text{ или } A^i{}_{;k} dx^k = 0.$$

Так как приращения  $dx^k$  произвольны, то для однородного векторного поля  $A$  имеем

$$A^i{}_{;k} = 0. \quad (4.54)$$

Однородное векторное поле можно рассматривать как результат переноса вектора  $A$  параллельно самому себе во все точки поля. Тогда об условии (4.54) говорят как об условии *параллельного переноса вектора*.

## 4.7. Применение дифференциальных операций к различного вида векторным и скалярным функциям

**Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.** В предыдущих параграфах были введены дифференциальные операции первого порядка над скалярами и векторами:

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi; \quad \nabla \cdot A = \text{div } A; \quad \nabla \times A = \text{rot } A.$$

Применяя эти операции вторично к полученным в результате первого дифференцирования функциям, получим следующие дифференциальные операции второго порядка:

$$\nabla(\nabla \cdot A) = \text{grad div } A; \quad \nabla \cdot \nabla \varphi = \text{div grad } \varphi \equiv \nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi; \quad \nabla \times \nabla \varphi = \text{rot grad } \varphi = 0; \quad (4.55)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = \text{div rot } A = 0; \quad (4.56)$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \text{rot rot } A.$$

В этих формулах символический оператор «набла» независимо от системы координат (см. 4.22) имеет выражение  $\nabla(\dots) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n}(\dots) dS$ , а в декартовой прямоугольной —  $\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ .

Справедливость тождеств (4.55) и (4.56) в декартовых координатах может быть проверена непосредственным вычислением

Оператор  $\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta$  — оператор Лапласа (читается «лапласиан»). В декартовых прямоугольных координатах он имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \nabla \cdot \nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_l \frac{\partial}{\partial x_l} = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Таким образом,  $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$ .

Вследствие своей линейности все рассмотренные операции для суммы (разности) функций применяются к каждому слагаемому отдельно. Таким образом,  $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$ ;  $\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}$ ;  $\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}$ ;  $\operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}$ ;  $\Delta(\varphi + \psi) = \Delta\varphi + \Delta\psi$ ;  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}$ . Что касается применения дифференциальных операций к произведению функций

$$\varphi\psi; \varphi\mathbf{A}; \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad (*)$$

то их нужно применять к каждому сомножителю отдельно, считая другой при этом постоянным. Очень удобно здесь пользоваться оператором  $\nabla$ , ставя его всегда после множителя, который в данном слагаемом принимается постоянным, и перед множителем, который считается переменным.

Полученные таким символическим методом, путем оперирования с «вектором»  $\nabla$ , выражения не должны противоречить правилам тензорной алгебры. Однако здесь всегда следует помнить о дифференциальном характере оператора  $\nabla$  и о том, что его применение сводится по сути дела к вычислению частных производных по координатам и сложению этих производных (после умножения на соответствующие орты). Таким образом, такие выражения, как  $\varphi\nabla$ ,  $\mathbf{A} \cdot \nabla$ ,  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \nabla)$  и т. п., если после них нет величин, на которую действует оператор  $\nabla$ , имеют смысл только как операторы.

Поясим это применением операций ко всевозможным произведениям (\*), отмечая множитель, рассматриваемый постоянным, индексом  $C$ :

$$\left. \begin{aligned}
 1) \operatorname{grad} \varphi \psi &= \nabla \varphi \psi = \nabla \varphi_c \psi + \nabla \varphi \psi_c = \varphi_c \nabla \psi + \psi_c \nabla \varphi = \\
 &= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi; \\
 2) \operatorname{div} \varphi \mathbf{A} &= \nabla \cdot \varphi \mathbf{A} = \nabla \cdot \varphi_c \mathbf{A} + \nabla \cdot \varphi \mathbf{A}_c = \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{A} + \\
 &+ \mathbf{A}_c \cdot \nabla \varphi = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi; \\
 3) \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \\
 &+ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) = -\mathbf{A}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \\
 &= -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}; \\
 4) \operatorname{rot} \varphi \mathbf{A} &= (\nabla \times \varphi \mathbf{A}) = (\nabla \times \varphi_c \mathbf{A}) + (\nabla \times \varphi \mathbf{A}_c) = \\
 &= \varphi_c (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \varphi \times \mathbf{A}_c) = \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \varphi \times \mathbf{A}) = \\
 &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A}).
 \end{aligned} \right\} (4.58)$$

Вывод следующих формул предоставляется сделать читателю (см. также задачи 11, 12 гл. 4):

$$\begin{aligned}
 5) \operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \\
 &+ (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}); \\
 6) \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \\
 &+ \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}; \\
 7) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.
 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Весьма распространенным в приложениях является случай, когда функции  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  являются сложными функциями от  $\mathbf{r}$ , т. е.

$$\varphi = \varphi(f(\mathbf{r})); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(f(\mathbf{r})),$$

где  $f(\mathbf{r})$  — некоторая скалярная функция.

Тогда применение операций к такого рода функциям дает формулы

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} \varphi(f(\mathbf{r})) &= \frac{d\varphi}{df} \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\mathbf{A}}{df}, \quad (4.60) \\
 \operatorname{rot} \mathbf{A}(f(\mathbf{r})) &= \operatorname{grad} f \times \frac{d\mathbf{A}}{df}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим доказательство, например, второй формулы. По определению имеем

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (*)$$

Разложим под интегралом вектор  $\mathbf{A}$  в окрестности точки  $M$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A})_M + \left( \frac{d\mathbf{A}}{df} \right)_M (t - f_M) + \dots$$

и подставим его выражение в (\*). Тогда, учитывая  $\iint_S \mathbf{n} dS = 0$ , получим

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left( \frac{d\mathbf{A}}{df} \right)_M \iint_S f \mathbf{n} dS = \left( \frac{d\mathbf{A}}{df} \right)_M \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S f \mathbf{n} dS.$$

Отсюда в соответствии с определением градиента имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{A}}{df} \cdot \operatorname{grad} f.$$

**Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах.** Как уже отмечалось, в практических вычислениях приходится пользоваться скалярными выражениями, являющимися разложениями соответствующих тензорных уравнений. Приведенные выше дифференциальные операции могут быть записаны в проекциях на оси координат, если известны проекции основных дифференциальных операторов (градиента и ротора).

Рассмотрим вначале выражения градиента скаляра, дивергенции вектора, ротора вектора и лапласиана в ортогональных криволинейных координатах. При этом нами будут использованы основные сведения 2.8, касающиеся ортогональных систем.

Градиент скалярной функции  $\Phi$  как вектор характеризует величину и направление наибольшего изменения этой функции. Определяя проекции этого вектора на координатные оси (производные скаляра  $\Phi$  по направлению координатных осей), в силу (2.25) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_i} = \frac{\partial \Phi}{dq_i} \frac{dq_i}{ds_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad (\text{без суммирования по } i).$$

Следовательно,

$$\nabla \Phi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \mathbf{e}_3^0. \quad (4.61)$$

В цилиндрической системе координат

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \mathbf{e}_R^0 + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi^0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z^0.$$

Через  $\mathbf{e}^0$  с соответствующим индексом обозначен орт координатной оси.

Для определения выражения  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в криволинейных координатах воспользуемся определением

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS.$$

Элементарный объем  $d\tau$  (в предыдущем выражении он обозначен через  $\tau$ ) имеет выражение

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Для определения интеграла  $\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS$  найдем сначала поток вектора  $\mathbf{A}$  через пару противоположных граней, например через грани, перпендикулярные к  $(q_1)$  (рис. 4.21).

На грани  $M345$  нормаль  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1^0$ , и поэтому поток вектора через нее будет равен

$$-\mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{A} ds_3 ds_2 = -A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3. \quad (4.62)$$

Здесь через  $A_1$  обозначена проекция вектора на ось ( $q_1$ ), т. е.

$$A_1 = A \cdot e_1^0.$$

На грани 1276 выражение (4.62) получит приращение, связанное с приращением координаты  $q_1$ , на величину  $dq_1$ , и так как направление нормали будет  $e_1^0$ , то поток вектора  $A$  через эту грань равен  $\left( A_1 H_2 H_3 + \frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3$ .

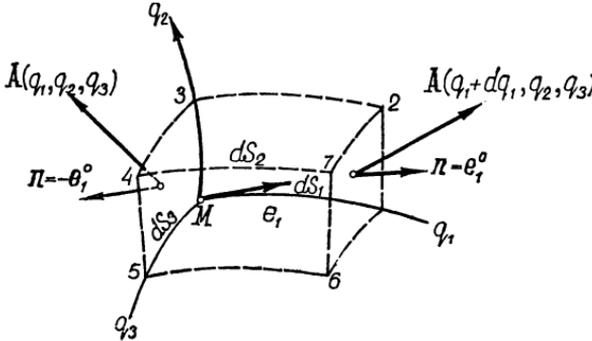


Рис. 4.21. Вычисление потока вектора через поверхность элементарного объема в криволинейных координатах.

Определяя таким же образом поток через пары других граней и складывая все полученные выражения, найдем, разделив их на элементарный объем:

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 H_1 H_2) \right]. \quad (4.63)$$

Для цилиндрической системы координат

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (A_R R) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial A_z}{\partial z} \right].$$

Таким же самым образом, пользуясь определением вектора вихря  $\operatorname{rot} A = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$ ,

найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} A = & e_1^0 \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 H_2) \right] + \\ & + e_2^0 \frac{1}{H_1 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 H_3) \right] + \\ & + e_3^0 \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 H_1) \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Для цилиндрической системы координат

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \left( \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_R^0 + \left( \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right) \mathbf{e}_\varphi^0 + \\ & + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} (A_\varphi R) - \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z^0. \end{aligned}$$

Для определения лапласиана скалярной функции заметим, что  $\Delta \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$ .

Применяя поэтому найденные выше выражения для  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  и  $\operatorname{grad} \Phi$ , найдем

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

В цилиндрической системе координат

$$\Delta \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

При определении проекции вектора  $\Delta \mathbf{A}$  на оси криволинейной системы координат необходимо использовать выражение, которое годится для любой системы координат:

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (4.65a)$$

Оператор  $\Delta$ , примененный к скалярной функции, в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.66)$$

Проекция вектора  $\Delta \mathbf{A}$  на оси цилиндрической системы координат равны:  $(\Delta \mathbf{A})_R = \Delta A_R - \frac{A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ ;  $(\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi}$ ;  $(\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z$ . Здесь оператор  $\Delta$  определяется выражением (4.66), а проекция вектора  $\Delta \mathbf{A}$  вычислена на основании формулы (4.65a).

Приведем выражение основных дифференциальных операций в сферической системе координат  $R, \theta, \varphi$  (рис. 2.13). Координатными поверхностями служит полуплоскость, проходящая через ось  $(x_3)$  под углом  $\varphi$  к плоскости отсчета, сфера радиуса  $R$  и конус с углом раствора  $2\theta$ .

В этой системе имеем:  $ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ ;  $\nabla \Phi =$   
 $= \mathbf{e}_R^0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta^0 \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi^0 \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ ;  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \times$   
 $\times \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ ;  $\operatorname{rot}_R \mathbf{A} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]$ ;  
 $\operatorname{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi)$ ;  $\operatorname{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (A_\theta R) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right]$ ;  
 $\Delta \Phi = \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right].$

Таким образом, в сферических координатах оператор  $\Delta$ , применяемый к скаляру, имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.67)$$

Проекция вектора  $\Delta \mathbf{A}$  на оси сферической системы координат:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_R &= \Delta A_R - \frac{2A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2A_\theta}{R^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\ (\Delta \mathbf{A})_\theta &= \Delta A_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\ (\Delta \mathbf{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Эти проекции вычислены на основании формулы

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

**Дифференциальные операторы в общих криволинейных координатах.** Понятия ко-, контравариантных и «физических» компонент тензоров, а также правила ковариантного дифференцирования позволяют получить выражения дифференциальных операторов в произвольных криволинейных координатах.

Градиент скаляра  $\Phi(x^1, x^2, x^3)$  определяется как вектор, ковариантные компоненты которого равны  $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$  ( $x^i$  — обобщенные криволинейные координаты). Тогда в произвольных системах координат можно определить оператор «набла»  $\nabla$

$$\nabla \equiv e^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (4.68)$$

так что

$$\nabla \Phi = e^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (4.69)$$

Ковариантные компоненты вектора  $\nabla \Phi$  равны  $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ , а «физические» компоненты в силу (1.36)

$$(\nabla \Phi)_i^* = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (\text{нет суммирования по } i). \quad (4.70)$$

В случае ортогональных координат отсюда получаем  $(\nabla \Phi)_i^* = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ . Все свойства градиента, установленные в 4.4, остаются в силе и нет нужды их переформулировать в системе обобщенных координат. Заметим только, что если  $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3)$ , то в случае самых общих координат

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i = \nabla \Phi \cdot dr, \quad \text{где } dr = e_i dx^i.$$

**Дивергенция вектора** определяется как свертка тензора 2-го ранга — ковариантной производной контравариантного вектора (линейный инвариант тензора ковариантной производной):  $\operatorname{div} \mathbf{A} = A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^j \Gamma^i_{ij}$ .

Найдем выражение суммы  $\Gamma^i_{ij}$  через компоненты метрического тензора. Учитывая (4.45) и симметрию  $g^{ik}$ , запишем

$$\Gamma^i_{ij} = g^{ik} \Gamma_{k, ij} = \frac{1}{2} g^{ik} (\Gamma_{k, ij} + \Gamma_{i, kj}), \quad (4.71)$$

причем по теореме Риччи (см. 4.53)

$$\Gamma_{k, ij} + \Gamma_{i, kj} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}. \quad (4.72)$$

Разлагая по известной теореме из алгебры определитель  $G = \det \|g_{ik}\|$  по элементам  $i$ -й строки, получим  $G = g_{ik} G^{ik}$  (по  $i$  не суммировать!), где  $G^{ik}$  — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу  $g_{ik}$ .

Отсюда, поскольку  $G^{ik}$  не зависит от  $g_{ik}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial g_{ik}} = G^{ik}$ .

Но в силу (1.44)

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ik}}. \quad (4.73)$$

Поэтому, учитывая (4.71), (4.72) и (4.73),

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (A^i \sqrt{G}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ik} A_k \sqrt{G}) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{A_i^*}{\sqrt{g_{ii}}} \sqrt{G} \right), \end{aligned} \quad (4.74)$$

где  $A_i^*$  — физические компоненты вектора  $\mathbf{A}$ .

В случае ортогональных координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{A_i^* H_1 H_2 H_3}{H_i} \right).$$

*Лапласиан скалярной функции* можно получить из выражения  $\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$ . Учитывая (4.69) и (4.74), имеем

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ik} \sqrt{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \right). \quad (4.75)$$

В случае ортогональных координат

$$\Delta \Phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right). \quad (4.76)$$

*Ротор вектора* может быть определен как векторное произведение вектора  $\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  на вектор  $\mathbf{A}$ . Учитывая это замечание и результаты главы первой, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = e^i \frac{\partial}{\partial x^i} \times A_k e^k = (e^i \times e^k) \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{e_j}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right), \end{aligned}$$

где индексы  $(j, i, k)$  составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Отсюда получаем контравариантные и «физические» компоненты вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$ :

$$(\text{rot } \mathbf{A})^l = \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right),$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})^*_j = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{G}} \left[ \frac{\partial (A_k^* \sqrt{g_{kk}})}{\partial x^i} - \frac{\partial (A_i^* \sqrt{g_{ii}})}{\partial x^k} \right].$$

(нет суммирования по  $i$  и  $k$ !).

В случае ортогональных координат

$$(\text{rot } \mathbf{A}^*)_j = \frac{H_j}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial (A_k^* H_k)}{\partial x_i} - \frac{\partial (A_i^* H_i)}{\partial x_k} \right]. \quad (4.77)$$

(нет суммирования по  $i$  и  $k$ !).

В обобщенных координатах вместо единичного псевдотензора  $\varepsilon_{ikl}$ , рассмотренного ранее в 3.9, вводят тензор 3-го ранга с ковариантными компонентами  $e_{ikl}$ , определяемыми следующим образом:

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = \sqrt{G}, \quad e_{132} = e_{213} = e_{321} = -\sqrt{G},$$

$$e_{ikl} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Контравариантные компоненты этого тензора определяются такими равенствами:

$$e^{123} = e^{231} = e^{312} = \frac{1}{\sqrt{G}}, \quad e^{132} = e^{213} = e^{321} = -\frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$e^{ikl} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Тогда векторное произведение двух векторов  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  имеет ко- и контравариантные компоненты (см. задачу 5 гл. 1):

$$C_j = e_{ikj} A^i B^k, \quad C^j = e^{ikj} A_i B_k,$$

где  $(j, i, k)$  — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3.

Теперь компоненты  $\text{rot } \mathbf{A}$  можно записать в виде

$$(\text{rot } \mathbf{A})^j = e^{ikj} A_k; i, \quad (\text{rot } \mathbf{A})_j = g_{jl} (\text{rot } \mathbf{A})^l = g_{jl} e^{ikl} A_k; i.$$

## 4.8. Интегральные теоремы векторного и тензорного анализа

Интегральные теоремы устанавливают важные соотношения между значениями тензоров внутри поля и их значениями на границах поля. Они являются обобщением известной формулы Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b \frac{dA(x)}{dx} dx = A(b) - A(a),$$

выражающей интеграл от производной функции через значения этой функции на границах области (в предположении существования и непрерывности производной).

В 4.2 мы уже останавливались на двух важнейших интегральных теоремах векторного анализа — теореме Остроградского и теореме Стокса. Их векторные формулировки имеют вид

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS; \quad (4.78)$$

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d\tau = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (4.79)$$

Эти теоремы широко применяются во многих разделах теоретической физики, особенно в гидромеханике, теории упругости и электродинамике. Ниже мы приведем несколько примеров их использования.

Формулы, выражающие теоремы Остроградского и Стокса, позволяют непосредственно сформулировать при специальном задании поля  $\mathbf{A}$  ряд дополнительных теорем, примыкающих к теоремам Остроградского и Стокса.

**Теоремы, примыкающие к теореме Остроградского.** Из формулы Остроградского можно получить ряд интегральных формул, связывающих характеристики поля на некоторой замкнутой поверхности с характеристиками поля в объеме, ограниченном этой поверхностью. Все ограничения, накладываемые на поле, подчиняющееся теореме Остроградского, переносятся с соответствующими изменениями в получаемые формулы.

Положим последовательно в (4.78):

1)  $\mathbf{A} = \varphi \mathbf{C}$ ; 2)  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ; 3)  $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}$  ( $A_i = C_k T_{ik}$ ), где  $\mathbf{C}$  — постоянный произвольный вектор.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{C} \cdot \varphi \mathbf{n}, & \operatorname{div} \mathbf{A} &= \mathbf{C} \cdot \nabla \varphi; \\ 2) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}), & \operatorname{div} \mathbf{A} &= \mathbf{C} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}; \\ 3) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}), & \operatorname{div} \mathbf{A} &= \mathbf{C} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{C}$  предполагается постоянным и произвольным, то, подставляя последовательно выражения (4.80) в (4.78), получим\*:

$$\iint_S \varphi \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\tau} \nabla \varphi \, d\tau; \quad (4.81)$$

$$\iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \, dS = \iiint_{\tau} \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d\tau; \quad (4.82)$$

$$\iint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{T} \, d\tau, \quad (4.83)$$

---

\* Мы получим выражения вида  $\mathbf{C} \cdot \left\{ \iint_S \dots dS - \iiint_{\tau} \dots d\tau \right\} = 0$ . Поскольку  $\mathbf{C}$  — произвольный вектор, то из равенства нулю написанного скалярного произведения следует:  $\iint_S \dots dS - \iiint_{\tau} \dots d\tau = 0$ .

или

$$\iint_S T_{ik} n_k dS = \iiint_\tau \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\tau.$$

Все эти формулы можно записать сокращенно в виде равнозначности действия двух операторов на одну и ту же величину (...):

$$\iint_S \mathbf{n}(\dots) dS = \iiint_\tau \nabla(\dots) d\tau.$$

Эти операторы применяются к скаляру, вектору (скалярным и векторным умножением) и тензору 2-го ранга.

Рассмотрим несколько частных видов формул (4.81), (4.82), (4.83).

1. Если поле  $\mathbf{A}$  таково, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  всюду в области  $\tau$ , то из (4.78) следует равенство нулю потока поля через любую замкнутую поверхность:  $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ .

2. Если внутри области  $\tau$  дивергенция поля равна нулю всюду, кроме некоторой точки (где дивергенция либо не существует, либо отлична от нуля), то поток поля не зависит от вида поверхности  $S$  и будет одинаковым для всех поверхностей, охватывающих эту точку, и равным нулю для всех поверхностей, не содержащих внутри себя этой точки (ср. пример 3 на с. 136).

3. Взяв  $\varphi = \operatorname{const}$ , получим из (4.81)  $\iint_S \mathbf{n} dS = 0$  для любой замкнутой поверхности  $S$ .

4. Если поле  $\mathbf{A}$  таково, что  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$  всюду внутри области  $\tau$ , то из (4.82) следует:  $\iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS = 0$ .

**Теоремы, примыкающие к теореме Стокса.** Из теоремы Стокса можно получить ряд формул, связывающих характеристики поля на некоторой незамкнутой поверхности с данными того же поля на контуре, который служит границей этой поверхности.

Ввиду важности теоремы Стокса мы приведем еще одно ее доказательство, менее строгое, но более наглядное.

Рассмотрим замкнутый вектор  $L$ , стягивающий произвольную поверхность  $S$  (рис. 4.22).

Предположим, что во всех точках этой поверхности заданы и непрерывны компоненты вектора  $\mathbf{A}$  вместе с их частными производными  $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ .

Разобьем поверхность  $S$  на  $N$  достаточно малых частей  $S_i$ , ограниченных замкнутыми контурами  $L_i$ .

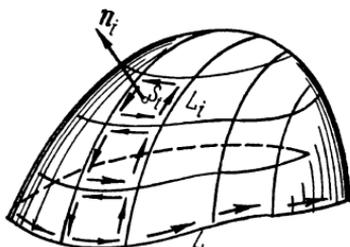


Рис. 4.22. К доказательству теоремы Стокса. Участки  $S_i$  поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $L$ , имеют общие части контуров  $L_i$ , которые при вычислении суммы циркуляций по ним обходятся дважды в противоположных направлениях.

На каждом из элементов  $S_i$  возьмем внешнюю нормаль  $\mathbf{n}_i$  и установим направление обхода контура  $L$  соответственно направлению  $\mathbf{n}_i$ .

Тогда для какой-то точки  $M_i$  из  $S_i$  согласно (4.26) мы можем определить проекцию вектора вихря:  $(\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } \mathbf{A})_{M_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i$ .

Отсюда  $(\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } \mathbf{A})_{M_i} S_i = \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i + \epsilon S_i$ , где  $\epsilon$  может быть сделана сколь

угодно малой по абсолютной величине путем уменьшения диаметра ячейки  $S_i$ . Принимая, что здесь имеет место равномерная сходимость, найдем для любого  $\epsilon > 0$  такое разбиение  $S$  на  $N$  частей, при котором  $\max \{\epsilon_i\} \leq \epsilon$ .

Тогда получим, суммируя по всем ячейкам  $S_i$ :

$$\left| \sum_{i=1}^N (\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } \mathbf{A})_{M_i} S_i - \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i \right| \leq \epsilon S, \quad (4.84)$$

где  $\epsilon \rightarrow 0$ , когда  $N \rightarrow \infty$ . Но  $\sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ , ибо в этой сумме

интегралы, не относящиеся к границе поверхности  $S$  — контуру  $L$ , попарно взаимно уничтожаются. Это вызвано тем, что контуры, разграничивающие ячейки  $S_i$ , обходятся дважды в противоположных направлениях.

Тогда, увеличивая число  $N$  до бесконечности и уменьшая  $S_i$  до нуля, после замены суммы в левой части выражения (4.84) поверхностным интегралом получим  $\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ . Теорема Стокса доказана.

Теперь рассмотрим ряд интегральных формул, получаемых из основной (4.79) определенным выбором вектора  $\mathbf{A}$ .

Положим последовательно:

1)  $\mathbf{A} = \varphi \mathbf{C}$ ,

2)  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ,

где  $\mathbf{C}$  — постоянный произвольный вектор.

Тогда получим:

1)  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } (\varphi \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \varphi)$ ;  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{C} \cdot \varphi d\mathbf{L}$ ;

2)  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ;

$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{L} = (d\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ .

Подставляя эти значения  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A}$  и  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  в (4.79) и сокращая полученные выражения на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{C}$ , получим следующие формулы:

$$\iint_S (\mathbf{n} \times \nabla \varphi) dS = \oint_L \varphi d\mathbf{L}; \quad (4.85)$$

$$\iint_S ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A}) dS = \oint_L (d\mathbf{L} \times \mathbf{A}). \quad (4.86)$$

Заметим, что формулу Стокса (4.79) можно переписать, введя оператор  $\nabla$ , в виде

$$\iint_S dS (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = \oint_L d\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.86')$$

Формулы (4.85), (4.86), (4.86') можно объединить в одну символическую формулу, определяющую действия разных операторов на одно и то же выражение (...):

$$\iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) (...) dS = \oint_L (...) dL.$$

Выражение (...) может быть скаляром (см. 4.85) или вектором, на который оператор действует скалярно (см. 4.79) или векторно (см. 4.86).

Отметим некоторые следствия из теоремы Стокса.

1) Поток вихря непрерывного поля через *замкнутую* поверхность равен нулю. Доказательство этого следует из факта произвольности поверхности  $S$ , имеющей границу в виде контура  $L$ .

2) В односвязном поле, если  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  всюду, циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

**Формулы Грина.** Известные в анализе формулы Грина могут быть получены как следствие из теоремы Остроградского. Ввиду их важности мы рассмотрим эти формулы особо. Возьмем в (4.78) вектор  $\mathbf{A}$  в виде  $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi$ , где  $\varphi, \psi$  — скалярные функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го и 2-го порядков.

Тогда имеем:  $\text{div } \mathbf{A} = \text{div}(\varphi \nabla \psi) = \varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$

Подставляя эти выражения в формулу Остроградского, получим

$$\iiint_{\tau} (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) d\tau = \iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (4.87)$$

Это *первая формула Грина*.

Положим в формуле Остроградского  $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$ .

Тогда получим *вторую формулу Грина*:

$$\iiint_{\tau} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau = \iint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (4.88)$$

Из этих основных формул следуют при частных значениях  $\varphi$  и  $\psi$  некоторые важные соотношения.

В случае  $\psi = \varphi$  формула (4.87) дает

$$\iiint_{\tau} [\varphi \Delta \varphi + (\Delta \varphi)^2] d\tau = \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (4.89)$$

а при  $\varphi = \text{const}$  из нее же имеем

$$\iiint_{\tau} \Delta \psi d\tau = \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (4.90)$$

Из формулы (4.90) следует, что оператор  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$  может быть представлен в виде следующего предела:

$$\Delta(\dots) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \frac{\partial}{\partial n}(\dots) dS. \quad (4.91)$$

Следствие. Вторая формула Грина имеет одно важное следствие, к выводу которого мы переходим.

Пусть в объеме  $\tau$ , ограниченном поверхностью  $S$ , задана непрерывная вместе со вторыми частными производными функция  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ .

Тогда можно определить значение  $\varphi$  в любой внутренней точке  $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  объема  $\tau$ , если известны значения  $\varphi$  и ее нормальной производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  на границе этого объема и значение  $\Delta \varphi$  в каждой его внутренней точке.

Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из  $M_0$  в переменную точку  $M$ .

Тогда  $r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2}$ .

Непосредственным вычислением можно убедиться, что функция  $\frac{1}{r}$  удовлетворяет условию  $\Delta \frac{1}{r} = 0$  во всех точках  $\tau$ , кроме

точки  $M_0$ , где  $r = 0$ .

Окружим точку  $M_0$  сферой с поверхностью  $\epsilon$  радиуса  $\rho$  (см. рис. 4.23). Тогда для области ( $\tau'$ ) вне сферы, согласно второй формуле Грина (4.88), имеем, положив  $\psi = \frac{1}{r}$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau'} \left(-\frac{1}{r} \Delta \varphi\right) d\tau = \\ & = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS + \\ & + \iint_{\epsilon} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\epsilon. \quad (4.92) \end{aligned}$$

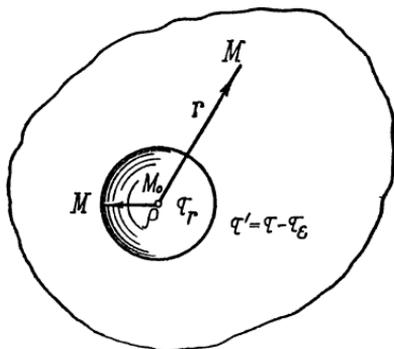


Рис. 4.23. Выделение особой точки.

Здесь  $\tau'$  — область  $\tau$  за вычетом области сферы, исключаяющей точку  $M_0$ , т. е.  $\tau' = \tau - \tau_\epsilon$ .

Поскольку внешняя для сферы  $\epsilon$  (внутренняя для поверхности области  $\tau'$ ) нормаль совпадает с направлением радиуса  $\mathbf{r}$ , получим

$$\begin{aligned} \iint_{\epsilon} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\epsilon & = \iint_{\epsilon} \left(-\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\epsilon = \iint_{\epsilon} \left(\frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\epsilon. \quad (4.93) \end{aligned}$$

Вычислим предел этого выражения, когда  $\rho \rightarrow 0$ , т. е. когда сфера  $\epsilon$  стягивается к точке  $M_0$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{\epsilon} \left( \frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\epsilon = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ M' \rightarrow M_0}} \left[ \frac{\varphi(M')}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{M'} \right] 4\pi\rho^2 = 4\pi\varphi(M_0).$$

Тогда из выражения (4.92) имеем

$$4\pi\varphi(M_0) = - \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta\varphi d\tau - \iint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (4.94)$$

Эта формула доказывает сформулированное выше следствие из теоремы Грина.

Аналогичное следствие, касающееся выражения значения некоторого вектора  $\mathbf{A}$  во внутренней точке объема  $\tau$  через  $\Delta\mathbf{A}$  для внутренних точек и производную  $\mathbf{A}$  по направлению  $\mathbf{n}$  для точек поверхности  $S$ , можно получить, если воспользоваться формулой

$$(4.83): \iiint_{\tau} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\tau = \iint_S T_{ik} n_k dS.$$

Положим в этом выражении  $T_{ik} = A_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ .

Тогда, повторяя рассуждения, приведшие к формуле (4.94) для скаляра  $\varphi$ , получим для непрерывного в объеме вместе с двумя первыми частными производными вектора  $\mathbf{A}$ :

$$4\pi A_i(M_0) = - \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta A_i d\tau - \iint_S \left( A_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) n_k dS,$$

$$\text{или } 4\pi\mathbf{A}(M_0) = - \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta\mathbf{A} d\tau - \iint_S \left\{ \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\} dS.$$

(4.94a)

Здесь вектор  $\Delta\mathbf{A}$  может быть выражен по формуле (4.65a).

**Примеры.** Теоремы векторного и тензорного анализа находят широкое применение в механике сплошных сред. Рассмотрим некоторые характерные примеры использования интегральных теорем тензорного анализа.

**Пример 1.** Дифференциальные уравнения движения сплошной среды. Уравнения движения жидкости.

В движущейся сплошной среде выделим ее часть, имеющую объем, ограниченный поверхностью  $S$ . При движении среды объем  $\tau$  и поверхность  $S$  вообще меняются, но масса остается постоянной, так что  $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0$ .

К выделенной части среды применим второй закон Ньютона, вычисляя количество движения ее и все приложенные силы.

Количество движения (импульс) выделенной части равно  $\iiint_{\tau} \rho \mathbf{V} d\tau$ .

Если на каждую единицу массы действует сила  $\mathbf{f}$ , то главный вектор всех массовых сил, приложенных к выделенной части среды, равен  $\iiint_{\tau} \mathbf{f} \rho d\tau$ .

Здесь  $f$  — интенсивность массовых сил (в поле тяжести  $f = g$ , где  $g$  — уско- рение силы тяжести).

К поверхности рассматриваемой части среды приложены еще поверхностные силы, напряжение которых на элементе поверхности  $dS$  с внешней нормалью  $n$  равно  $p_n$ . Тогда главный вектор поверхностных сил, приложенных к этой части среды, равен  $\iint_S p_n dS$ , и уравнение движения ее имеет вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho V d\tau = \iiint_{\tau} \rho f d\tau + \iint_S p_n dS.$$

Поскольку масса любого объема  $\Delta\tau$  в силу уравнения неразрывности остается постоянной, то  $\frac{d}{dt}(\rho\Delta\tau) = 0$ . Следовательно,  $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho V d\tau = \iiint_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau$ .

Таким образом,  $\iiint_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho f d\tau + \iint_S p_n dS$ . Учитывая полученное

ранее выражение для  $p_n$ , получим

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho f d\tau + \iint_S p_k n_k dS, \quad (4.95)$$

или в компонентах ( $i = 1, 2, 3$ )  $\iiint_{\tau} \rho \frac{dV_i}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho f_i d\tau + \iint_S p_{ik} n_k dS$ ,

где  $p_{ik}$  — тензор напряжений.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения сплошной среды, преобразуем поверхностный интеграл в объемный; согласно теореме Остроградского (см. 4.83), получим  $\iint_S p_{ik} n_k dS = \iiint_{\tau} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} d\tau$ . Тогда

$$\iiint_{\tau} \left\{ \rho \frac{dV_i}{dt} - \rho f_i - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right\} d\tau = 0.$$

Поскольку объем  $\tau$  произвольный, то в предположении непрерывности подынтегрального выражения найдем  $\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$ . Здесь  $\frac{dV_i}{dt}$  — полная производная, которая, как было показано в (4.30), выражается в виде

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}.$$

Таким образом, окончательно дифференциальные уравнения (их всего три для  $i = 1, 2, 3$ ) движения сплошной среды имеют вид

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \quad (4.96)$$

Предметом гидроаэромеханики является изучение движения жидкостей и газов. Для этого класса сплошных сред обычно принимается линейная зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций (см. задачу 4, гл. 2) с выделением шарового тензора, отвечающего гидростатическому

давлению. Таким образом, в гидромеханике считают, что выполняется следующее основное соотношение:  $p_{ik} = -p\delta_{ik} + aV_{ik} + b\delta_{ik}V_{ll}$ .

Здесь  $p$  — гидростатическое давление (скаляр),  $a$  и  $b$  — коэффициенты пропорциональности;  $V_{ll} = \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \equiv \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$  — свертка тензора скоростей деформаций, которая, очевидно, равна дивергенции скорости ( $V_{ll} = \text{div } V$ ).

Обычно в гидромеханике это соотношение (иногда его называют обобщенной гипотезой Ньютона) записывают в виде  $p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu V_{ik} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}V_{ll}$ , так что  $p_{11} + p_{22} + p_{33} = -3p$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости (коэффициент так называемой второй вязкости принят равным нулю \*).

В случае несжимаемой жидкости имеем ( $\text{div } V = 0$ ):  $p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu V_{ik}$ , а для жидкости, находящейся в покое, и идеальной жидкости (лишенной трения)  $p_{ik} = -p\delta_{ik}$ .

Подставляя различные выражения для  $p_{ik}$  в уравнения (4.96), получим уравнения движения:

$$а) \text{ идеальной жидкости } -\frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \text{ или в векторной}$$

записи

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho f - \nabla p; \quad (4.97)$$

б) вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Навье—Стокса) (при  $\mu = \text{const}$ ) —  $\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k}$ , или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho f - \nabla p + \mu \Delta V \quad (4.98)$$

(здесь учтено, что  $\text{div } V = \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0$ );

в) вязкой сжимаемой жидкости (при  $\mu = \text{const}$ ) —

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_k},$$

или в векторной записи  $\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho f - \nabla p + \mu \Delta V + \frac{1}{3} \mu \nabla \text{div } V$ .

В случае обобщенных координат уравнение движения должно быть сформулировано относительно компонент векторов.

Пусть поле скоростей есть функция времени  $t$  и обобщенных координат  $x^1, x^2, x^3$ , т. е.  $V = V(x^1, x^2, x^3, t)$ . Тогда приращение скорости частицы жидкости при перемещении из точки с координатами  $x^i$  в точку  $x^i + dx^i$  равно

$$dV = dV_{\text{лок}} + dV_{\text{конв}},$$

где  $dV_{\text{лок}} = \frac{\partial V}{\partial t} dt$  — локальная часть изменения скорости, а  $dV_{\text{конв}} = \frac{\partial V}{\partial x^k} dx^k$  —

конвективная часть изменения скорости, т. е.  $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x^k} V^k$ . Здесь  $V^k =$

$\frac{dx^k}{dt}$  — контравариантные компоненты скорости.

\* Подробнее см. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Механика жидкости и газа. М., ГИТТЛ, 1957, с. 463—466.

Отсюда, учитывая определение ковариантной производной (4.37), получим контравариантные компоненты ускорения

$$\frac{dV}{dt} e^i = \left(\frac{dV}{dt}\right)^i = \frac{\partial V}{\partial t} e^i + \frac{\partial V}{\partial x^k} e^i V^k = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^k V_{;k}^i. \quad (4.99)$$

Таким образом, в случае обобщенных координат вместо (4.96) получим

$$\rho \frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V_{;k}^i = \rho f^i + p_{;k}^{ik}, \quad (4.100)$$

где  $p_{;k}^{ik}$  — свертка ковариантной производной тензора напряжений.

В случае вязкой жидкости имеем

$$p^{ik} = -\rho g^{ik} + 2\mu V^{ik} - \frac{2}{3} \mu g^{ik} V_{;l}^l, \quad (4.101)$$

где компоненты тензора скоростей деформации имеют выражение

$$V^{ik} = g^{il} g^{km} V_{lm} = g^{il} g^{km} \frac{1}{2} (V_{l;m} + V_{m;l}). \quad (4.102)$$

При этом  $V_{;l}^l$  — дивергенция вектора скорости.

Вычислим  $p_{;k}^{ik}$  — дивергенцию тензора напряжений.

Учитывая, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, получим  $p_{;k}^{ik} = -p_{;k} g^{ik} + 2\mu V_{;k}^{ik} - \frac{2}{3} \mu g^{ik} (V_{;l}^l)_{;k}$ . Но  $V_{;k}^{ik} = g^{il} g^{km} \frac{1}{2} \times \times [(V_{l;m})_{;k} + (V_{m;l})_{;k}] = \frac{1}{2} g^{km} (V_{;m}^i)_{;k} + \frac{1}{2} g^{il} (V_{;l}^k)_{;k}$ .

Предполагая  $\frac{\partial^2 V^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2 V^l}{\partial x^l \partial x^k}$ , получим  $(V_{;k}^k)_{;l} = (V_{;l}^k)_{;k}$ . Теперь, подставляя  $p_{;k}^{ik}$  в (4.100), можно записать уравнение Навье — Стокса в обобщенных координатах в виде

$$\rho \frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V_{;k}^i = \rho f^i - g^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{1}{3} \mu g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (V_{;l}^l) + \mu g^{km} (V_{;m}^i)_{;k}, \quad (4.103)$$

или, переходя к ковариантным компонентам:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V^k V_{i;k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x^i} (V_{;l}^l) + \mu g^{km} (V_{i;m})_{;k}. \quad (4.104)$$

Здесь выражение  $g^{km} (V_{i;m})_{;k}$  представляет собой ковариантные компоненты вектора  $\Delta V$ .

Пользуясь формулой (4.103) и (4.104) и вводя «физические» компоненты векторов, всегда можно получить уравнение Навье — Стокса в любой конкретной системе криволинейных координат.

**Пример 2. Закон Архимеда.** Сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в нее тело с поверхностью  $S$ , равна  $R = \iint_S p_n dS = \iint_S p_{kn} n_k dS$ .

Отсюда  $R_i = \iint_S p_{ik} n_k dS$ . Если жидкость покоится ( $V = 0$ ), то (с. 166)

$$p_{ik} = -p \delta_{ik}, \quad \nabla p = \rho f = \rho g \quad (\text{массовые силы равны силам тяжести}). \quad (*)$$

Тогда  $R_i = - \iint_S p n_i dS$ , или  $R = - \iint_S p n dS$ .

Используя теорему Остроградского (4.81), имеем  $R = - \int_S \rho n dS =$   
 $= - \int_{\tau} \int \int \nabla \rho d\tau$ . Подставляя  $\nabla \rho$  из уравнения равновесия (\*), получим  
 $R = - \int_{\tau} \int \int \rho g d\tau = -g \int_{\tau} \int \int \rho d\tau = -gm = -G$ .

Таким образом, сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в нее тело, по величине равна  $G$  — весу жидкости в объеме тела — и направлена в обратную сторону.

**Пример 3. Теорема импульсов в гидроаэромеханике.** Эта теорема занимает важное место в гидроаэромеханике, особенно в экспериментальной. Она позволяет определить силу, действующую на выделенный объем жидкости, зная только ее скорость (и плотность в случае сжимаемой жидкости) на поверхности этого объема, а также силу, действующую на помещенное в движущуюся жидкость твердое тело, по напряжениям и скорости (и плотности) жидкости на определенной (так называемой *контрольной*) поверхности.

Количество движения жидкости, находящейся в момент времени в некоторой *фиксированной* пространственной области  $\tau$ , равно  $\int_{\tau} \int \int \rho V d\tau$ .

С течением времени это количество движения меняется, ибо через  $\tau$  проходят различные массы жидкости. Скорость изменения его равна  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \int \int \rho V d\tau$ .

Поскольку область  $\tau$  является фиксированной, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \int \int \rho V d\tau = \int_{\tau} \int \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\tau.$$

Переходя к компонентам, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \int \int \rho V_i d\tau = \int_{\tau} \int \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) d\tau = \int_{\tau} \int \int \left( V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} \right) d\tau.$$

Будем считать, что массовые силы отсутствуют ( $f = 0$ ). Тогда, определяя  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  из уравнения неразрывности (4.23) и  $\rho \frac{\partial V_i}{\partial t}$  — из уравнения движения (4.96), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \int \int \rho V_i d\tau &= \int_{\tau} \int \int \left[ -V_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V_k) - \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right] d\tau = \\ &= - \int_{\tau} \int \int \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V_i V_k - p_{ik}) d\tau. \end{aligned}$$

Преобразуя интеграл, стоящий в правой части, по формуле Остроградского (см. 4.83) найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \int \int \rho V_i d\tau = - \int_S (\rho V_i V_k - p_{ik}) n_k dS = - \int_S \Pi_{ik} n_k dS, \quad (4.104)$$

где

$$\Pi_{ik} = \rho V_i V_k - p_{ik}.$$

Слева в (4.105) стоит скорость изменения  $i$ -й компоненты количества движения жидкости в рассматриваемой неподвижной области. Эта скорость опреде-

ляется той же  $i$ -й компонентой потока тензора  $\Pi_{ik}$  через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую область  $(\tau)$ . Таким образом, величина  $\Pi_{ik}n_k dS$  равна  $i$ -й компоненте того количества движения, которое в единицу времени уносится через элемент поверхности  $dS$  протекающей через  $\tau$  жидкостью. Тогда очевидно, что величина  $\Pi_{ik}$  есть  $i$ -я компонента количества движения, уносимого в единицу времени через единичную площадку поверхности  $S$ , перпендикулярную к  $k$ -й оси. Тензор  $\Pi_{ik}$  называется *тензором плотности потока импульса*. Весь поток количества движения через поверхность равен потоку тензора  $\Pi_{ik}$  через нее, т. е.  $\iint_S \Pi_{ik}n_k dS$ .

Следует отличать *поток импульса* от *потока вектора*  $\rho V$ , который равен  $\iint_S \rho V \cdot n dS$ . Поток вектора  $\rho V$ , как уже отмечалось, определяет массу жидкости, уносимую через поверхность  $S$  в единицу времени, протекающей через  $\tau$  жидкостью.

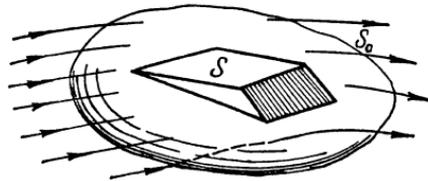


Рис. 4.24. К теореме импульсов в гидромеханике.

Сила, действующая на тело  $S$  в стационарном потоке жидкости, выражается через поле скоростей и давлений на контрольной поверхности  $S_0$ .

Вектор  $\rho V$  (количество движения единицы объема жидкости) по величине равен массе жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку поверхности  $S$ , расположенную перпендикулярно к скорости. Поэтому вектор  $\rho V$  называют *плотностью потока жидкости*.

Если движение жидкости стационарно  $\left[ \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right]$ , то из (4.105) получим

$$\iint_S \Pi_{ik}n_k dS = \iint_S (\rho V_i V_k - p_{ik}) n_k dS = 0. \quad (4.106)$$

Это уравнение выражает теорему импульсов, которую можно сформулировать так:

*При стационарном движении жидкости и равенстве нулю массовых сил поток тензора  $\Pi_{ik} = \rho V_i V_k - p_{ik}$  через любую взятую в жидкости замкнутую поверхность равен нулю.*

Теорема импульсов позволяет непосредственно выразить силу, действующую на выделенный объем жидкости, через скорость и плотность жидкости на поверхности этого объема. Действительно, поскольку массовые силы отсутствуют, то  $\iint_S p_{ik}n_k dS$  дает  $i$ -ю компоненту главного вектора всех сил, действующих на выделенный объем жидкости. Обозначим ее через  $F_i$ . Таким образом, из (4.106) имеем  $F_i = \iint_S \rho V_i V_k n_k dS$ , или в векторной записи

$$F = \iint_S \rho V (V \cdot n) dS. \quad (4.107)$$

Пусть в стационарный поток жидкости  $\left[ \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right]$  при отсутствии массовых сил ( $f = 0$ ) помещено твердое тело с поверхностью  $S$  (рис. 4.24). Выберем в жидкости «контрольную» поверхность  $S_0$ , произвольную, фиксированную, но так, чтобы она полностью охватывала твердое тело. Применим к объему жидкости между поверхностью твердого тела  $S$  и «контрольной» поверхностью  $S_0$  теорему импульсов (4.106). Получим

$$\iint_S p_{ik}n_k dS + \iint_{S_0} p_{ik}n_k dS_0 - \iint_S \rho V_i V_k n_k dS - \iint_{S_0} \rho V_i V_k n_k dS_0 = 0.$$

Первый интеграл дает выражение для компоненты силы, действующей со стороны тела на рассматриваемый объем жидкости, взятый со знаком минус, он даст компоненту  $R_i$  силы, действующей со стороны жидкости на тело, т. е.

$$R_i = - \int_S p_{ik} n_k dS.$$

Третий интеграл равен нулю в силу отсутствия протекания жидкости через поверхность твердого тела ( $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_k n_k = 0$  на поверхности тела  $S$ ).

Следовательно,

$$R_i = \iint_{S_0} (p_{ik} - \rho V_i V_k) n_k dS_0. \quad (4.108)$$

Итак, чтобы определить силу, действующую на твердое тело в стационарном потоке жидкости, достаточно на некоторой поверхности  $S_0$ , которая может быть удобной для эксперимента, измерить напряжения поверхностных сил, скорость и плотность жидкости.

Особенно простую формулировку приобретает теорема импульсов, если можно пренебречь силами вязкости. В этом случае, как уже отмечалось,  $p_{ik} = -\rho \delta_{ik}$ , и выражение (4.108) приобретает вид  $R_i = - \iint_{S_0} (pn_i + \rho V_i V_k n_k) dS_0$ ,

или в векторной записи

$$\mathbf{R} = - \iint_{S_0} [p\mathbf{n} + \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})] dS_0. \quad (4.109)$$

Таким образом, в этом случае достаточно на контрольной поверхности произвести замеры давления и вектора скорости жидкости, чтобы получить силу, действующую на твердое тело. Этот прием часто используется в аэродинамических экспериментах.

В следующем примере мы покажем, как с помощью теоремы импульсов (4.109) можно получить фундаментальную теорему гидроаэромеханики—теорему о подъемной силе плоского контура, полученную Н. Е. Жуковским.

**Пример 4. Теорема Н. Е. Жуковского.** Предварительно рассмотрим один из случаев интегрирования уравнений движения жидкости (4.97).

Пусть всюду в жидкости, движущейся баротропно (плотность является функцией только давления  $\rho = \rho(p)$ ), выполнено условие  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ , а массовые силы  $\mathbf{f}$  имеют потенциал ( $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$ ). При этих условиях уравнения (4.97) интегрируются.

Действительно, из формулы (5) (4.59) при  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  имеем

$$\text{grad } V^2 = 2(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + 2\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}.$$

Следовательно, уравнение движения (4.97) может быть записано в форме (форма Громеки):  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - (\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}) + \text{grad} \left[ \frac{V^2}{2} \right] = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho}$ .

Поскольку  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ , то  $\mathbf{V} = \nabla\phi$ , а вследствие баротропности  $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \times \int \frac{dp}{\rho(p)}$ . Следовательно, уравнение движения может быть записано в виде  $\nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \right] = 0$ . Отсюда видно, что оно имеет интеграл  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \psi(t)$ , где  $\psi(t)$  — некоторая функция времени, определяемая из начальных условий. Этот интеграл называется в гидромеханике интег-

ралом Лагранжа. Отсюда в случае стационарного движения несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) при отсутствии массовых сил получим

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = C, \quad (4.110)$$

где  $C$  — постоянная.

Перейдем теперь к рассмотрению теоремы Н. Е. Жуковского.

Рассмотрим плоское (зависящее только от координат  $x_1$  и  $x_2$ ) стационарное течение несжимаемой жидкости, обтекающей плоский контур  $L$  (рис. 4.25). Пусть скорость жидкости вдали от контура постоянна и равна  $V_\infty$ , а всюду в жидкости  $\text{rot } V = 0$ , т. е. течение жидкости безвихревое. Пусть, наконец, массовые силы отсутствуют ( $f = 0$ ).

Применим теорему импульсов в форме (4.109) к объему жидкости, заключенному в цилиндре с высотой, равной единице, и с доньшками в виде части

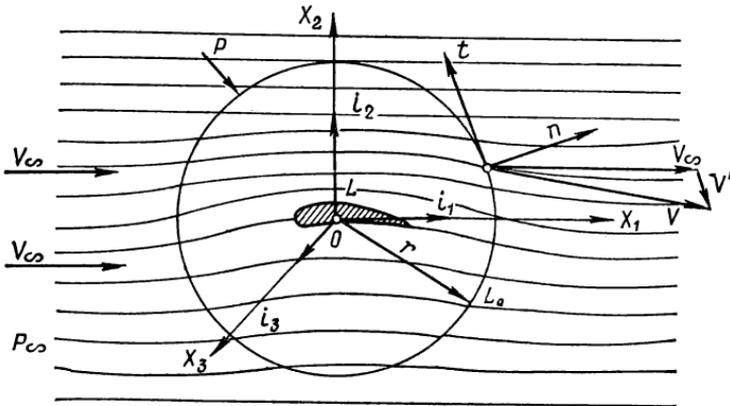


Рис. 4.25. К теореме Н. Е. Жуковского о силе, действующей на твердый контур в стационарном потоке идеальной жидкости.

плоскостей между контурами  $L$  и  $L_0$ , где  $L_0$  — окружность \* некоторого радиуса  $r$ . Тогда получим силу, действующую на единицу длины бесконечного цилиндра с направляющей  $L$  в виде \*\*  $R = - \oint_{L_0} p n dL_0 - \oint_{L_0} \rho V (V \cdot n) dL_0$ .

В это выражение подставим  $p$  из (4.110). Так как  $C$  и  $\rho$  постоянные, то получим

$$R = \frac{\rho}{2} \oint_{L_0} V^2 n dL_0 - \rho \oint_{L_0} V (V \cdot n) dL_0. \quad (*)$$

Представим вектор  $V$  на контуре  $L_0$  в виде (см. рис. 4.25)  $V = V_\infty + V'$ . Здесь  $V'$  — скорость возмущения, которая создается в плоскопараллельном потоке жидкости твердым контуром  $L_0$ . Будем предполагать, что эта скорость убывает с расстоянием  $r$  от начала координат, где помещен контур, как  $\frac{1}{r}$ .

\* Выбор  $L_0$  в виде окружности удобен только с точки зрения сокращения некоторых дальнейших рассуждений.

\*\* Интегралы по доньшкам цилиндра пропадают, ибо на них  $V \cdot n = 0$  ( $V \perp n$ ), а  $\iint p n dS$  на доньшках имеет разный знак и одинаковую величину

Подставим разложение  $V$  на  $V_\infty$  и  $V'$  в (\*). Получим

$$R = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \oint_{L_0} \mathbf{n} dL_0 + \rho \oint_{L_0} (V_\infty \cdot V') \mathbf{n} dL_0 + \frac{\rho}{2} \oint_{L_0} V'^2 \mathbf{n} dL_0 - \\ - \rho V_\infty \oint_{L_0} (V' \cdot \mathbf{n}) dL_0 - \rho \oint_{L_0} V' (V_\infty \cdot \mathbf{n}) dL_0 - \rho \oint_{L_0} V' (V' \cdot \mathbf{n}) dL_0.$$

Первый интеграл, как известно из курса анализа, равен нулю. Четвертый интеграл равен нулю в силу условия несжимаемости жидкости, ибо он представляет поток жидкости через замкнутый контур. Третий и шестой интегралы имеют порядок  $\frac{1}{r}$ ; их сумму мы обозначим через  $O\left(\frac{1}{r}\right)$ . Тогда

$$R = \rho \oint_{L_0} [(V_\infty \cdot V') \mathbf{n} - V' (V_\infty \cdot \mathbf{n})] dL_0 + O\left[\frac{1}{r}\right].$$

В силу формулы для двойного векторного произведения (1.19) получим  $R = \rho \oint_{L_0} V_\infty \times (\mathbf{n} \times V') dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right)$ . Поскольку  $\oint_{L_0} V_\infty \times (\mathbf{n} \times V_\infty) dL_0 = V_\infty \times \left(\oint_{L_0} \mathbf{n} dL_0 \times V_\infty\right) = 0$ , то  $R = \rho \oint_{L_0} V_\infty \times (\mathbf{n} \times V) dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right) = \rho V_\infty \times \oint_{L_0} (\mathbf{n} \times V) dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right)$ .

Введем орт  $i_3$  по оси  $x_3$  и орт  $t$  по касательной к контуру  $L_0$  (рис. 4.25). Тогда (см. 1.12)  $\mathbf{n} = t \times i_3$ ,  $\mathbf{n} \times V = (t \times i_3) \times V = i_3(t \cdot V) - t(i_3 \cdot V) = i_3(V \cdot t)$ . Обозначая  $dL_0 = t dL_0$ , получим  $R = \rho V_\infty \times i_3 \oint_{L_0} V \cdot dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right)$ .

Введем вектор  $\Gamma = i_3 \oint_{L_0} V \cdot dL_0$ ; его величина равна циркуляции скорости по контуру  $L_0$ , а направлен он перпендикулярно к плоскости контура. Тогда

$$R = \rho V_\infty \times \Gamma + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (**)$$

Поскольку движение безвихревое, то циркуляция по контуру  $L_0$  равна циркуляции по любому другому контуру, охватывающему контур  $L$ .

Следовательно, первое слагаемое в (\*\*), не зависит от величины радиуса  $R$  окружности  $L_0$ .

Теперь будем удалять контур  $L_0$  от начала координат на бесконечность. Теорема импульсов остается справедливой, ибо часть интегралов ( $R$  и  $\rho V_\infty \times \Gamma$ ) остается конечной, а часть  $O\left(\frac{1}{r}\right)$  идет к нулю. Таким образом, при  $r \rightarrow \infty$  имеем  $R = \rho V_\infty \times \Gamma$ ;  $\Gamma = i_3 \oint_L V \cdot dL$ .

Эта формула и выражает знаменитую теорему Н. Е. Жуковского о подъемной силе плоского контура. По величине эта сила равна  $\rho V_\infty \Gamma$  и направлена всегда перпендикулярно к вектору  $V_\infty$ .

## 4.9. Потенциальное векторное поле. Скалярный потенциал

Векторное поле называется *потенциальным*, если его вектор  $\mathbf{A}$  является градиентом некоторой скалярной функции  $\varphi$ , т. е.

$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi. \quad (4.111)$$

Величина  $\varphi$  называется *потенциалом* поля  $\mathbf{A}$ . Потенциал векторного поля определяется с точностью до аддитивной постоянной, что следует из (4.111).

Потенциальный вектор  $\mathbf{A}$  в системе прямоугольных декартовых координат имеет проекции:  $A_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ ;  $A_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ ;  $A_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ .

Потенциальное поле является одним из наиболее простых векторных полей, ибо оно полностью определяется одним скаляром — потенциалом.

Отметим основное свойство потенциального поля.

Если потенциал  $\varphi$  поля  $\mathbf{A}$  есть однозначная функция, то значение криволинейного интеграла  $\int_{M_0}^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  не зависит от пути интегрирования, а лишь от конечных точек пути  $M_0$  и  $M$  (рис. 4.26).

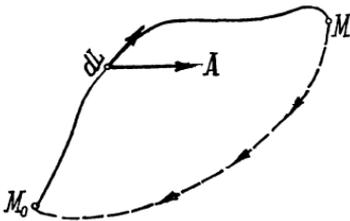


Рис. 4.26. Основное свойство потенциального векторного поля.

Криволинейный интеграл от потенциального вектора в односвязной области не зависит от пути интегрирования и для замкнутого пути интегрирования равен нулю.

Действительно, если  $\mathbf{A} = \nabla \varphi$ , то

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} &= \int_{M_0}^M \nabla \varphi \cdot d\mathbf{L} = \\ &= \int_{M_0}^M \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 \right) = \\ &= \int_{M_0}^M d\varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в случае однозначного потенциала интеграл от потенциального вектора по замкнутому пути равен нулю, т. е.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \oint \nabla \varphi \cdot d\mathbf{L} = \varphi(M_0) - \varphi(M_0) = 0.$$

Этот факт имеет большое значение в теории потенциальных полей и зачастую принимается за определение потенциального поля.

Выделение класса потенциальных полей очень важно. Если силовое поле имеет однозначный потенциал, то вычисление работы сил поля сводится просто к определению разности потенциалов в начальной и конечной точках пути. Потенциальность скоростного поля жидкости значительно упрощает задачи гидроаэромеханики, позволяет при изучении плоских потоков использовать

такой хорошо разработанный математический аппарат, как теория функций комплексного переменного, преобразование годографа, метод характеристик и др. В связи с этим важно определить критерий потенциальности поля.

*Необходимым и достаточным условием того, чтобы в односвязной области векторное поле  $\mathbf{A}$  было потенциальным, является выполнение равенства  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ .*

*Необходимость* этого условия устанавливается просто. Пусть  $\mathbf{A} = \nabla \varphi$ . Тогда стоит только предположить, что потенциал поля  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  имеет непрерывные первые и вторые частные производные, т. е. что вихрь  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  существует и равенство  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \nabla \varphi = 0$  проверяется непосредственным вычислением.

*Итак, всякое потенциальное поле является полем безвихревым, независимо от связности области.*

*Достаточность* условия может быть установлена только для односвязной области. Действительно, если область поля односвязна, то любой замкнутый контур в этом поле ограничивает некоторую поверхность, лежащую целиком в этом поле. Иначе говоря, какой бы замкнутый контур мы ни взяли в таком векторном поле, всегда на этот контур можно «натянуть» поверхность, которая будет целиком оставаться в нашей области поля. Но тогда для произвольного замкнутого контура  $L$  и ограниченной им поверхности  $S$  применима формула Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dS.$$

В силу условия  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$  для любого замкнутого контура  $L$  поля имеем равенство нулю циркуляции:  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = 0$ . Отсюда

следует, что криволинейный интеграл  $\int_{M_0}^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  не зависит от пути интегрирования и при фиксированной точке  $M_0$  определяется только положением точки  $M$ , т. е. является функцией ее координат. Это может быть тогда и только тогда\*, если выражение  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  является полным дифференциалом некоторой функции, т. е.  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = d\varphi$ , или  $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \times$

$$\times dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3. \text{ Отсюда } A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ (} i = 1, 2, 3 \text{), т. е. } \mathbf{A} = \nabla \varphi. \text{ При}$$

$$\text{этом } \varphi(x_1, x_2, x_3) = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} d\varphi = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} A_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 + A_2(\xi_1,$$

$$\xi_2, \xi_3) d\xi_2 + A_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}.$$

\* См., например, Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа, § 124—125. М., ГИТЛ, 1953.

Эта формула дает способ построения однозначного потенциала в односвязной области безвихревого вектора  $\mathbf{A}$ .

Итак, *всякое безвихревое поле является потенциальным только в односвязной области.*

Теперь рассмотрим случай, когда область, где выполнены условия теоремы Стокса, не односвязна. В соответствии с самим определением неодносвязной области, в ней существуют замкнутые контуры, которые не ограничивают никакой поверхности, т. е. на такие контуры нельзя «натянуть» поверхность, целиком лежащую в области. Следовательно, здесь уже нельзя построить однозначную функцию потенциала в каждой точке. Поэтому в этом случае иногда говорят о *многозначном* потенциале поля.

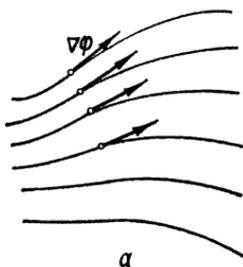
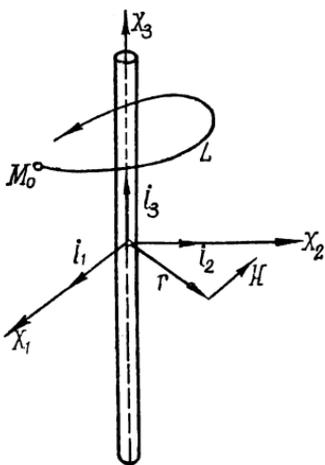


Рис. 4.27. Пример неоднозначного потенциала.

Потенциал вектора магнитного поля бесконечного проводника является неоднозначной функцией.

Рис. 4.28. Векторные линии поля с однозначным (а) и неоднозначным (б) потенциалом.

Векторные линии поля с неоднозначным потенциалом могут быть замкнутыми.

Рассмотрим пример многозначного потенциала. Напряженность магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника, расположенного по оси  $(x_3)$ , имеет выражение  $\mathbf{H} = \frac{2I}{r^2} (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{r})$ , где  $I$  — сила тока;  $\mathbf{r} = i_1 x_1 + i_2 x_2$ ;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Имеем:  $H_1 = -2I \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $H_2 = 2I \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $H_3 = 0$ .

Вектор  $\mathbf{H}$  (рис. 4.27) определен всюду, кроме оси  $(x_3)$ , где  $r = 0$ . Поэтому векторное поле занимает двухсвязную область (все пространство с вырезанной осью  $x_3$ ).

Можно проверить, что всюду в поле  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ; на оси  $(x_3)$   $\text{rot } \mathbf{H}$ , как и  $\mathbf{H}$ , не определен.

Потенциал этого поля  $\varphi = 2I \text{arctg} \frac{x_2}{x_1}$  ( $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = H_1$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = H_2$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = H_3$ ) является многозначной функцией.

Если вычислить криволинейный интеграл  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$  по контуру  $L$ , охватывающему ось  $(x_3)$ , то изменение потенциала будет определяться изменением угла (полярного)  $\text{arctg} \frac{x_2}{x_1}$ . Поэтому, выйдя из некоторой точки  $M_0$ , мы после интегрирования, обойдя вокруг оси  $(x_3)$ , придем в эту точку не с начальным

значением потенциала, а со значением на  $2l \cdot 2\pi$  большим. Таким образом, несмотря на то, что всюду в поле  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ , существуют такие контуры, по которым циркуляция  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \neq 0$ .

Многозначность потенциала отражается на векторных линиях поля (рис. 4.28). Если потенциал однозначен, то векторные линии его градиента не могут быть замкнутыми, ибо тогда по таким линиям  $\int \nabla\varphi \times d\mathbf{L} \neq 0$ . У многозначного потенциала возможны замкнутые векторные линии его градиента.

Можно избавиться от многозначности потенциала путем введения дополнительных границ области, преобразуя этим ее в односвязную область. Дополнительные границы должны исключать те контуры, которые нельзя стянуть в точку (рис. 4.5). Тогда многосвязная область будет односвязной, в которой равенство  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$  влечет за собой потенциальность вектора  $\mathbf{A}$ , т. е.  $\mathbf{A} = \nabla\varphi$ , с однозначным потенциалом  $\varphi$ .

## 4.10. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал

Векторное поле называется соленоидальным, если его вектор  $\mathbf{A}$  является вихрем некоторого другого вектора, т. е.  $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ . Вектор  $\mathbf{W}$  называется векторным потенциалом поля  $\mathbf{A}$ . Соленоидальный вектор в системе прямоугольных декартовых координат имеет проекции:  $A_1 = \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}$ ;  $A_2 = \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}$ ;  $A_3 = \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$ .

Векторный потенциал поля определяется с точностью до градиента произвольной функции, т. е. если  $\mathbf{W}$  — векторный потенциал поля  $\mathbf{A}$ , то  $\mathbf{W}' = \mathbf{W} + \operatorname{grad} f$  — тоже векторный потенциал того же поля, ибо  $\operatorname{rot} \mathbf{W}' = \operatorname{rot} \mathbf{W} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ .

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является равенство нулю его дивергенции, т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

Необходимость этого условия проверяется непосредственным вычислением. Действительно, если  $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{W} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \right) = 0$ .

Что касается достаточности этого условия, то для случая поля, занимающего неограниченное пространство, она будет установлена позже (см. 4.12). При этом надо потребовать существования  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  и убывания  $|\operatorname{rot} \mathbf{A}|$  на бесконечности как

$$\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}, \text{ где } \varepsilon > 0 \text{ и } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Тогда можно построить однозначно векторный потенциал  $\mathbf{W}$  поля  $\mathbf{A}$  так, что  $\operatorname{rot} \mathbf{W} = \mathbf{A}$ . Если поле  $\mathbf{A}$  занимает ограниченное пространство, для отыскания векторного потенциала этого

поля при условии  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  всюду надо потребовать дополнительных условий относительно производных  $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$  на границе поля.

Можно показать непосредственным интегрированием системы

$$A_1 = \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}; \quad (*) \quad A_2 = \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}; \quad (**) \quad A_3 = \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \quad (***)$$

при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0 \quad (****)$$

возможность построения векторного потенциала  $W$  поля  $\mathbf{A}$ .

Будем искать  $W_1$  в виде функции от  $x_1$ , т. е.  $W_1 = f(x_1)$ . Тогда из (\*\*\*) имеем  $W_3 = -\int A_2 dx_1 + \varphi(x_2, x_3)$ , а из (\*\*\*)  $W_2 = \int A_3 dx_1 + \psi(x_2, x_3)$ .

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные функции от  $x_2$  и  $x_3$ , которые должны быть подчинены условию, вытекающему из уравнения (\*). Подставляя в это уравнение найденные выражения для  $W_3$  и  $W_2$ , получим

$$A_1 = -\int \frac{\partial A_2}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \int \frac{\partial A_3}{\partial x_3} dx_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Учитывая (\*\*\*\*), имеем  $A_1 = \int \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$ . Следовательно,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0$ .

Таким образом,  $f(x_1)$ ,  $\varphi(x_1, x_2)$ ,  $\psi(x_2, x_3)$  произвольные, непрерывно дифференцируемые функции (поле  $\mathbf{A}$  непрерывно). Условие, накладываемое на  $\varphi$  и  $\psi$ , является следствием того, что решение системы (\*), (\*\*), (\*\*\*) определяется с точностью до градиента произвольной функции.

**Пример соленоидального поля.** В плоской задаче гидромеханики несжимаемой жидкости ( $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ ) векторным потенциалом поля скоростей служит вектор, равный по величине функции тока.

Функция тока  $\psi(x_1, x_2)$  определяется как функция, которая вдоль векторных линий поля  $\mathbf{V}$  — вдоль линий тока — сохраняет постоянное значение. Уравнение семейства линий тока, следовательно, может быть записано так:  $\psi(x_1, x_2) = \text{const}$ . Дифференциальное уравнение линий тока в плоском случае (см. 4.15) имеет вид  $V_1 dx_2 - V_2 dx_1 = 0$ .

Для того чтобы левая часть этого уравнения была полным дифференциалом некоторой функции (функции тока), как известно, необходимо и достаточно,

$$\text{чтобы } \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_2}. \quad \text{Это обеспечивается уравнением непрерывности } \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, можно ввести функцию тока  $\psi(x_1, x_2)$  так, что

$$V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}; \quad V_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

В то же время можно записать  $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ , где  $\mathbf{W} = i_3 \psi$ , так что

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}.$$

Отметим, что в этом случае поле  $\mathbf{V}$  может быть записано в виде  $\mathbf{V} = \nabla \psi \times i_3$ , а поле вихря скорости  $\operatorname{rot} \mathbf{V} = -i_3 \Delta \psi$ .

Рассмотрим некоторые характерные свойства соленоидального поля.

1. *Интенсивность векторной трубки соленоидального поля есть величина постоянная вдоль всей трубки.*

Возьмем в поле  $\mathbf{A}$  некоторый замкнутый контур  $L$  (рис. 4.29) и проведем через его точки векторные линии поля. Образовавшаяся поверхность носит название векторной трубки. Интенсивностью векторной трубки называется поток поля через ее поперечное сечение (контур этого сечения пересекает все векторные линии трубки).

Выберем произвольно два поперечных сечения трубки —  $S_1$  и  $S_2$  — и применим теорему Остроградского к объему, ограниченному  $S_1$  и  $S_2$  и поверхностью  $\sigma$  трубки между  $S_1$  и  $S_2$ . Имеем

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau = \iint_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \, d\sigma + \iint_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \, dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \, dS_2.$$

Интеграл слева равен нулю, ибо  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ; первый интеграл справа тоже равен нулю, ибо на поверхности трубки  $\mathbf{A} \perp \mathbf{n}$ , так что  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_{\sigma} = 0$ . Переносим интеграл по  $S_1$  влево и меняя в этом интеграле направление  $\mathbf{n}$  на противоположное (тогда поток через  $S_1$  и  $S_2$  будет вычислен в одном направлении), получим

$$\iint_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \, dS_1 = \iint_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \, dS_2,$$

что и требовалось доказать.

2. *В соленоидальном поле векторные трубки не могут ни кончатся, ни начинаться внутри поля; следовательно, они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).*

Этот факт следует из первого свойства трубок соленоидального поля. Действительно, если какая-либо трубка заканчивается в точке  $M$  (рис. 4.29), то в этой точке вектор должен принимать бесконечно большое значение, ибо интенсивность трубки постоянная, а ее поперечное сечение в точке  $M$  равно нулю. А этого быть не может, ибо  $\mathbf{A}$  непрерывен (по предположению) во всех точках поля.

Если предположить, что трубка заканчивается в поле конечным сечением  $S_0$ , то в точках этого сечения поле  $\mathbf{A}$  будет разрывным, что исключено.

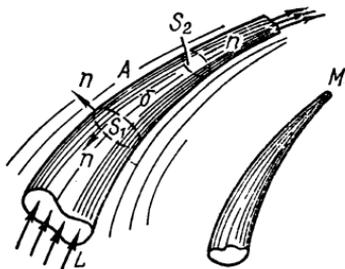


Рис. 4.29. Свойства векторных трубок соленоидального поля. Интенсивность векторной трубки соленоидального поля постоянна вдоль всей трубки, в силу чего эта трубка не может оканчиваться или начинаться в поле.

## 4.11. Лапласово векторное поле. Гармонические функции

Векторное поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  называется лапласовым, если в любой его точке выполняются равенства  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ ;  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным, и соленоидальным.

Лапласово поле в односвязной области полностью определяется скалярным потенциалом  $\varphi$ , который является решением уравнения Лапласа, т. е.  $\Delta\varphi = 0$ .

Это следует из того, что если  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ , то в односвязной области  $\mathbf{A} = \nabla\varphi$  и тогда  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi$ .

Изучение потенциала лапласова векторного поля основывается на свойствах гармонических функций.

**Гармонические функции.** Функция  $\varphi$ , непрерывная вместе с производными первого и второго порядка, удовлетворяющая уравнению Лапласа  $\Delta\varphi = 0$ , называется гармонической.

Примерами гармонических функций могут служить

$$\varphi = c, \quad \varphi = ax_1 + bx_2 + cx_3; \quad \varphi = x_1^2 - x_2^2; \quad \varphi = x_1x_2;$$

$$\varphi = x_1x_2x_3; \quad \varphi = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{k}{2}} \left\{ a \sin\left(k \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}\right) + b \cos\left(k \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}\right) \right\}.$$

Особый интерес представляет гармоническая функция  $\frac{1}{r}$ , где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \equiv \sqrt{x_i x_i}.$$

Действительно, для производных по  $x_i$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{x_i}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i^2 - r^2}{r^5}.$$

Поэтому

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \frac{1}{r} \right) =$$

$$= \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

Функция  $\frac{1}{r}$  — гармоническая всюду, кроме начала координат ( $r = 0$ ). Функция  $\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  также является гармонической всюду, кроме начала координат.

Остановимся на некоторых свойствах гармонических функций.

1. Интеграл по замкнутой поверхности  $S$  от нормальной производной гармонической функции равен нулю, если в области, ограниченной  $S$ , функция всюду гармоническая.

Это свойство следует из выражения (4.90). Если  $\psi$  — гармоническая функция ( $\Delta\psi = 0$ ), то из (4.90) имеем

$$\iint_S \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = 0. \quad (4.112)$$

2. Если  $\varphi$ ,  $\psi$  гармонические функции всюду в области  $\tau$ , то значения этих функций и их нормальных производных на границе  $S$  этой области связаны соотношением  $\iint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x} dS = \iint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$ .

Это свойство следует из выражения (4.88).

3. Функция, гармоническая внутри области  $\tau$ , может быть найдена в любой точке этой области по значениям этой функции и ее нормальной производной на границе области по формуле

$$4\pi\varphi(M_0) = - \iint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (4.113)$$

Эта формула следует из выражения (4.94), примененного к гармонической функции  $\varphi$ .

4. В применении к поверхности  $S_R$  сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $M_0$  формула (4.113) дает

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} \varphi dS, \quad (4.114)$$

ибо по первому свойству

$$\iint_{S_R} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \frac{1}{R} \iint_{S_R} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Формула (4.114) выражает теорему, утверждающую, что значение гармонической функции в некоторой точке  $M_0$  равно среднему значению этой функции на любой сфере  $S_R$  с центром в  $M_0$ , целиком расположенной в области гармоничности функции.

5. Гармоническая функция не может иметь ни максимума, ни минимума внутри области гармоничности.

Действительно, если в какой-либо внутренней точке  $M_0$  функция  $\varphi$  достигает максимума и если  $\varphi$  не является постоянной, то найдется такой луч, проведенный из  $M_0$ , в некоторой точке  $M_1$  которого будем иметь  $\varphi(M_1) < \varphi(M_0)$ . Пару точек  $M_0$  и  $M_1$  можно заменить аналогичной парой точек, лежащих на том же луче, и таких, что сфера с центром в  $M_0$ , проходящая через  $M_1$ , целиком лежит в рассматриваемой области. Но тогда на некоторой части ( $\sigma$ ) этой сферы по непрерывности будем иметь  $\varphi(M)|_\sigma < \varphi(M_0)$ .

Применяя формулу (4.114) к этой сфере, получим

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi(M_0M_1)^2} \iint_{S_{M_1M_0}} \varphi(M) dS.$$

Отсюда следует  $\varphi(M_0) < \max \varphi(M) = \varphi(M_0)$ , что абсурдно.

Аналогично можно показать, что  $\varphi$  не может достигать минимума на внутренних точках области гармоничности.

6. *Гармоническая функция, принимающая постоянные значения на границе некоторой конечной области, постоянна внутри всей области.*

Действительно, если на границе области  $\varphi = c$ , то, согласно предыдущему свойству, по всей области максимальное и минимальное значение  $\varphi$  равно  $c$ , ибо во внутренних точках функция  $\varphi$  не может принимать значений, ни больших, ни меньших  $c$ . Значит,  $\varphi$  постоянна во всей области и вследствие непрерывности  $\varphi = c$  всюду в этой области.

7. *Уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  имеет единственное решение в области, на границе которой  $\varphi$  принимает заданные значения.*

Допустим, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — две различные гармонические функции, принимающие одинаковые значения на границе области. Тогда функция  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  в силу линейности уравнения Лапласа тоже будет гармонической, принимающей на границе постоянное, равное нулю значение.

Тогда по свойству (6) функция  $\varphi$  постоянна, а в силу непрерывности равна нулю всюду внутри области. Значит,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , т. е. гармоническая функция полностью определяется ее значениями на границе области.

**Задачи Дирихле и Неймана.** Последнее свойство гармонических функций позволяет говорить о единственном решении задачи об определении гармонической в области функции по заданным ее значениям на границе области. Эта задача носит название задачи Дирихле. Она заключается в отыскании в области  $\tau$  решения уравнения  $\Delta\varphi = 0$  при граничном условии  $\varphi|_S = f(x_1, x_2, x_3)$ , где  $S$  — граница области.

Если в формуле Грина (4.87) при  $\varphi = \psi$  считать, что  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$  на границе  $S$  области  $\tau$ , то получим, что гармоническая функция  $\varphi$  будет произвольной постоянной внутри области.

Отсюда следует, что две гармонические функции, имеющие на границе односвязной области одинаковые нормальные производные  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0\right)$ , отличаются на постоянную величину.

Таким образом, нормальная производная гармонической функции на границе односвязной области определяет (с точностью до произвольного постоянного слагаемого) значения этой функции во всех внутренних точках области.

Следовательно, можно говорить о единственности решения задачи определения гармонической в односвязной области функции

по заданным значениям ее нормальной производной на границе области. Эта задача называется задачей Неймана. Она заключается в отыскании решения уравнения  $\Delta\varphi = 0$  при граничном условии  $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = F(x_1, x_2, x_3)$ .

Если же область гармонической функции многосвязна, то надо знать не только  $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S$  на границе области, но и значение циркуляции градиента поля  $\int \nabla\varphi \cdot dL$  по тем контурам, которые не могут быть стянуты в точку. Если все эти контуры имеют циркуляцию, равную нулю, то в решении задачи Неймана никаких новых затруднений не возникает. Если заданы отличные от нуля значения циркуляции по этим контурам, то потенциал этого поля будет многозначным, увеличивающим свое значение на постоянную (циклическую) при каждом обходе по контуру. Но тем не менее задача будет иметь единственное решение.

Действительно, пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  — два потенциала, удовлетворяющие уравнению Лапласа с заданными на границе нормальными производными. Но тогда  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  — *однозначная* удовлетворяющая уравнению Лапласа и имеющая на границе области нормальную производную, равную нулю. Поскольку эта функция однозначна, то из формулы Грина (4.89) следует, что  $\varphi$  постоянна всюду и, следовательно,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отличаются на постоянную.

Имея в виду, что гармоническая функция является потенциалом лапласового векторного поля, мы теперь можем утверждать следующее.

*Лапласово векторное поле полностью определяется в каждой точке односвязной области значением его скалярного потенциала либо значением нормальной производной потенциала, заданных на границе этой области; в случае многосвязной области дополнительно к нормальной производной на границе области необходимо задать значение циркуляции градиента поля по тем контурам, которые не могут быть стянуты в точку, не выходя за поле.*

Рассмотрим несколько гидродинамических примеров, связанных с теорией гармонических функций.

**Пример 1.** Задачи Неймана и Дирихле — это основные задачи безвихревых стационарных потоков несжимаемой идеальной жидкости.

Если  $\rho = \text{const}$ ,  $\text{rot } V = 0$ , то, как известно из гидромеханики, уравнения движения допускают интеграл Лагранжа для стационарного случая (см. также 4.8, пример 4)  $\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}$  (здесь  $p, \rho, V$  — соответственно давление, плотность и скорость жидкости).

Уравнение неразрывности имеет вид  $\text{div } V = 0$ . В силу  $\text{rot } V = 0$  имеем  $V = \nabla\varphi$ .

Потенциал скорости  $\varphi$  является гармонической функцией в соответствии с уравнением неразрывности  $\text{div } V = \text{div } \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$ .

На твердых контурах нормальная составляющая скорости обращается в нуль. Отсюда граничное условие для  $\varphi$ :  $V_n = V \cdot n = n \cdot \nabla\varphi = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = 0$  — на твердых контурах. Так как  $\text{div } V = 0$ , то  $V$  в плоском случае имеет векторный

потенциал вида  $W = i_3\psi$ , где  $\psi$  — функция тока (см. с. 178), так что  $V_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$ ;  $V_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$ . Из условия  $\operatorname{rot} V = 0$  получим  $\Delta\psi = 0$ .

Так как твердые контуры являются линиями тока,  $\psi$  принимает на них постоянное значение, т. е.  $\psi = c$  на твердых контурах (рис. 4.30).

Итак, для  $\varphi$  имеем задачу Неймана, а для  $\psi$  — задачу Дирихле.

В гидромеханике для решения задач Неймана и Дирихле широко используется метод конформных отображений.

В плоских задачах гидромеханики задаются твердые контуры (один или несколько) в безграничной области потока. На бесконечности поток является однородным, так что  $\nabla\varphi|_{\infty} = V_{\infty}$ . На твердых контурах  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ .

Каждый твердый замкнутый контур в плоском потоке увеличивает связность области течения жидкости на единицу. Поэтому для определенности за-

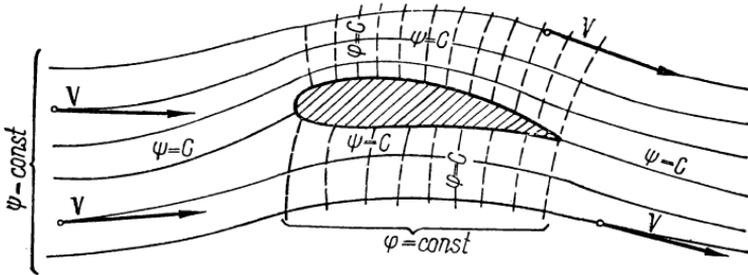


Рис. 4.30. Линии тока и линии равного потенциала у твердого контура. На неподвижном контуре, обтекаемом жидкостью, нормальная компонента скорости  $V_n = 0$ , и поэтому сам контур является линией тока.

дачи Неймана необходимо задавать значение циркуляции скорости  $V = \nabla\varphi$  вокруг каждого из твердых контуров; значение этой циркуляции выбирается согласно известному постулату Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина так, чтобы острые кромки профилей были линиями раздела струй.

**Пример 2.** Пусть  $\varphi$  — потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости, т. е.  $V = \nabla\varphi$ ,  $\operatorname{div} V = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\operatorname{rot} V = 0$ . Тогда из свойств гармонических функций следует:

1. Интенсивность трубок тока (векторных трубок) постоянна по их длине; сами трубки не могут ни начинаться, ни кончаться в потоке (см. 4.10).

2. В односвязной области, полностью ограниченной твердыми стенками (на них  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ ), не может возникнуть непрерывное безвихревое течение.

3. Кинетическая энергия некоторого объема жидкости  $\tau$ , ограниченного поверхностью  $S$ , может быть вычислена (см. задачу 17, гл. 4)  $T = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$ .

Это следует из (4.89) и определения  $T = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} V^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} (\nabla\varphi)^2 d\tau$ .

## 4.12. Основная теорема векторного анализа

В векторном анализе большое значение имеет теорема Стокса, особенно часто применяемая в аэромеханике и электродинамике, о расщеплении векторного поля  $A$  на два: потенциальное  $A_1$  и

соленоидальное  $A_2$ . Речь идет о полях, определенным образом исчезающих на бесконечности, — именно  $|A|$  обращается на бесконечности в нуль как  $\frac{1}{r^{1+\epsilon}}$ , а  $|\operatorname{div} A|$  и  $|\operatorname{rot} A|$  — как  $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$ , где  $\epsilon > 0$ . Как будет видно из доказательства, это предположение необходимо для сходимости интегралов, дающих выражение  $A_1$  и  $A_2$  через  $A$ .

**Теорема.** Любое непрерывное векторное поле  $A(r)$ , заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе с дивергенцией и вихрем, может быть единственным образом (точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального  $A_1(r)$  и соленоидального  $A_2(r)$  полей, т. е.

$$A = A_1(r) + A_2(r),$$

где

$$\operatorname{rot} A_1 = 0; \operatorname{div} A_2 = 0. \quad (4.115)$$

Сделаем предварительно два замечания, а затем перейдем к доказательству теоремы.

1. Поскольку

$$\operatorname{div} A = \operatorname{div} A_1 \text{ и } \operatorname{rot} A = \operatorname{rot} A_2, \quad (4.116)$$

то при разложении поля (4.115) получается, что все источники и стоки включаются в первую часть разложения  $A_1$ , а все вихри — во вторую часть  $A_2$ . Таким образом, конструктивный результат теоремы (выражение  $A_1$  и  $A_2$  через  $\operatorname{div} A$  и  $\operatorname{rot} A$ ) позволяет решить задачу определения поля  $A$  по заданному распределению его дивергенции  $\operatorname{div} A = \Theta(r)$  и вихря  $\operatorname{rot} A = \Omega(r)$ .

2. Мы называем поле  $A_1$  потенциальным, а поле  $A_2$  — соленоидальным, хотя нам известно только, что  $\operatorname{rot} A_1 = 0$  и  $\operatorname{div} A_2 = 0$ . В процессе доказательства будет ясно, что вектор  $A_1$  всегда можно считать потенциальным, ибо если область определения этого вектора окажется многосвязной, то всегда можно провести дополнительные ее границы, уничтожающие многосвязность; для вектора  $A_2$  будет построен векторный потенциал, так что  $A_2$  — действительно соленоидальное поле.

*Доказательство.* Для доказательства мы построим поле  $A_1$  и  $A_2$  по заданному полю  $A$ , а затем покажем, что такое определение однозначно (с точностью до постоянного вектора).

*Построение  $A_1$ .* Для нахождения  $A_1$  из (4.115) и (4.116) имеем уравнения:

$$\operatorname{rot} A_1 = 0; \operatorname{div} A_1 = \operatorname{div} A. \quad (4.117)$$

Из первого уравнения следует, что  $A_1 = \nabla\phi + C_1$ , где  $C_1$  — постоянный вектор, а  $\phi$  — однозначный потенциал (если область определения  $A_1$  многосвязна, считаем, что проведены дополнительные границы, превращающие эту область в односвязную). Тогда второе уравнение (4.117) дает  $\operatorname{div}(\nabla\phi \times C_1) = \operatorname{div} A$ , или  $\Delta\phi = \operatorname{div} A$ . Постоянная  $C$  для определения потенциала  $\phi$  роли не играет.

Из этого уравнения (уравнение Пуассона) с известной правой частью можно выразить  $\varphi$ , используя следствие (4.94) из теоремы Грина. Применяя формулу (4.94) к неограниченному объему  $\tau$ , где отыскивается функция  $\varphi$ , мы получим, что поверхностный интеграл  $\iint_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$  обращается в нуль, если считать, что  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  стремятся к нулю на бесконечности, причем  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  стремится к нулю быстрее, чем  $\frac{1}{r}$ .

Тогда, поскольку значение  $\Delta \varphi$  во всех точках пространства нам задано, значение  $\varphi$  может быть представлено формулой

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau, \quad (4.118)$$

где  $r$  — расстояние от точки  $(x_1, x_2, x_3)$ , в которой вычисляется значение  $\varphi$ , до произвольной точки  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  области интегрирования, в которой вычисляется  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  и располагается элементарный объем  $d\tau$ . Интегрирование располагается на всю область определения  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ .

Тогда

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \varphi + \mathbf{C}_1 = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau + \mathbf{C}_1. \quad (4.119)$$

Проекции этого вектора вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} & A_{1x_i}(x_1, x_2, x_3) = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} + C_{1x_i}. \end{aligned}$$

*Построение  $\mathbf{A}_2$ .* Вектор  $\mathbf{A}_2$ , как следует из (4.115) и (4.116), определяется системой уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_2 = 0. \quad (4.120)$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$\mathbf{A}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{W} + \mathbf{C}_2, \quad (4.121)$$

причем векторный потенциал  $\mathbf{W}$  подчиним дополнительному условию

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0. \quad (4.122)$$

Такое ограничение, наложенное на векторный потенциал, несущественно, ибо он определен с точностью до градиента произвольной функции. Поэтому если считать, что  $\operatorname{div} \mathbf{W} = \delta \neq 0$ , то можно рассматривать вместо  $\mathbf{W}$  вектор  $\mathbf{W}' = \mathbf{W} + \nabla \varphi$ , который также будет векторным потенциалом поля  $\mathbf{A}_2$  (ибо  $\operatorname{rot} \mathbf{W}' = \operatorname{rot} \mathbf{W}$ ) при произвольной функции  $\varphi$ . Но теперь всегда можно

подобрать функцию  $f$  так, чтобы  $\operatorname{div} \mathbf{W}' = 0$ . Для этого достаточно  $f$  определить из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{W}' = \operatorname{div} \mathbf{W} + \operatorname{div} \nabla f = 0, \text{ или } -\delta = \Delta f.$$

Итак, мы можем всегда считать, что векторный потенциал соленоидального поля также есть соленоидальный вектор. Но тогда этот вектор определяется из уравнения, полученного подстановкой (4.121) в первое из уравнений (4.120):

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{W} + \mathbf{C}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \text{ или } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Используя выражение для  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W}$  (см. 4.59) и учитывая (4.122), получим  $-\Delta \mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ .

Выражение  $\mathbf{W}$  через  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  может быть получено с помощью формулы (4.94 а) точно так же, как частное решение уравнения Пуассона (4.118) — с помощью формулы (4.94).

Постоянная  $\mathbf{C}_2$  не играет никакой роли при определении  $\mathbf{W}$ . Итак, имеем

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau. \quad (4.123)$$

Тогда

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau + \mathbf{C}_2. \quad (4.124)$$

Отсюда, например, проекция этого вектора на ось  $(x_1)$  равна

$$\begin{aligned} & A_{2x_1}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \iiint \frac{\operatorname{rot}_{x_3} \mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x_3} \iiint \frac{\operatorname{rot}_{x_2} \mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right] + C_{2x_1}. \end{aligned}$$

Интегрирование распространяется здесь на всю область определения  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ .

Таким образом, окончательное выражение для разложения векторного поля  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{i} d\tau + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau. \quad (4.125)$$

Постоянные  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$  здесь отброшены, ибо поле  $\mathbf{A}$  по условию должно исчезать на бесконечности. Формула (4.125) дает выражение для восстановления поля по его вихрям и дивергенции. т. е. когда известны только функции  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \Theta(\mathbf{r})$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \Omega(\mathbf{r})$  и требуется определить поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

*Однозначность разложения поля.* Пусть наряду с разложением

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2; \quad \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_2 = 0$$

существует другое разложение:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2; \quad \operatorname{rot} \mathbf{A}'_1 = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{A}'_2 = 0$ .

Тогда, поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}_1 = \operatorname{div} \mathbf{A}'_1$ , то  $\operatorname{div} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}'_1) = 0$ .

Следовательно, вектор  $A_1 - A_1'$  образует лапласово поле, ибо  $\text{rot}(A_1 - A_1') = 0$ ,  $\text{div}(A_1 - A_1') = 0$ .

Аналогично вектор  $A_2 - A_2'$  также образует лапласово поле, так как  $\text{rot}(A_2 - A_2') = 0$ ,  $\text{div}(A_2 - A_2') = 0$ .

Согласно (4.119) и (4.124), эти векторы могут быть только постоянными, т. е.

$$A_1 - A_1' = \text{const}, \quad A_2 - A_2' = \text{const}.$$

Итак, наше разложение действительно однозначно с точностью до произвольной постоянной.

**Замечание по поводу однозначности в случае конечной области.** Можно показать, что непрерывное векторное поле в конечном объеме однозначно определяется дивергенцией и вихрем во внутренних точках и нормальной компонентой на границе области.

Действительно, пусть существует решение системы  $\text{div } A = \Theta(r)$ ,  $\text{rot } A = \Omega(r)$  при граничном условии  $A \cdot n/s = f(r)$ , где  $\Theta$ ,  $\Omega$  определены для всех точек области, а  $f$  — для точек границы. Функции  $\Theta$  и  $f$ , естественно, должны быть подчинены условию, следующему из теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\iiint \Theta \, d\tau = \iint_S f \, dS. \quad \text{Такое решение единственно.}$$

Действительно, пусть  $A'$  — второе решение той же системы. Тогда  $\text{div}(A - A') = 0$ ;  $\text{rot}(A - A') = 0$ ;  $(A - A') \cdot n/s = 0$ . Вектор  $A - A'$  образует лапласово поле, т. е.  $A - A' = \nabla\varphi$ ,  $\Delta\varphi = 0$ , причем  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$  на границе поля. В силу свойств гармонических функций  $\varphi = \text{const}$  всюду. Следовательно,  $A = A'$ .

Для того чтобы разложение для бесконечной области, приведенной выше, было справедливо для конечной области, необходимо задать соответствующим образом граничные условия на поверхности  $S$ .

**Пример. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла.** Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления, играют в электродинамике такую же большую роль, как, например, уравнение Ньютона в механике. Величины, которые характеризуют электромагнитное поле, — это векторы напряженности электрического и магнитного полей  $E$  и  $H$ , каждый из них является функцией точки и времени, т. е.  $E = E(r, t)$  и  $H = H(r, t)$ . Электромагнитное поле создается зарядами и токами, распределение которых характеризуется скалярной функцией плотности распределения зарядов  $\rho = \rho(r, t)$  и векторной функцией плотности тока  $j = (r, t)$ .

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме. Независимо от распределения плотности зарядов  $\rho$  и тока  $j$  векторы напряженности электромагнитного поля  $E$  и  $H$  связаны соотношениями, интегральная форма которых имеет вид:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} H \cdot n \, dS = - \oint_L E \cdot dL, \quad (1)$$

$$\iint_{S_\tau} H \cdot n \, dS = 0. \quad (11)$$

Множитель  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек равен величине скорости света в вакууме.

Уравнение (1) утверждает, что изменение во времени потока магнитного поля  $\iint_{S_L} H \cdot n \, dS$  через поверхность  $S_L$ , опирающуюся на контур  $L$ , равно циркуляции электрического поля  $\oint_L E \cdot dL$  вдоль контура  $L$ . Этот интеграл

в физике часто называют «электродвижущей силой». Первое уравнение выражает известный закон электромагнитной индукции Фарадея.

Уравнение (II) показывает, что поток магнитного поля через замкнутую поверхность  $S_L$  произвольной формы всегда равен нулю. Оба уравнения справедливы независимо от конкретного вида  $L$  и  $S_L$ .

Применяя формулу Стокса (4.28) к интегралу правой части уравнения (I), можно написать  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_{S_L} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dS$ , или

$$\iint_{S_L} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \text{ В силу произвольности } S_L \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathbf{E} \text{ (I')}$$

Преобразуя интеграл по поверхности уравнения (II) в интеграл по объему по формуле Остроградского (4.20), найдем  $\iint_{S_\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_\tau \text{div } \mathbf{H} d\tau = 0$ ,

откуда в силу произвольности объема  $\tau$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (\text{II}')$$

Уравнения (I — II) и (I' — II') называются *однородной* парой уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Связь векторов напряжения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  с плотностью распределения зарядов  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  определяется *неоднородной* парой уравнений Максвелла, которые также следует рассматривать как опытный факт:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = c \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} - 4\pi \iint_{S_L} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (\text{III})$$

$$\iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \iiint_\tau \rho d\tau. \quad (\text{IV})$$

Уравнение (III) утверждает, что изменение во времени потока электрического поля через поверхность  $S_L$ , опирающуюся на  $L$ , равно циркуляции магнитного поля вдоль контура  $L$  (умноженной на  $c$ ) минус поток плотности тока  $\mathbf{j}$  (умноженный на  $4\pi$ ) через эту же поверхность  $S_L$ .

Уравнение IV показывает, что поток электрического поля через замкнутую поверхность  $S_\tau$ , ограничивающую объем  $\tau$ , равен заряду (умноженному на  $4\pi$ ), находящемуся внутри объема  $\tau$ . Оба эти уравнения (III) и (IV) справедливы при произвольных  $L$ ,  $S$  и  $\tau$ .

Так же, как и при рассмотрении однородной пары уравнений, применяя формулу Стокса, для уравнения (III) можно написать  $\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = c \iint_{S_L}$

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dS - 4\pi \iint_{S_L} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \text{ и в силу произвольности } S_L$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \text{rot } \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}. \quad (\text{III}')$$

Для уравнения (IV), применяя формулу Остроградского, получаем

$$\iint_{S_\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_\tau \text{div } \mathbf{E} d\tau = 4\pi \iiint_\tau \rho d\tau$$

и, так как объем  $\tau$  произволен,

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (\text{IV}')$$

Уравнения (III') и (IV') называют неоднородной парой уравнений Максвелла в дифференциальной форме; системы (I—IV) и (I'—IV') представляют собой систему уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Эта система уравнений описывает электромагнитное поле в вакууме. Если учитывать влияние среды, то войдут дополнительно еще два вектора: вектор, определяющий поляризуемость единицы объема среды (вектор поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ ), и вектор, характеризующий магнитные свойства среды, — вектор намагничивания  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ . Для различных классов сред зависимость этих векторов от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  подробно изучается в курсах электродинамики и теоретической физики.

В литературе, наряду с векторами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ , часто вводятся вектор смещения (электрической индукции)  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  и вектор магнитной индукции  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ . При этом уравнения Максвелла для среды приобретают вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (\text{I}'')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{II}'')$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}, \quad (\text{III}'')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad (\text{IV}'')$$

Приведенная система уравнений электромагнитного поля для среды не является замкнутой, так как в нее входят дополнительно два векторных поля  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  или  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Добавление конкретных уравнений, определяющих для данного класса сред зависимость  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  или  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  соответственно и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  от полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , дополняет рассматриваемую систему и образует исходную систему уравнений для исследования данного класса сред. Так, например, выражение для плотности тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  ( $\sigma$  — электропроводность) дает дополнительное уравнение — это так называемый закон Ома. Аналогично для среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  устанавливаются зависимости  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , которые дополняют систему (I''—IV'').

**Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.** Весьма важную роль в электродинамике играют вспомогательные функции — так называемые потенциалы: скалярный  $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$  и векторный  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Мы рассмотрим случай вакуума и введем потенциалы так, чтобы значения их удовлетворяли прежде всего однородной паре уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (\text{I}')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (\text{II}')$$

Так как дивергенция от ротора произвольного вектора равна нулю, то второму уравнению можно удовлетворить, если принять

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (4.126)$$

Теперь, подставляя (4.126) в первое уравнение, получим

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) = 0. \quad (4.127)$$

Так как ротор от градиента любой функции равен нулю, то уравнению (4.127) можно удовлетворить, положив  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$ , где  $\varphi$  — произвольная функция от  $\mathbf{r}$ ,  $t$  и, следовательно,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (4.128)$$

Заметим, что замена  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A} + \nabla \varphi$  и одновременно  $\varphi$  на  $\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  не изменяют векторов напряжения электромагнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Действительно,  $H = \text{rot } A = \text{rot } (A + \nabla f) = \text{rot } A + \text{rot grad } f = \text{rot } A$  и

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial (A + \nabla f)}{\partial t} - \nabla \left( \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя (4.126) и (4.128) в неоднородную пару уравнений Максвелла (III') и (IV'), получим уравнения, которым должны удовлетворять скалярный  $\varphi$  и векторный  $A$  потенциалы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = c \text{rot rot } A - 4\pi j, \quad (4.129)$$

$$\text{div} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = -4\pi \rho. \quad (4.130)$$

Не ограничивая общности, можно воспользоваться отмеченной выше формулой преобразования для потенциала введением произвольной функции  $f$  и наложить на  $\varphi$  и  $A$  дополнительное условие (условие Лоренца):

$$\text{div } A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.131)$$

Действительно, поскольку вектор  $A$  определен с точностью до градиента произвольной функции, то подчиняя его условию (4.131), можно написать

$$\text{div} (A + \nabla f) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (4.132)$$

и функция  $\nabla f$ , бывшая до сих пор произвольной, определится из уравнения (4.132):

$$\Delta f = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \text{div } A. \quad (4.133)$$

Используя выражение (4.59)  $\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A$  и соотношение (4.131) и (4.133), получим из (4.129) и (4.130) уравнения для определения  $A$  и  $\varphi$ , а следовательно,  $E$  и  $H$ :

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j, \quad (4.134)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (4.135)$$

Если ввести оператор (деламбертиан)

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (4.136)$$

то уравнения (4.134) и (4.135) примут вид:

$$\square A = -\frac{4\pi}{c} j; \quad (4.137)$$

$$\square \varphi = -4\pi \rho. \quad (4.138)$$

Это волновые уравнения для потенциалов: они подробно изучаются в курсах математической физики.

**Энергия и вектор потока энергии электромагнитного поля.** Рассмотрим сначала уравнения (I—IV) для вакуума. Умножим скалярно (I') на  $H$  и (III') на  $E$  и сложим полученные произведения:

$$E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = cE \cdot \text{rot } H - E \cdot 4\pi j - cH \cdot \text{rot } E.$$

Замечая, что  $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$ , перепишем это равенство в виде  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\operatorname{div} \left[ \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ , или, интегрируя:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} R d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad (4.139)$$

где положено

$$R \equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (4.140)$$

Используя теорему Остроградского, равенство (4.139) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d\tau = - \iint_{S_{\tau}} R \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_{\tau} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau. \quad (4.141)$$

Если  $\mathbf{j} = 0$  и  $R = 0$ , то величина, стоящая в левой части равенства (4.141), сохраняется: она играет роль энергии электромагнитного поля, плотность которой равна  $\frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ . Вектор  $R$ , определенный равенством (4.141), называется вектором потока электромагнитной энергии (или вектором Умова — Пойнтинга).

В общем случае равенство (4.141) устанавливает, что изменение электромагнитной энергии в некотором объеме равно потоку вектора Пойнтинга  $R$  через поверхность  $S_{\tau}$ , ограничивающую этот объем  $\tau$ , и работе электромагнитного поля над током в этом объеме.

При  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{V}$  в выражении, стоящем под знаком последнего интеграла (4.141), величина  $\rho \mathbf{E} d\tau$  представляет собой силу электромагнитного поля, действующую на заряд  $\rho d\tau$ ; умножая ее скалярно на скорость  $\mathbf{V}$ , получим работу в единицу времени: она соответствует потерям на джоулево тепло.

Рассматривая уравнения ( $I^{\nu} - IV^{\nu}$ ) Максвелла в среде и соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{H}, \quad (4.142)$$

можно получить аналогичным путем уравнение энергии электромагнитного поля для этих классов сред в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} d\tau = - \iint_{S_{\tau}} R \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_{\tau} \sigma E^2. \quad (4.143)$$

Выражение для плотности энергии имеет вид  $\frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}$ ; для вакуума  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  и (4.143) совпадает с (4.141). Роль потока вектора энергии играет по-прежнему  $R = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ; последний интеграл соответствует потерям на джоулево тепло:  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}$  — количество тепла, выделяемое в единице объема среды в единицу времени.

## Задачи к решениям

**Задача 1. Формулы Френе.** Если на пространственной кривой выбрать начало отсчета и установить положительное направление отсчета дуг, то радиус-вектор любой точки на кривой будет вектор-функцией дуги  $s$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Пусть для каждой точки кривой можно определить однозначно три взаимно-перпендикулярные оси естественного трехгранника: ось касательной (орт  $\tau$ ), ось главной нормали (орт  $n$ ) и ось бинормали (орт  $b$ ) (рис. 4.31).

Орт  $\tau$  равен  $\tau = \frac{dr}{ds}$ .

Это следует из того, что  $\left| \frac{dr}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right| = 1$ , а по направлению  $\tau$  и  $\frac{dr}{ds}$  также совпадают, ибо  $\frac{dr}{ds}$  направлен по касательной к годографу  $r = r(s)$ .

Орт  $n$  перпендикулярен к  $\tau$ , направлен в сторону вогнутости кривой и лежит в соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость — это предельное положение плоскости, проведенной через касательную в данной точке  $M$  параллельно касательной в соседней точке  $M'$ , когда  $M'$  приближается к  $M$  (рис. 4.32). Плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.

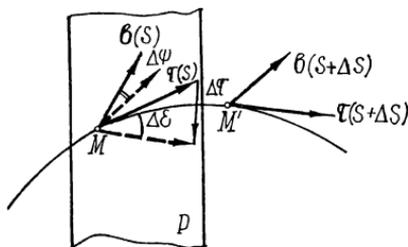
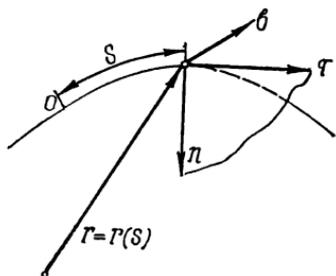


Рис. 4.31. Орты осей естественного трехгранника кривой.

Рис. 4.32. Углы смежности касательных  $\Delta\epsilon$  и бинормалей  $\Delta\psi$ . Предельным положением плоскости  $P$ , когда  $M \rightarrow M'$ , является положение соприкасающейся плоскости.

Угол между двумя смежными касательными  $\Delta\epsilon$  называется углом смежности касательных.

Орт  $b$  определяется векторным произведением  $b = \tau \times n$ .

Поскольку в каждой точке кривой имеются свои значения ортов  $\tau(s)$ ,  $n(s)$ ,  $b(s)$ , эти орты можно рассматривать как вектор-функции скалярного аргумента — дуги  $s$ . Определить  $\frac{d\tau}{ds}$ ,  $\frac{dn}{ds}$ ,  $\frac{db}{ds}$ .

Решение.

$$1. \frac{d\tau}{ds} = n \frac{1}{\rho}.$$

Докажем это. Имеем (рис. 4.32)

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\tau|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2|\tau| \sin \frac{\Delta\epsilon}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\epsilon}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}.$$

Эта величина  $\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$  носит название кривизны кривой ( $\rho$  — радиус кривизны).

Вектор  $\frac{d\tau}{ds}$  лежит в плоскости  $P$ , предельное положение которой является соприкасающейся плоскостью. Поскольку  $|\tau| = \text{const}$ , то  $\frac{d\tau}{ds} \perp \tau$  и направлено, как видно из рис. 4.32, в сторону вогнутости кривой. Значит,

$\frac{d\tau}{ds}$  направлено по орту  $\mathbf{n}$ . Первая формула Френе установлена. Кривизна кривой  $\frac{1}{\rho}$  может быть вычислена по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}.$$

2.  $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\mathbf{n}$ . Имеем (рис. 4.32)  $\left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{b}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2|\mathbf{b}| \sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\Delta s} =$   
 $= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s} = \frac{1}{T}.$

Здесь  $\Delta \psi$  — угол смежности бинормалей, а величина  $\frac{1}{T}$  называется кручением кривой ( $T$  — радиус кручения). Кроме того,  $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\tau \times \mathbf{n}) =$   
 $= \left( \frac{d\tau}{ds} \times \mathbf{n} \right) + \left( \tau \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right) = \tau \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}.$

Следовательно, вектор  $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$  должен быть перпендикулярен к  $\tau$  и  $\mathbf{b}$  (ибо  $|\mathbf{b}| = 1$ ) одновременно, т. е. направлен по оси вектора  $\mathbf{n}$ .

Из параллельности векторов  $\mathbf{n}$  и  $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$  следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается около касательной к кривой при движении точки по кривой. Мы будем приписывать кручению знак плюс, если при возрастании  $s$  соприкасающаяся плоскость поворачивается в направлении от  $\mathbf{n}$  к  $\mathbf{b}$ , и минус, если вращение происходит от  $\mathbf{b}$  к  $\mathbf{n}$ . Тогда  $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\mathbf{n}$ . Вторая формула Френе установлена.

3.  $\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\tau}{\rho} + \frac{\mathbf{b}}{T}.$

Эта формула устанавливается простым вычислением:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \times \tau) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \tau + \mathbf{b} \times \frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{T}(\mathbf{n} \times \tau) + \frac{1}{\rho}(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{b}}{T} - \frac{\tau}{\rho}.$$

**Задача 2.** Зная уравнение кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , где  $s$  — дуга, найти кручение кривой  $\frac{1}{T}$ .

**Решение.** Из второй формулы Френе (см. задачу 1) имеем  $\frac{1}{T} = -\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}.$

Но  $\mathbf{b} = \tau \times \mathbf{n}$ . Поскольку  $\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  и  $\mathbf{n} = \rho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ , то

$$\mathbf{b} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|} = \rho \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right).$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{T} = -\rho^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds} \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right) = \rho^2 \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right).$$

**Задача 3.** Найти проекции ускорения точки на оси естественного трехгранника ее траектории.

Решение. Пусть уравнение движения точки имеет вид  $r = r(t)$ . Оно является параметрическим уравнением траектории (параметр  $t$  — время).

Тогда скорость  $V$  и ускорение  $W$  точки равны:  $V = \frac{dr}{dt}$ ;  $W = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$ .

Если задано  $r = r(t)$ , то всегда можно определить закон движения точки по ее траектории, т. е.  $s = s(t)$ , где  $s$  — дуга траектории. Тогда можно рассматривать  $r(t) = r[s(t)]$ . Отсюда получим  $V = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \tau V$ , где  $V = \frac{ds}{dt}$  — скалярная скорость. Используя первую формулу Френе, получим  $W = \frac{V^2}{\rho} n + \frac{dV}{dt} \tau$ .

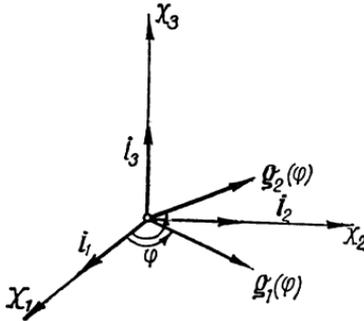


Рис. 4.33. Круговые вектор-функции.

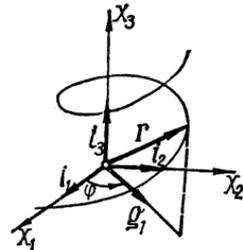


Рис. 4.34. Винтовая линия.

Итак, ускорение точки целиком лежит в соприкасающейся плоскости и имеет на оси естественного трехгранника проекции  $W_\tau = \frac{dV}{dt}$ ;  $W_n = \frac{V^2}{\rho}$ ;  $W_b = 0$ .

**Задача 4. Круговые вектор-функции.** В плоскости  $(x_1, x_2)$  заданы две единичные вектор-функции  $g_1(\varphi)$  и  $g_2(\varphi)$  в виде ортов ( $|g_1| = |g_2| = 1$ ), составляющих углы  $\varphi$  и  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  с осью  $x_1$  (рис. 4.33). Найти их разложения по осям

$x_1$  и  $x_2$  и выразить  $\frac{dg_1}{d\varphi}$  и  $\frac{dg_2}{d\varphi}$  через  $g_1$  и  $g_2$ .

Решение. Из определения  $g_1$  и  $g_2$  имеем  $g_1(\varphi) = i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi$ ;  $g_2(\varphi) = -i_1 \sin \varphi + i_2 \cos \varphi$ . Отсюда, дифференцируя по  $\varphi$  и учитывая, что  $i_1$  и  $i_2$  — постоянные, получим

$$\frac{dg_1}{d\varphi} = g_2; \quad \frac{dg_2}{d\varphi} = -g_1 \quad (*)$$

**Задача 5. Найти проекции скорости и ускорения точки, движущейся в плоскости, на направление радиуса-вектора (радиальные составляющие) и на перпендикуляр к нему (трансверсальные составляющие), если уравнения движения точки имеют вид  $r = r(t)$ ;  $\varphi = \varphi(t)$ , где  $r = |r|$ , а  $\varphi$  — угол, который составляет радиус-вектор с осью  $x_1$ .**

Решение. Введем круговые вектор-функции  $g_1(\varphi)$  и  $g_2(\varphi)$  так, что  $r = r g_1(\varphi)$ . Тогда  $V = \frac{dr}{dt} = \dot{r} g_1(\varphi) + r \frac{dg_1}{d\varphi} \dot{\varphi} = \dot{r} g_1(\varphi) + r \dot{\varphi} g_2(\varphi)$ , где  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ;  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ ;  $W = \frac{dV}{dt} = \ddot{r} g_1 + r \frac{dg_1}{d\varphi} \ddot{\varphi} + (r \ddot{\varphi} + r \dot{\varphi}^2) g_2 + r \dot{\varphi}^2 \frac{dg_2}{d\varphi} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \times$

$\times \mathbf{g}_1 + (2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \mathbf{g}_2$ . Отсюда имеем искомые проекции:  $V_r = \dot{r}$ ;  $W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ ;  
 $V_\varphi = r\dot{\varphi}$ ;  $W_\varphi = 2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi})$ .

**Задача 6.** Найти уравнение винтовой линии, которая представляет собой траекторию точки, одновременно участвующей в двух равномерных движениях: вдоль оси  $x_3$  и во вращении вокруг этой оси. Найти длину дуги винтовой линии.

Показать, что орт касательной к винтовой линии образует постоянный угол с плоскостью  $(x_1x_2)$ .

**Решение.** Введем круговую вектор-функцию  $\mathbf{g}_1(\varphi)$ , идущую по проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  переменной точки винтовой линии (рис. 4.34). Тогда  $\mathbf{r} = R\mathbf{g}_1(\varphi) + a(\varphi)\mathbf{i}_3$ , где  $R$  — радиус окружности, в которую проектируется винтовая линия на плоскость  $(x_1x_2)$ , а  $a(\varphi)$  — проекция  $\mathbf{r}$  на ось  $x_3$ .

По определению винтовой линии  $\dot{\varphi} = \omega t$ ;  $a = Vt$ , где  $V$  — скорость движения точки, описывающей винтовую линию, вдоль оси  $x_3$ , а  $\omega$  — угловая скорость вращения этой точки вокруг той же оси.

Тогда имеем  $\mathbf{r}(\varphi) = R\mathbf{g}_1(\varphi) + \frac{V}{\omega}\varphi\mathbf{i}_3$ . Это и есть уравнение винтовой линии.

При  $V = 0$  получим  $\mathbf{r}(\varphi) = R\mathbf{g}_1(\varphi)$  — уравнение окружности в плоскости  $(x_1, x_2)$  с центром в начале координат.

Найдем длину дуги  $s$  винтовой линии, т. е. путь, который пройдет по винтовой линии точка, повернувшись вокруг оси  $x_3$  на угол  $\varphi$ . Получим

$$s = \int_0^\varphi \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \right| d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{R^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2} d\varphi = \varphi \sqrt{R^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2}.$$

Орт касательной  $\boldsymbol{\tau}$  к винтовой линии равен

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{R\mathbf{g}_2 + (V:\omega)\mathbf{i}_3}{\sqrt{R^2 + (V:\omega)^2}}. \text{ Имеем } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{i}_3 = \frac{V:\omega}{\sqrt{R^2 + (V:\omega)^2}}, \text{ т. е. орт } \boldsymbol{\tau}$$

составляет с осью  $x_3$  (и с плоскостью  $(x_1x_2)$ ) постоянный угол.

**Задача 7.** Показать, что кривизна и кручение винтовой линии суть постоянные величины.

О т в е т.  $\frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2 + (V:\omega)^2}$ ;  $T = \frac{V:\omega}{R^2 + (V:\omega)^2}$ .

**Задача 8.** Найти градиент поля  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ , где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

**Решение.** Используя (4.60), получим  $\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \frac{d\varphi}{dr} \text{grad } r = \varphi' \text{grad } r$ .

Но  $\text{grad } r = \mathbf{i}_k \frac{\partial r}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \frac{x_k}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Таким образом,  $\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \varphi'(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Если не обращаться к готовой формуле (4.60), то, непосредственно рассматривая  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi[r(x_k)]$  и используя выражение для  $\text{grad } \varphi$  в декартовой системе координат, получим

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_k \frac{\partial \varphi[r(x_k)]}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \varphi'(\mathbf{r}) \times \frac{x_k}{r} = \varphi'(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

**Задача 9.** Найти дивергенцию поля  $\mathbf{A} = r\varphi(\mathbf{r})$ .

**Решение.** Заметив, что  $\text{div } \mathbf{A} = \text{div } r\varphi = \varphi \text{div } r + r \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{r})$ , и используя (4.60), получим  $\text{div } \mathbf{A} = 3\varphi + r\varphi'$ .

Эту задачу можно решить, используя представление в декартовой системе координат:

$$\text{div } [r\varphi(\mathbf{r})] = \frac{\partial}{\partial x_k} [x_k \varphi(\mathbf{r})] = 3\varphi + x_k \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_k} = 3\varphi + \frac{x_k x_k}{r} \varphi' = 3\varphi + \varphi' r.$$

**Задача 10.** Найти вихрь поля  $A = r\varphi(r)$ .

Решение. Так как  $\text{rot } A = \text{rot } r\varphi(r) = \varphi(r) \text{ rot } r - r \times \text{grad } \varphi(r)$  и  $\text{rot } r = 0$ , то по (4.60) имеем  $\text{rot } A = -r \times \frac{r}{r} \varphi'(r) = 0$ .

**Задача 11.** Найти  $\nabla(A \cdot B)$ .

Решение.  $\nabla(A \cdot B) = \nabla(A_c \cdot B) + \nabla(A \cdot B_c)$ . По формуле двойного векторного произведения имеем  $c(a \cdot b) = b(a \cdot c) - a \times (b \times c)$ , или  $c(a \cdot b) = (a \cdot c)b + a \times (c \times b)$ . Положим  $a = A_c$ ;  $b = B$ ;  $c = \nabla$ . Тогда  $\nabla(A_c \cdot B) = (A_c \cdot \nabla)B + A_c \times (\nabla \times B)$ . Следовательно, и  $\nabla(A \cdot B_c) = \nabla(B_c \cdot A) = (B_c \cdot \nabla)A + B_c \times (\nabla \times A)$ . Окончательно получим  $\nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + A \times \text{rot } B + B \times \text{rot } A$ .

**Задача 12.** Найти  $\text{rot}(A \times B)$ .

Решение. Имеем:

$$\text{rot}(A \times B) = \nabla \times (A \times B) = \nabla \times (A_c \times B) + \nabla \times (A \times B_c).$$

Раскрывая двойные векторные произведения в таком виде, чтобы оператор  $\nabla$  действовал только на вектор, принимаемый переменным, получим

$$\nabla \times (A_c \times B) = A_c(\nabla \cdot B) - (A_c \cdot \nabla)B; \quad \nabla \times (A \times B_c) = (B_c \cdot \nabla)A - B_c(\nabla \cdot A).$$

Окончательно получим  $\text{rot}(A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + A \text{ div } B - B \text{ div } A$ .

**Задача 13.** Показать, что если  $\psi$  гармоническая функция ( $\nabla^2 \psi = 0$ ), то вектор  $r\psi$  удовлетворяет уравнению  $\Delta \Delta r\psi = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \Delta r\psi = \frac{\partial^4 (r\psi)}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i \partial x_i} = 0$  (бигармонический вектор).

Решение. Последовательно вычисляем:  $\frac{\partial}{\partial x_k}(r\psi) = \frac{\partial}{\partial x_k}(i_k x_i \psi) = i_k \psi + r \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$ ;  $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}(r\psi) = i_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + i_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k} = 2i_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k}$ , или  $\Delta(r\psi) = 2\nabla \psi + r \Delta \psi$ . Так как по условию  $\Delta \psi = 0$ , то  $\Delta(r\psi) = 2\nabla \psi$ .

Вычисляя от этого выражения еще раз операцию  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$  и учитывая, что операции  $\Delta$  и  $\nabla \equiv i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  переставимы, получим  $\Delta \Delta(r\psi) = 2\Delta \nabla \psi = 2\nabla \Delta \psi = 0$ , ибо  $\Delta \psi = 0$ .

**Задача 14.** Показать, что лучи, проведенные из фокусов  $F_1$  и  $F_2$  эллипса в любую его точку  $M$ , образуют с касательной в этой точке одинаковые углы.

Решение. Прежде всего заметим, что градиент модуля вектора  $r_{AM}$ , проведенного из фиксированной точки  $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  в любую переменную точку  $M(x_1, x_2, x_3)$ , равен единичному вектору, проведенному от  $A$  к  $M$ . Это проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \nabla r_{AM} &= \nabla \left( \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2} \right) = \\ &= \frac{(x_1 - x_1^0) i_1 + (x_2 - x_2^0) i_2 + (x_3 - x_3^0) i_3}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}} = \frac{r_{AM}}{|r_{AM}|}. \end{aligned}$$

Теперь, заметив, что эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний которых до фокусов есть величина постоянная, имеем  $r_{F_1 M} + r_{F_2 M} = \text{const}$ . Так как  $\text{grad}(r_{F_1 M} + r_{F_2 M})$  направлен по нормали к эллипсу, в точке  $M$ , то, взяв орт касательной в той же точке, получим

$$\nabla(r_{F_1 M}) \cdot \tau_M = -\nabla(r_{F_2 M}) \cdot \tau_M, \quad \text{или} \quad \frac{r_{F_1 M} \cdot \tau_M}{|r_{F_1 M}|} = -\frac{r_{F_2 M} \cdot \tau_M}{|r_{F_2 M}|}.$$

Отсюда и следует, что углы между  $r_{F_1 M}$  и  $\tau_M$  и  $r_{F_2 M}$  и  $-\tau_M$  одинаковы. Если эллипс представляет отражающую поверхность, то луч света, выйдя из одного фокуса, отразившись, придет в другой его фокус.

**Задача 15.** Пусть  $S$  — любая замкнутая поверхность, а  $r$  — радиус-вектор ее точки относительно некоторого начала  $O$ , не лежащего на  $S$ .

Вычислить поток вектора  $\frac{r}{r^3}$  через поверхность  $S$ .

Решение. Здесь надо различать два случая.

1) Точка  $O$  находится вне  $S$ , так что всюду на  $S$  имеем  $r \neq 0$ .

Применяя к области  $\tau$ , ограниченной поверхностью  $S$ , теорему Остроградского, имеем

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\tau = 0, \text{ ибо } \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

2) Точка  $O$  находится внутри  $S$ .

Окружая точку  $O$  сферой  $\epsilon$  достаточно малого радиуса  $r_\epsilon$  и применяя теорему Остроградского к области  $\tau'$  между  $S$  и поверхностью сферы  $S_\epsilon$ , имеем

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS + \iint_{S_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_{\tau'} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\tau = 0, \text{ ибо в } \tau' \text{ также } r \neq 0.$$

Таким образом,  $\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = - \iint_{S_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS$ . Но на поверхности сферы

$$S_\epsilon \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{n}; \quad r = r_\epsilon = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, получаем } \iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS &= \iint_{S_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \frac{1}{r_\epsilon^2} dS = \frac{1}{r_\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} dS = \\ &= \frac{1}{r_\epsilon^2} 4\pi r_\epsilon^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

Интеграл  $\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  имеет простой геометрический смысл: он представляет собой телесный угол, под которым из точки  $O$  видна поверхность  $S$ .

**Задача 16.** Показать, что поле ускорений жидкости  $\frac{dV}{dt}$  имеет потенциал  $\Phi$ , если поле скоростей потенциально ( $V = \nabla\Phi$ ).  
Найти потенциал ускорений.

Решение. Поле ускорений  $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V$  можно записать в виде (форма И. С. Громеки)  $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} - V \times \operatorname{rot} V$ , если учесть формулу, полученную в задаче 11 этой главы, которая при  $A = B = v$  имеет вид  $\nabla (v^2) = 2(v \cdot \nabla)v + 2v \times \operatorname{rot} v$ .

Тогда, поскольку  $v = \nabla\Phi$ ,  $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi + \nabla \frac{v^2}{2} = \nabla \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right)$ . Отсюда следует, что поле  $\frac{dv}{dt}$  имеет потенциал  $\Phi$ , равный  $\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}$ .

**Задача 17.** Выразить кинетическую энергию безвихревого движения несжимаемой жидкости в односвязном объеме  $T = \rho \iiint_{\tau} \frac{V^2}{2} d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} (\nabla\Phi)^2 d\tau$

через интеграл по границе этого объема — поверхности  $S$ . Показать, что если на границе  $S$  объема  $\tau$  жидкость покоится, то единственно возможным безвихревым движением является покой.

Решение. Используя условия несжимаемости  $\operatorname{div} V = \operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$  и формулу  $\operatorname{div} \varphi A = \nabla \varphi \cdot A + \varphi \operatorname{div} A$ , получим  $T = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \operatorname{div} (\varphi \nabla \varphi) d\tau - \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \varphi \operatorname{div} \nabla \varphi d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \operatorname{div} (\varphi \nabla \varphi) d\tau$ .

Преобразуя объемный интеграл в поверхностный по формуле Остроградского, найдем

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) dS = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (*)$$

Если на поверхности  $S$  жидкость покоится, т. е.  $V|_S = 0$ , то  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = V \cdot \mathbf{n}|_S = 0$ . Тогда из (\*) получим  $T = 0$ , т. е. жидкость в объеме  $\tau$  находится в покое.

**Задача 18.** Уравнение равновесия жидкости имеет вид

$$\rho \mathbf{f} = \nabla p, \quad (**)$$

где  $\mathbf{f}$  — интенсивность массовых сил (в поле тяжести  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ).

*Показать, что равновесие жидкости может иметь место только в таком силовом поле, где силовые линии (векторные линии поля  $\mathbf{f}$ ) ортогональны к векторным линиям  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ .*

Решение. Возьмем операцию  $\operatorname{rot}$  от обеих частей (\*\*):

$$\operatorname{rot} \rho \mathbf{f} = \nabla \rho \times \mathbf{f} + \rho \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0.$$

Умножая скалярно на  $\mathbf{f}$  и сокращая на  $\rho$ , получим  $\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ .

Таким образом, в каждой точке вектор  $\mathbf{f}$  должен быть перпендикулярен к  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ . Так будет в плоском силовом поле (когда  $\mathbf{f}$  располагаются в параллельных плоскостях). Очевидно, равновесие возможно и в потенциальном поле ( $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ ); при этом эквипотенциальные поверхности такого поля являются поверхностями одинаковой плотности (ибо  $\nabla \rho \times \mathbf{f} = 0$ ) и поверхностями одинакового давления (ибо  $\nabla p \times \mathbf{f} = 0$ ).

**Задача 19.** Поле скоростей движения вязкой жидкости между двумя параллельными бесконечными пластинками имеет вид

$$V = \iota_1 V_1 = \iota_1 \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} (x_2^2 - hx_2) + \frac{u_1 - u_2}{h} x_2 + u_2 \right],$$

где ось  $x_1$  направлена вдоль нижней пластинки;  $h$  — расстояние между пластинками, из которых верхняя имеет скорость  $u_1$ , а нижняя  $u_2$ ;  $\mu$ ,  $\frac{dp}{dx_1}$  — постоянные вязкость и градиент давления.

*Определить циркуляцию скорости по окружности радиуса  $R$ , центр которой находится посередине между пластинками.*

Решение. Эту задачу можно решить двумя путями. Непосредственно имеем

$$\Gamma = \oint_{L_R} V_1 dx_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} \oint_{L_R} (x_2^2 - hx_2) dx_1 + \frac{u_1 - u_2}{h} \oint_{L_R} x_2 dx_1 + u_2 \oint_{L_R} dx_1.$$

Выражая  $x_1$  и  $x_2$  через полярный угол  $\varphi$ , получим  $x_1 = R \cos \varphi$ ;  $x_2 = \frac{h}{2} + R \sin \varphi$ .

$$\text{Тогда } \oint_{L_R} dx_1 = -R \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0; \quad \oint_{L_R} x_2 dx_1 = -R \int_0^{2\pi} \left( \frac{h}{2} + R \sin \varphi \right) \sin \varphi d\varphi =$$

$$= -\pi R^2; \oint_{L_R} x_2^2 dx_1 = -R \int_0^{2\pi} \left( \frac{h}{2} + R \sin \varphi \right)^2 \sin \varphi d\varphi = -R^2 \pi l. \text{ Таким образом,}$$

$$\Gamma = -\frac{u_1 - u_2}{h} \pi R^2.$$

Этот же результат можно получить проще, если воспользоваться теоремой Стокса и в качестве поверхности  $S$  взять круг, ограниченный заданной окружностью. Тогда  $\Gamma = \iint_S \text{rot}_3 V dS = - \iint_S \frac{\partial V_1}{\partial x_2} dS = - \iint_S \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} (2x_2 - h) + \right.$

$$\left. + \frac{u_1 - u_2}{h} \right] dS = - \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} (h + 2r \sin \varphi - h) + \frac{u_1 - u_2}{h} \right] r dr d\varphi =$$

$$= -\frac{u_1 - u_2}{h} \pi R^2.$$

**Задача 20.** Вихревой линией называется векторная линия поля  $\text{rot } V$ . Вихревой трубкой называется поверхность, образуемая вихревыми линиями, проходящими через некоторый замкнутый контур.

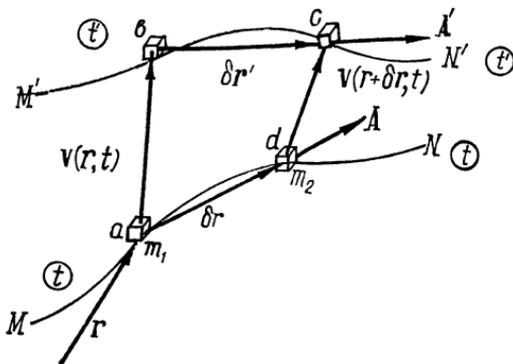


Рис. 4.35. Сохраняемость векторных линий поля. Говорят, что векторные линии поля  $A$  сохраняются, если частицы жидкости, составляющие векторную линию  $MN$  в момент времени  $t$ , расположатся в любой другой момент времени  $t'$  так, что будут образовывать вновь векторную линию  $M'N'$  того же поля.

**Задача 22.** Рассмотрим в движущейся жидкости, имеющей поле скоростей  $V = V(r, t)$ , векторные линии другого векторного поля  $A = A(r, t)$ . Это могут быть векторные линии поля ускорений, поля вихрей и др.

Найти необходимое условие сохраняемости этих векторных линий, т. е. условие, при котором они будут все время состоять из одних и тех же частиц жидкости, не разрушаясь (теорема Фридмана).

**Решение.** Пусть  $MN$  — векторная линия — в момент времени  $t$  (рис. 4.35) остается векторной линией и в момент  $t' = t + \Delta t$ , деформируясь в  $M'N'$ .

Таким образом, для двух произвольных частиц  $m_1$  и  $m_2$  имеем:

$$\delta r \times A = 0 \text{ в момент времени } t,$$

$$\delta r' \times A' = 0 \text{ в момент времени } t' = t + \Delta t. \text{ Кроме того, } A' = A + \frac{dA}{dt} \Delta t.$$

Показать, что поток вихря  $\text{rot } V$  через сечение вихревой трубки одинаков для всех сечений трубки (теорема Гельмгольца).

**Указание.** Используя условие соленоидальности поля  $\text{rot } V$ , рассмотрим поток  $\text{rot } V$  через замкнутую поверхность, образованную двумя произвольными сечениями вихревой трубки и ее боковой поверхностью.

**Задача 21.** Интенсивностью вихревой трубки называется поток вихря через ее поперечное сечение.

Показать, что интенсивность вихревой трубки равна циркуляции вектора по замкнутому контуру, пересекающему все вихревые линии трубки, т. е. охватывающему трубку.

**Указание.** Применить теорему Стокса к контуру, охватывающему трубку, и к поверхности, ограниченной им (к сечению трубки).

Из векторного четырехугольника  $abcd$  (рис. 4.35), отбрасывая бесконечно малые второго порядка и выше, получаем

$$\delta r' = \delta r + V(r + dr, t) \Delta t - V(r, t) \Delta t = \delta r + \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k \Delta t = \delta r + (\delta r \cdot \nabla) V \Delta t.$$

Таким образом, если  $M'N'$  — векторная линия, то

$$\left( A + \frac{dA}{dt} \Delta t \right) \times [\delta r + (\delta r \cdot \nabla) V \Delta t] = 0.$$

Раскрывая векторное произведение, отбрасывая малые второго порядка и учитывая  $A \times \delta r = 0$ , получим  $\left( \frac{dA}{dt} \times \delta r \right) + [A \times (\delta r \cdot \nabla) V] = 0$ .

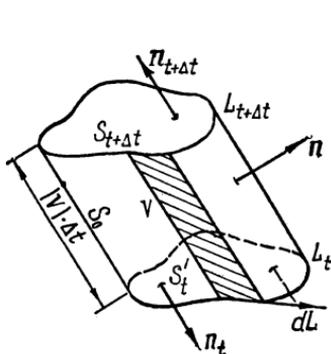


Рис. 4.36. К теореме об изменении циркуляции по жидкому контуру.

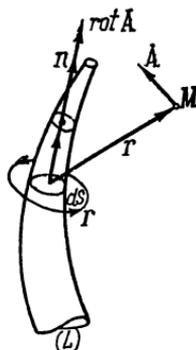


Рис. 4.37. Поле вихревой трубки.

Учитывая, что  $\delta r \parallel A$ , найдем необходимое условие сохраняемости векторных линий для поля  $A(r, t)$ :  $\left[ \frac{dA}{dt} - (A \cdot \nabla) V \right] \times A = 0$ .

Во второй теореме Фридмана\* устанавливается необходимое и достаточное условие сохраняемости векторных линий  $A(r, t)$  и интенсивности векторных трубок. Оно имеет вид

$$\frac{dA}{dt} - (A \cdot \nabla) V + A \operatorname{div} V = 0. \quad (*)$$

**Задача 23. Теорема об изменении циркуляции по жидкому контуру.**

Рассмотрим в движущейся жидкости частицы, которые в момент  $t$  образуют замкнутый контур  $L_t$ . Через время  $\Delta t$  этот контур займет положение  $L_{t+\Delta t}$  (рис. 4.36). Пусть в движущейся жидкости определено векторное нестационарное поле  $A(r, t)$ . Таким полем может быть поле скоростей, ускорений и т. п. Тогда в каждый момент времени можно рассматривать циркуляцию этого поля по жидкому контуру, т. е. величину  $\Gamma(t) = \oint_{L_t} A(r, t) \cdot dL$ .

\* См., например, Кибель, Кочин, Розе. «Теоретическая гидромеханика», т. I.

Рассмотрим полную производную по времени от этой величины, учитывая зависимость от времени как контура интегрирования, так и подынтегральной функции. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L_{t+\Delta t}} [\mathbf{A}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathbf{L} + \oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \right. \\ &\quad \left. - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} \right\} = \oint_{L_t} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{L} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \right. \\ &\quad \left. - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} \right\}. \quad (*) \end{aligned}$$

Для вычисления предела в написанном выше выражении рассмотрим поток вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  через замкнутую поверхность, образованную «доньшками»  $S_t$ ,  $S_{t+\Delta t}$ , натянутыми на контуры  $L_t$ ,  $L_{t+\Delta t}$ , и боковой поверхностью  $S_0$ , образуемой за время  $\Delta t$  отрезками траекторий частиц жидкости, образующих жидкий контур. Так как  $\text{rot } \mathbf{A}$  — вектор соленоидальный, то из теоремы Остроградского имеем

$$\iint_{S_{t+\Delta t}} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS + \iint_{S_t} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS + \iint_{S_0} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS = 0.$$

Применяя к первым двум интегралам формулу Стокса (см. 4.79) и учитывая, что на доньшке  $S_t$  внутренняя к поверхности нормаль составляет с направлением обхода контура правый винт, получим  $\oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} = - \iint_{S_0} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS$ . Замечая, что на боковой поверхности  $S$  существует соотношение  $\mathbf{n} \, dS = d\mathbf{L} \times \mathbf{V} \Delta t$ , и учитывая свойство (1.16), окончательно найдем  $\oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} = \Delta t \int_{L_t} (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{L}$ .

Подставляя это выражение в (\*), получим  $\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{L_t} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{V}) \right\} \cdot d\mathbf{L}$ . (\*\*)

Применим вновь формулу Стокса (см. 4.79):  $\frac{d\Gamma}{dt} = \iint_{S_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{V}) \right\} \cdot \mathbf{n} \, dS$ .

Обозначая  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , расписывая ротор векторного произведения и учитывая выражение (4.59), получим  $\frac{d\Gamma}{dt} = \iint_{S_t} \left\{ \frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{B} \text{div } \mathbf{V} \right\} \cdot \mathbf{n} \, dS$ .

Отсюда, учитывая, что контур  $L_t$  (и поверхность  $S_t$ ) произволен, имеем:  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ ,  $\Gamma = \text{const}$  тогда и только тогда, если  $\frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{B} \text{div } \mathbf{V} = 0$ .

Вспоминая вторую теорему Фридмана (см. предыдущую задачу), получим формулировку теоремы:

Необходимым и достаточным условием сохранения циркуляции поля по любому жидкому контуру является условие сохранения вихревых линий и интенсивности вихревых трубок этого поля.

Как частный случай этой теоремы получаем теорему Томсона — Кельвина:

Производная по времени от циркуляции скорости по контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру.

Действительно, полагая (\*\*\*)  $\mathbf{A} = \mathbf{V}$  и выражая  $\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V}$  из формулы (см. 4.59, 5)  $\nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V})$ , получим  $\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{L_1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \right\} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{L}$ , ибо  $\oint_{L_1} \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{L} = 0$  как интеграл от однознач-

ной функции по замкнутому контуру.

**Задача 24.** Пусть поле  $\mathbf{V}$  скорости несжимаемой жидкости занимает неограниченное пространство. Вследствие несжимаемости всюду  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ . Пусть в некоторой области этого поля — на линии  $L$  имеем:  $\text{rot } \mathbf{V} \neq 0$ , так что циркуляция по любому контуру, охватывающему  $L$ , равна  $\Gamma$ . Тогда линию  $L$  можно рассматривать как элементарную вихревую трубку, имеющую сечение  $dS$ . *Отыскать поле вне вихревой трубки* (рис. 4.37).

**Решение.** Согласно основной теореме векторного анализа,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{\text{rot } \mathbf{V}}{r} d\tau \quad (\text{ибо } \text{div } \mathbf{V} = 0 \text{ всюду}).$$

Если  $d\mathbf{r}$  — элемент вихревой трубки, ориентированный по  $\text{rot } \mathbf{V}$ , то  $\text{rot } \mathbf{V} d\tau = \text{rot } \mathbf{V} dS |d\mathbf{r}| = d\mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{V}) dS = d\mathbf{r} \Gamma$ , ибо интенсивность вихревой трубки  $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{V} dS$  равна заданной циркуляции  $\Gamma$  и постоянна вдоль трубки. Тогда

$$\mathbf{V}(M) = \frac{\Gamma}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{d\mathbf{r}}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{rot} \frac{d\mathbf{r}}{r}.$$

Поскольку  $\text{rot} \frac{d\mathbf{r}}{r} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{r} + \frac{1}{r} \text{rot } d\mathbf{r} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}$ , то искомое поле определяется формулой  $\mathbf{V}(M) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3}$ , где криволинейный интеграл берется вдоль заданной линии  $L$ .

**Задача 25.** *Используя результат предыдущей задачи, найти поле прямой вихревой нити и поле кольцевой (круговой) вихревой нити.*

**Задача 26.** *Определить потенциальное поле  $\mathbf{V}$  ( $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ ), если  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  всюду, кроме начала координат. При этом считается заданным поток вектора  $\mathbf{V}$ , равный  $Q$  через некоторую замкнутую поверхность, охватывающую начало координат. Такое поле называется полем точечного источника (см. 4.4).*

**Решение.** Так как  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ , то  $\mathbf{A} = \nabla \varphi$ .

В силу симметрии поля  $\varphi = \varphi(r)$ . Тогда  $\mathbf{A} = \nabla \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Так как  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  всюду, кроме начала координат, то из теоремы Остроградского следует, что поток через любую замкнутую поверхность, охватывающую начало координат, равен заданной величине  $Q$ . Тогда, вычисляя поток  $\mathbf{V}$  через сферу радиуса  $r$ , получим

$$\iint_{S_L} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \iint \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = \iint \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS = \frac{d\varphi}{dr} \cdot 4\pi r^2 = Q.$$

Отсюда  $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{Q}{4\pi r^2}$ :  $\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}$ . Следовательно,  $\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ .

**Задача 27.** Определить проекции скорости и ускорения точки на оси ортогональной системы криволинейных координат.

Решение. Если заметить, что полное приращение радиуса-вектора точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  может быть записано (см. 2.8.) в виде

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 e_1 dq_1 + H_2 e_2 dq_2 + H_3 e_3 dq_3,$$

то выражение для скорости можно представить через производные криволинейных координат по времени:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = H_1 \dot{q}_1 e_1 + H_2 \dot{q}_2 e_2 + H_3 \dot{q}_3 e_3. \quad (*)$$

Отсюда, например, проекции скорости на оси цилиндрической системы координат равны:  $V_r = H_1 \dot{R} = \dot{R}$ ;  $V_\varphi = H_2 \dot{\varphi} = R\dot{\varphi}$ ;  $V_{x_3} = H_3 \dot{x}_3 = \dot{x}_3$ .

Для определения проекций  $W_k$  ускорения  $\mathbf{W}$  напишем

$$W_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \frac{1}{H_k} \frac{d\mathbf{r}}{dq_k}.$$

Отсюда (по  $k$  не суммируется!)

$$H_k W_k = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right). \quad (**)$$

Дифференцируя (\*) по  $\dot{q}_k$ , получим  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k} = H_k \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}$ .

Кроме того,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dq_k}.$$

Поэтому, заменяя в (\*\*)  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}$  на  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k}$  и  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right)$  на  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k}$ , найдем

$$H_k W_k = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{V^2}{2} \right),$$

или

$$W_k = \frac{1}{H_k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right),$$

где  $T = \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2)$  — кинетическая энергия единичной массы.

**Задача 28.** Показать, что если  $r$  — расстояние от точки  $(x^1, x^2, x^3)$  до  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , то функция  $f(x^1, x^2, x^3) = \frac{\rho(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t - \frac{r}{c})}{r}$  удовлетворяет уравнению  $\square f = 0$ , где в операторе  $\square$  берется дифференцирование по  $x^1, x^2, x^3$ .

Решение. Вычислим  $\Delta f$ . Имеем  $\nabla f = \frac{1}{r} \nabla \rho + \rho \nabla \frac{1}{r}$ .

Используя (4.60) и обозначая через  $\rho'$  производную по аргументу  $t - \frac{r}{c}$ , получим

$$\nabla f = \frac{1}{r} \left( -\frac{\rho'}{c} \nabla r \right) - \frac{\rho}{r^2} \nabla r = - \left( \frac{\rho}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) \nabla r = - \left( \frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \Delta f = \operatorname{div} \nabla f &= -\operatorname{div} \mathbf{r} \left( \frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) = - \left( \frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) \operatorname{div} \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \left( \frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) = \\ &= -3 \left( \frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \left( -\frac{\rho''}{c^2 r^2} - \frac{2\rho'}{cr^3} - \frac{\rho'}{cr^3} - \frac{3\rho}{r^4} \right) = \frac{\rho}{c^2 r}. \end{aligned}$$

Но  $\rho'' = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \left( t - \frac{c}{r} \right)^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2}$ . Отсюда  $\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \tilde{f}}{dt^2}$ , или  $\square f = 0$ .

Можно показать, рассуждая аналогично тому, как и при решении уравнения Пуассона  $\Delta f = \rho$ , что решение уравнения  $\square f = -4\pi r(x_1, x_2, x_3, t)$  в неограниченном пространстве при конечном распределении  $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$  может быть представлено в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = \iiint \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

где  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$  и интеграл распространен на всю область определения  $\rho$ .

Таким образом, решения уравнений (4.137) и (4.138) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3; \quad (4.144)$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \iiint \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (4.145)$$

Эти решения показывают, что заряд и ток в точке  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  влияют на потенциалы в точке  $(x_1, x_2, x_3)$  с запаздыванием на время  $\frac{r}{c}$ . Действие потенциала запаздывает на время, за которое сигнал, распространяющийся со скоростью  $c$ , пройдет расстояние  $r$  между точками. Эти решения называются решениями в виде *запаздывающих потенциалов*.

**Задача 29.** Показать, что при отсутствии свободных зарядов ( $\rho = 0$ ) в диэлектрике ( $j = 0$ ) скорость распространения электромагнитных волн равна  $\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$  ( $\mu, \varepsilon$  — постоянные).

**Решение.** Используя уравнения Максвелла ( $I'' - IV''$ ) при  $j = 0$  и  $\rho = 0$ , получим, взяв, например,  $\operatorname{rot}$  от третьего из них:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Учитывая первое и второе уравнения, получим

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (4.146)$$

Аналогично можно найти

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (4.147)$$

Из этих волновых уравнений следует, что если в какой-то момент времени  $t_0$  будут заданы функции  $E|_{t=t_0} = E_0(\mathbf{r})$  и  $H|_{t=t_0} = H_0(\mathbf{r})$ , то во все последующие моменты времени будет наблюдаться волновой процесс, причем скорость распространения волн равна  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ .

**Задача 30.** Показать, что функция

$$\mathbf{H} = H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (H_0 = \text{const}) \quad (4.148)$$

удовлетворяет уравнению (4.146) при  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{c}$ .

**Решение.** Вычисления дают

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\omega^2 H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\omega^2 \mathbf{H},$$

$$\Delta \mathbf{H} = H_0 \Delta e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = H_0 e^{i\omega t} \Delta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Учитывая выражения для скалярного произведения  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_m x^m$  и градиента  $\nabla = e_n \frac{\partial}{\partial x^n}$ , находим

$$\nabla e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \Delta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e_n \frac{\partial}{\partial x^n} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -i e_n k_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -i \mathbf{k} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Теперь

$$\Delta e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \nabla \cdot \nabla e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = (i\mathbf{k} \cdot i\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

$$\Delta \mathbf{H} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{H}.$$

Следовательно, подставляя  $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$  и  $\Delta \mathbf{H}$  в уравнение (4.146), получим

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \left( -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 \right) \mathbf{H} = 0.$$

Отсюда имеем  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon}$ .

Вектор  $\mathbf{k}$  называется волновым вектором. Величину его можно выразить через длину волны  $\lambda$  — расстояние по направлению  $\mathbf{k}$ , определяющее точки, где  $\mathbf{H}$  в любой фиксированный момент времени принимает одинаковые значения. Действительно, длина волны  $\lambda$  определяется из равенства

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = e^{i \left[ \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{r} + \lambda \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right]} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\lambda k}. \quad \text{Отсюда } \lambda k = 2\pi \text{ и } \lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Рассмотренное решение носит название *плоских монохроматических волн*. В них все величины являются простыми гармоническими функциями времени, и поэтому любую волну можно представить в виде совокупности монохроматических волн с различными частотами  $\omega$  и векторами  $\mathbf{k}$ . Это представление является не чем иным, как представлением в виде ряда или интеграла Фурье.

Волна называется плоской, ибо ее фронт (поверхность постоянной фазы) является плоскостью из семейства  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ . Эти плоскости (см. задачу 9 гл. 1) перпендикулярны к волновому вектору  $\mathbf{k}$ , так что плоская волна всегда распространяется в направлении, определяемом волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

**Задача 31.** Найти закон распространения плоских монохроматических волн в проводнике с конечной проводимостью.

**Решение.** Внутри проводников нет свободных зарядов ( $\rho = 0$ ), а плотность тока на основании закона Ома пропорциональна напряженности поля  $\mathbf{E}$ , т. е.  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , где  $\sigma$  — удельная проводимость проводника.

Учитывая эти замечания, из системы (I'' — IV'') получим ( $\epsilon$ ,  $\mu$  — постоянные):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}, & (1) & \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, & (3) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & (2) & \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. & (4) \end{aligned} \right\} \quad (4.149)$$

Взяв  $\operatorname{rot}$  от первого уравнения, найдем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Учитывая второе и третье уравнения (4.149), получим

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Ищем решение, например, уравнения для  $\mathbf{E}$  в виде

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0:$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (4.150)$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим для волнового вектора уравнение

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} i\omega + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 = 0. \quad (4.151)$$

Отсюда ясно, что величина  $|\mathbf{k}|$  должна быть комплексной, поэтому вектор  $\mathbf{k}$  будем искать в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2.$$

Подставляя это выражение в (4.151), получим

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2; \quad k_1 k_2 = -\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2 \cos \theta},$$

где  $\cos \theta = \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , так что  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi'$  (ибо  $k_1 k_2 > 0$ ).

Определяя отсюда величины  $k_1$  и  $k_2$ , найдем

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega \cos \theta}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}}, \\ k_2 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega \cos \theta}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Используя выражение для  $\mathbf{k}$ , решение для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{(k_2 \cdot \mathbf{r})} e^{i(\omega t - k_1 \cdot \mathbf{r})}. \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{(k_2 \cdot \mathbf{r})} e^{i(\omega t - k_1 \cdot \mathbf{r})}.$$

Так как вектор  $\mathbf{k}_1$  направлен в сторону распространения волн и  $\cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) < 0$ , то, поскольку  $k_1 \cdot \mathbf{r} > 0$ , имеем  $k_2 \cdot \mathbf{r} < 0$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае конечной проводимости проводника плоские монохроматические волны представляют собой *волны затухающие*.

## Упражнения

1. Материальная точка движется согласно уравнению движения

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t,$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\omega$  — постоянные;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки

Показать, что сила, действующая на точку, является центральной (направленной все время к началу координат).

2. Показать, что

$$1) \operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$4) \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a};$$

$$2) \operatorname{grad} r^n = nr^{n-2} \mathbf{r} \\ (n \neq 2);$$

$$5) \operatorname{grad} [\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \varphi(r)] = \\ = a \varphi(r) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \frac{r \varphi'(r)}{r}.$$

$$3) \operatorname{grad} \frac{k}{r} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r};$$

$$6) \operatorname{grad} \ln r = \frac{\mathbf{r}}{r^2},$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $n$ ,  $k$  — постоянные.

3. Показать, что

$$1) \operatorname{div} \mathbf{r} = 3;$$

$$3) \operatorname{div} r^n \mathbf{c} = nr^{n-2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) \\ (n \neq 2);$$

$$2) \operatorname{div} a \mathbf{r} = 3a;$$

$$4) \operatorname{div} r^2 \mathbf{c} = 2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c});$$

$$5) \operatorname{div} (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0;$$

$$9) \operatorname{div} \mathbf{a} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c};$$

$$6) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0;$$

$$10) \operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{c} = -2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c});$$

$$7) \operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n+3) r^n;$$

$$11) \operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{r} = -2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}).$$

$$8) \operatorname{div} \mathbf{r} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = 4 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r});$$

4. Показать, что

$$1) \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0;$$

$$4) \operatorname{rot} \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c};$$

$$2) \operatorname{rot} \mathbf{r} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \times \mathbf{r};$$

$$5) \operatorname{rot} [(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{a}] = \mathbf{a} \times \mathbf{c};$$

$$3) \operatorname{rot} (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c};$$

$$6) \operatorname{rot} [(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}] = 3\mathbf{c} \times \mathbf{r}.$$

5. Найти дивергенцию и вихрь поля скоростей  $\mathbf{V}$  и поля ускорений  $\mathbf{W}$  твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, зная, что  $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$ ;  $\mathbf{W} = \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ , где  $\omega$ ,  $\varepsilon$  — постоянные векторы.

6. Показать, что поток радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем  $\tau$ , равен  $3\tau$ .

7. Вычислить циркуляцию по окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат векторных полей:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (-x_2 \mathbf{i}_1 + x_1 \mathbf{i}_2); \quad \mathbf{B} = (x_1 x_2 + 1) \mathbf{i}_2 + \left( \frac{x_1^2}{2} + x_1 + 2 \right) \mathbf{i}_2.$$

8. Показать, что поля  $\mathbf{A} = 3x_2^4 x_3^2 \mathbf{i}_1 + 4x_1^3 x_3^2 \mathbf{i}_2 - 3x_1^2 x_2^2 \mathbf{i}_3$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \varphi \times \nabla \psi$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  — скалярные функции, являются соленоидальными.

9. Найти общий вид функции  $f(r)$  такой, чтобы поле  $\mathbf{A} = f(r) \mathbf{r}$  было соленоидальным.

$$\text{Ответ: } f(r) = c/r^3,$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

10. Показать, что поля  $\mathbf{A} = (6x_1 x_2 + x_3^3) \mathbf{i}_1 + (3x_1^2 - x_3) \mathbf{i}_2 + (3x_1 x_3^2 - x_4) \mathbf{i}_3$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \varphi$ , где  $\varphi$  — скалярная функция, являются безвихревыми. Найти потенциал поля  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Ответ: } \mathbf{A} = \nabla (3x_1^2 x_2 + x_1 x_3^3 - x_2 x_3 + \text{const}).$$

11. Показать, что если поля  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  безвихревые, то поле  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  является соленоидальным.

12. Вычислить поток вектора  $\mathbf{A} = 4x_1 x_3 \mathbf{i}_1 - x_2^2 \mathbf{i}_2 + x_2 x_3 \mathbf{i}_3$  через поверхность единичного куба, образуемого плоскостями  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = 1$ .

$$\text{Ответ: } 3/2.$$

13. Вычислить поток вихря поля  $\mathbf{A} = (x_1^2 + x_2 - 4)\mathbf{l}_1 + 3x_1x_2\mathbf{l}_2 + (2x_1x_3 + x_3^2)\mathbf{l}_3$  через поверхность полусферы  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$ , находящейся над плоскостью  $x_1x_2$ .

Ответ: — 16л.

14. Показать, что  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{i, ik} - \Gamma_{k, ik}$ .

15. Показать, что для ортогональных координат имеют место выражения

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \text{ если значения } i, j, k \text{ — различные: } \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \ln H_i;$$

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \times \ln H_i; \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2H_j} \frac{\partial H_j}{\partial x^i},$$

причем здесь не предполагается суммирования по дважды повторяющимся индексам  $i \neq j$ .

16. Показать, что  $\frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}A^iB^j) = A_{i;k}B^i + A^iB_{i;k}$ .

17. Доказать, что ковариантная производная от абсолютной величины вектора равна  $|A|_{;i} = \frac{1}{|A|} A_{j;i}A^j$ .

## Предметный указатель

- Альтернирование 86
- Базис 11, 68, 108
  - взаимный (биортогональный) 21
  - правый (левый) 20
- Бивектор 86
- Вектор аксиальный 18, 87
  - ковариантный 25
  - контравариантный 25, 27
  - коллинеарный 9
  - компланарный 10
  - масштабный 11
  - нулевой 5
  - полярный 17
  - свободный 5
  - связанный 5
  - скользящий 5
- Вектор-функция 29
- Вектор годограф 29
  - длина 5
  - закон преобразования 49
  - инварианты 98
  - компоненты ковариантные 27
  - контравариантные 27
  - физические 26
  - координаты 108
  - перенос параллельный 151
  - разложение 10
- Векторного поля вихрь 129, 155, 158
  - дивергенция 129, 155, 158
  - поток 130
  - циркуляция 114
- Векторов произведение скалярное 15
  - векторное 16
  - векторно-скалярное 19
  - двойное векторное 20
  - диадное 62
  - деление 21
  - линейная зависимость 9
  - разность 8
  - сумма 6
- Градиент 124
- Девиатор 97
- Дифференциальные операторы 151
- Дифференцирование векторов 29, 129
  - тензоров 146
- Деформационная скорость 59
- Задача Дирихле 182
  - Неймана 182
- Изоповерхности 124
- Инвариантность тензорных уравнений 65
- Индексы верхние 28
  - немые 25, 28
  - нижние 28
  - Операция поднятия и опускания 73
- Инварианты тензора 96
- Источник (сток) 132, 137
- Интегральные теоремы 159
- Интенсивность вихревой трубки 200
- Координаты вектора 107
  - точки 11
- Ковариантные векторы 25, 71, 73
  - индексы 74
  - компоненты 25
  - производные 150
  - составляющие 25
  - тензоры 71
- Контравариантные векторы 25, 71, 73
  - индексы 74
  - компоненты 25
  - составляющие 25
  - тензоры 71
- Координатные линии 66
  - оси 69
  - поверхности 66, 68

- Координатная система 11
  - декартова 12, 26
  - косоугольная 12
  - криволинейная 67
  - обобщенная 69
  - ортогональная 69
  - полярная 13
  - прямоугольная 12, 67
  - сферическая 69
  - цилиндрическая 69
- Коэффициенты Лямэ 29, 70
- Кривизна кривой 193
- Кристоффеля символ второго рода 148
  - первого рода 148
- Кroneкера символ 33, 88
- Линия векторная 129, 140
- Матрица 54, 86
  - транспонированная 87
- Момент дипольный 38
  - инерции 75
  - количества движения 55
  - силы 18, 38
- Напряжения вектор 51
  - главные 97
- Оператор Гамильтона 127, 142, 151, 157
  - Лапласа 152, 158
- Область односвязная 123
- Область двухсвязная 124
  - многосвязная 124
- Плоскость собственная 97
  - соприкасающаяся 193
- Поверхность гладкая 118
  - двухсторонняя 118
  - кусочно-гладкая 118
- Поле безвихревое 175
  - векторное 115
  - Лапласово 180
  - непрерывное 115
  - не стационарное 115, 129
  - однородное 115, 151
  - потенциальное 174
  - скалярное 124
  - соленоидальное 177
  - скорости 135
  - тензорное 115
  - ускорений 144
  - электромагнитное 188
- Поток тензорного поля 145
  - векторного поля 129
- Потенциал 174
  - векторный 177, 186
  - запаздывающий 205
  - многозначный 177
- Преобразование линейное ортогональное 32
- Преобразования движения (непрерывные) 104
  - отражения 141
- Производная вектора 141
  - ковариантная 149
  - скаляра по направлению 124
  - тензора 146
- Пространство евклидово 108
  - линейное (аффинное) 108
- Пространства изотропность 46
  - метрика 26
  - однородность 46
  - размерность 180
- Псевдовектор 18
- Псевдоскаляр 106, 107
- Псевдотензор 103
  - единичный 106
- Радиус-вектор 11
- Радиус кривизны 193
  - кручения 193
- Скаляр 4, 47
- Тензор антисимметричный 86
  - девиатор 99
- Тензор деформаций 57
  - единичный 57, 88
  - ковариантный 71
  - контравариантный 71
  - моментов инерции 75
  - метрический 25, 88
  - напряжений 74
  - плотности потока импульса 170
  - симметричный 85
  - скоростей деформации 58
  - смешанный 73
  - шаровой 99
- Тензоры 2-го ранга
  - главное значение 91
  - главные оси 89
- Тензорности признак 102
- Тензорная поверхность 98
- Тензорного поля дивергенция 145
- Тензорный эллипсоид 98
- Тензоров произведение 84

- компоненты (контра)-вариантные 71
- физические 75
- ранг 4, 45
- свертывание 84
- симметрирование 87
- сложение 83
- разложение 79
- умножение 84
- характеристическое уравнение 93
- Теорема Гамильтона — Кэли 100
- Гельмгольца 200
- Жуковского 171
- Остроградского 116
- Стокса 116, 184
- Темпсона — Кельвина 203
- Фридмана 200
- Трубка вихревая 140, 200
- тока 131
- Ускорение точки 195
- локальное 167
- конвективное 167
- Уравнение неразрывности 136
- винтовой линии 193
- Лапласа 180
- Уравнения Максвелла 188
- Уравнение Навье — Стокса 167
- Пуассона 186
- сохранения векторных линий 200, 201
- сохранения циркуляции 201
- Формулы Грина 163
- Функция гармоническая 180
- тока 178
- Формулы Френе 192
- Циркуляция векторного поля 116, 200
- Эйлеровы углы 36
- Энергия 192
- вектор потока (Умова-Пойнтинга) электромагнитного поля 192

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

## Глава первая

### Основные сведения из векторной алгебры

1.1. Векторы и скаляры . . . . .	4
1.2. Сложение и вычитание векторов. Проекция вектора на ось . . . . .	6
1.3. Умножение вектора на скаляр. Линейная зависимость векторов . . . . .	9
Разложение вектора . . . . .	15
1.4. Скалярное и векторное произведения двух векторов . . . . .	19
1.5. Произведения трех векторов . . . . .	21
1.6. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора. Сокращенные обозначения . . . . .	29
1.7. Переменные векторы . . . . .	32
Задачи с решениями . . . . .	42
Упражнения . . . . .	42

## Глава вторая

### Понятие тензора и закон преобразования его компонент

2.1. Компоненты тензоров и их преобразование. Равноправность координатных систем . . . . .	45
2.2. Тензоры нулевого ранга (скаляры) . . . . .	47
2.3. Тензоры 1-го ранга (векторы) . . . . .	48
2.4. Тензоры 2-го ранга . . . . .	51
2.5. Тензоры высших рангов . . . . .	61
2.6. Преобразование компонент векторов и тензоров при повороте координатной плоскости вокруг перпендикулярной оси . . . . .	63
2.7. Инвариантность тензорных уравнений . . . . .	65
2.8. Криволинейные координаты . . . . .	66
2.9. Тензоры в системах обобщенных координат . . . . .	71
Задачи с решениями . . . . .	75
Упражнения . . . . .	81

## Глава третья

### Тензорная алгебра

3.1. Сложение тензоров . . . . .	83
3.2. Умножение тензоров . . . . .	84
3.3. Свертывание тензоров . . . . .	84
3.4. Свойство симметрии тензоров . . . . .	86
3.5. Единичный тензор. Метрический тензор . . . . .	88
3.6. Главные оси тензора. Приведение тензора к главным осям . . . . .	89

3.7. Инварианты тензора . . . . .	98
Общий вид зависимости между компонентами тензоров 2-го ранга. Теорема Гамильтона — Кэли . . . . .	100
3.8. Признак тензорности величин . . . . .	102
3.9. Псевдотензоры . . . . .	103
3.10. Линейное $n$ -мерное пространство. Векторы и тензоры в $n$ -мерном пространстве . . . . .	107
Задачи с решениями . . . . .	109
Упражнения . . . . .	112

## *Глава четвертая*

### **Векторный и тензорный анализ**

4.1. Тензорное поле. Циркуляция . . . . .	114
4.2. Теорема Остроградского и теорема Стокса . . . . .	116
4.3. Скалярное поле. Производная по направлению. Оператор $\nabla$ . . . . .	124
4.4. Векторное поле. Дивергенция и вихрь векторного поля. Дифференцирование вектора по направлению . . . . .	129
4.5. Поле тензора 2-го ранга. Поток, дивергенция и производная по направлению тензорного поля . . . . .	144
4.6. Ковариантное дифференцирование тензоров. Ковариантная производная вектора. Символы Кристоффеля . . . . .	146
4.7. Применение дифференциальных операций к различного вида векторным и скалярным функциям . . . . .	151
4.8. Интегральные теоремы векторного и тензорного анализа . . . . .	159
4.9. Потенциальное векторное поле. Скалярный потенциал . . . . .	174
4.10. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал . . . . .	177
4.11. Лапласово векторное поле. Гармонические функции . . . . .	180
4.12. Основная теорема векторного анализа . . . . .	184
Задачи с решениями . . . . .	192
Упражнения . . . . .	207
Предметный указатель . . . . .	210



*Александр Иванович Борисенко,  
Иван Евгеньевич Тарапов*

**ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И НАЧАЛА  
ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Редактор *Л. Ф. Кизилова*  
Художественные редакторы *А. С. Романова, Т. П. Воробиевко*  
Технический редактор *Л. Т. Момот*  
Корректоры *Л. А. Федоренко, А. В. Евлахова*

Информ. бланк № 3426

Сдано в набор 21.10 1977 г. Подписано в печать 12.01 1978 г. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.

Бумага типографская № 3. 13,5 усл. печ. л. 15,5 уч.-изд. л.

Тираж 3000. Изд. № 563. БЦ 09016. Зак. № 7-478. Цена 60 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003, Харьков, 3, Университетская, 16.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР.  
310057, Харьков, 57, Донец-Захаржевского, 6/8.

60 коп.



А. И. БОРИСЕНКО  
И. Е. ТАРАПОВ

