ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

С.М. Гребенюк, Ю.М. Стреляєв, М.І. Клименко

ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
напряму підготовки «Математика»

ЗАТВЕРДЖЕНО
вченою радою ЗНУ
Протокол № 12 від 23.06.2015 р.

Запоріжжя
2015

УДК: 514.743.4 (075.8)
ББК: 22.151.5 я73
Г79

Гребенюк С.М. Тензорний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика» / С.М. Гребенюк, Ю.М. Стреляєв, М.І. Клименко. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 90 с.

Навчальний посібник містить основні поняття та теореми векторного і тензорного аналізу, що передбачені навчальною та робочою програмами даного курсу. Розглянуто багато прикладів розв'язування задач, які допоможуть студентам при виконанні самостійної роботи та індивідуальних завдань. Для самостійної роботи студентів пропонуються варіанти індивідуальних завдань, які охоплюють усі основні практичні задачі курсу.

Призначається для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика».

Рецензент *С.А. Левчук*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний етап науково-технічного прогресу характеризується посиленою увагою до фундаментальних математичних дисциплін. Прикладом такої дисципліни може служити тензорне числення, яке в останній час стало звичним математичним апаратом не тільки у фізиці, механіці, геометрії, але і в ряді чисто прикладних дисциплін.

Тензорний аналіз є математичним апаратом, що дозволяє представити в найбільш загальній і компактній аналітичній формі основні операції над багатокомпонентними величинами, які застосовуються при дослідженні різних проблем геометрії й фізики. Для вивчення даної дисципліни студент повинен володіти матеріалом курсів: математичний аналіз, аналітична геометрія, лінійна алгебра.

Особливе значення тензорний аналіз має в механіці деформівних середовищ, де за його допомогою основні рівняння й закони набувають вигляд, незалежний від системи координат. Постановка основних задач теорії пружності, пластичності, в’язкопружності для тіл складної конфігурації потребує введення криволінійних систем координат, де поверхні, що обмежують тіло, описуються найбільш простим способом. Складення рівнянь, що описують рух таких об’єктів, без застосування апарата тензорного числення потребує багаторазового повторення складних і громіздких викладок у кожному окремому випадку. Застосування тензорного апарату дозволяє уникнути цих негативних явищ, і більш того, допомагає узагальнити методи розв’язання задач.

Це дозволяє створити універсальні методи, алгоритми й програми для вирішення різних проблем не тільки механіки, а й багатьох прикладних наук таких як гідромеханіка, аеродинаміка, електротехніка, радіоелектроніка, біохімія, електромагнетизм, хімія. Крім того, треба зауважити, що всі тензорні операції дуже легко й ефективно програмуються на універсальних алгоритмічних мовах для ЕОМ. Це обумовлює застосування тензорного апарату в чисельних методах.

Найпростішими тензорними величинами є скаляри, вектори, а також величини, що характеризують деформації, напруження, швидкості деформацій, пружні константи матеріалів і інші. Всі ці величини об’єднує не фізична природа, а сукупність певних математичних операцій, які складають основу тензорного числення, головною характеристикою якого є інваріантність математичних записів по відношенню до перетворення системи координат, у якій розглядається об’єкт

Основна мета даного посібника – допомогти студентам засвоїти основні поняття й методи тензорного аналізу в найбільш простій для сприймання формі, методом поступового узагальнення від окремих випадків до загальних понять. Зміст посібника потребує від студента елементарних знань із векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу. Для організації самостійної роботи студента в посібнику пропонуються варіанти індивідуальних завдань, які допоможуть засвоїти основний теоретичний й практичний матеріал.

За підсумками вивчення спеціального курсу «Тензорний аналіз» студент повинен

знати:

- основні поняття векторної алгебри;
- означення тензора;
- закон перетворення компонент тензора;
- основні системи криволінійних координат;
- основи тензорної алгебри;
- основні характеристики скалярних і векторних полів;
- інтегральні теореми векторного аналізу;
- спеціальні види векторних полів;
- правила коваріантного диференціювання тензора другого рангу.

вміти:

- знаходити контраваріантні і коваріантні компоненти вектора;
- знаходити компоненти тензора в новому базисі;
- виконувати основні операції над тензорами;
- виконувати диференціальні операції в ортогональних системах координат;
- знаходити основні характеристики скалярних і векторних полів;
- користуватись інтегральними теоремами векторного аналізу;
- знаходити скалярний потенціал потенціального поля;
- знаходити векторний потенціал соленоїдального поля;
- знаходити потік тензорного поля;
- знаходити похідну тензорного поля за напрямом;
- виконувати коваріантне диференціювання тензора другого рангу.

Автори сподіваються, що даний посібник допоможе студентам в засвоєнні основ тензорного аналізу та навчить застосувати методи тензорного числення при розв’язуванні прикладних задач, які можуть стати матеріалом для курсових і дипломних робіт.

1 ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Лінійна залежність векторів. Векторний базис

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують не всі рівні нулю скаляри $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ такі, що виконується рівність $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називають *лінійно незалежними*, якщо з рівності $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Розклад векторів. Якщо у тривимірному просторі три вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ лінійно незалежні, то будь-який вектор $\bar{b}$ цього простору може бути єдиним чином розкладений за векторами $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$:

$$\bar{b} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + c_3\bar{a}_3.$$

Векторний базис. Система будь-яких трьох впорядкованих лінійно незалежних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ називається *векторним базисом* тривимірного простору.

Якщо вектори базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ взаємно ортогональні та їх довжини рівні одиниці, то вони називаються *ортами* прямокутної декартової системи координат і позначаються $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$.

Положення точки M в просторі однозначно визначається її *радіус-вектором* $\bar{r}$, тобто вектором, проведеним із початку координат у точку M (рис.1).

У прямокутній декартовій системі координат

$$\bar{r} = x^1\bar{i}_1 + x^2\bar{i}_2 + x^3\bar{i}_3.$$

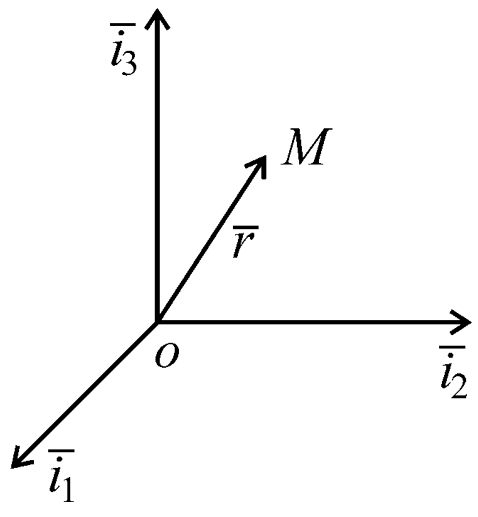

Рис. 1

Приклад 1.1. З векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ вибрати трійки векторів, що утворюють базис у R^3

$\overline{a} = \overline{i}_1 + 2\overline{i}_2 + 3\overline{i}_3,\ \overline{b} = \overline{i}_3,\ \overline{c} = 3\overline{i}_1 + 2\overline{i}_2 + \overline{i}_3,\ \overline{d} = \overline{i}_1 + \overline{i}_2 + \overline{i}_3,$

де $\overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3$ - орти прямокутної декартової системи координат.

<u>Розв’язання</u>: Три вектори, які задані в прямокутній декартовій системі координат, є лінійно незалежними, якщо визначник матриці, складеної з їхніх координат, не дорівнює нулю. Число можливих варіантів вибрати з чотирьох векторів три дорівнює $C_4^3 = 4$, тобто нам необхідно обчислити чотири визначника.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = 4 \neq 0$$

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 1 \neq 0$$

$$(\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 1 \neq 0$$

$$(\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) - 1(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 1(1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -4 + 8 - 4 = 0$$

Висновок: трійки векторів $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{d})$, $(\overline{b}, \overline{c}, \overline{d})$ утворюють базис у тривимірному просторі, а трійка $(\overline{a}, \overline{c}, \overline{d})$ – ні.

1.2 Взаємні базиси

Два базиси $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ і $(\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3)$ називаються *взаємними*, якщо їх вектори задовольняють співвідношенням

$$\overline{e}_i \cdot \overline{e}^k = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \qquad (1.1)$$

тут і в подальшому точкою позначається скалярний добуток.

З означення випливає, що кожний вектор одного базису є перпендикулярним двом векторам взаємного базису, а з третім складає гострий кут. Якщо на двох взаємних базисах побудувати паралелепіпеди з об'ємами $|V| = |\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)|$ і $|V'| = \left|\bar{e}^1 \cdot (\bar{e}^2 \times \bar{e}^3)\right|$, то ребра одного з них будуть перпендикулярні граням іншого і навпаки.

Вектори одного базису виражаються через вектори іншого за формулами

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{V}, \tag{1.2}$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{V}, \tag{1.3}$$

$$\bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{V} \tag{1.4}$$

або

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}^2 \times \bar{e}^3}{V'}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}^3 \times \bar{e}^1}{V'}, \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{e}^1 \times \bar{e}^2}{V'},$$

де $V' = \bar{e}^1 \cdot (\bar{e}^2 \times \bar{e}^3)$.

Приклад 1.2. Задано базис $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_3$, де $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – орти декартової системи координат. Знайти базис, взаємний до заданого.

<u>Розв’язання:</u> Скористаємося формулами (1.2) – (1.4)

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\bar{i}_1 - \bar{i}_2}{2} = \frac{1}{2}\bar{i}_1 - \frac{1}{2}\bar{i}_2,$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2\bar{i}_2}{2} = \bar{i}_2,$$

$$\bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2\bar{i}_3}{2} = \bar{i}_3.$$

Можна також відзначити, що обидва базиси утворюють праву систему координат, це видно з того, що визначник рівний $V = \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) = 2 > 0$, а також $V' = \bar{e}^1 \cdot \left(\bar{e}^2 \times \bar{e}^3\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$.

Помітимо, що $V \cdot V' = 1$.

Угода про підсумовування (Правило Ейнштейна)

Якщо в будь-якому буквено-індексному виразі деякий індекс зустрічається двічі: один раз – як нижній і інший раз – як верхній, то за цим індексом проводиться підсумовування. Знак суми $\sum$ при цьому опускається. Якщо підсумовування за однойменним індексом не проводиться, то цей факт буде спеціально зазначений.

Приклад 1.3. Враховуючи угоду про підсумовування, представимо у вигляді суми наступний вираз $a_{ik} b^i c^k$, $(i, k = 1,2,3)$.

$$\begin{gathered} a_{ik} b^i c^k = \sum_{k=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} a_{ik} b^i c^k) = \sum_{k=1}^{3} c^k (\sum_{i=1}^{3} a_{ik} b^i) = a_{11} b^1 c^1 + a_{21} b^2 c^1 + a_{31} b^3 c^1 + \\ a_{12} b^1 c^2 + a_{22} b^2 c^2 + a_{32} b^3 c^2 + a_{13} b^1 c^3 + a_{23} b^2 c^3 + a_{33} b^3 c^3 \end{gathered}.$$

Відзначимо дві важливі *властивості взаємних базисів*:

1) Якщо $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – базис прямокутної декартової системи координат, то взаємний базис $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)$ співпадає з основним, тобто $\bar{e}_1 = \bar{e}^1 = \bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = \bar{e}^2 = \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{e}^3 = \bar{i}_3$;

2) Взаємні базиси або обидва праві, або обидва ліві:

$$V \cdot V' = 1.$$

Розглянемо задачу про розкладання заданого вектора $\bar{B}$ по трьох довільних некомпланарних векторах $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$, тобто $\bar{B} = B^1\bar{b}_1 + B^2\bar{b}_2 + B^3\bar{b}_3$, необхідно знайти B^1, B^2, B^3. Для їх визначення помножимо скалярно рівність на $\bar{b}^i$ – вектор взаємного базису.

$$\bar{B} \cdot \bar{b}^i = B^1\bar{b}_1 \cdot \bar{b}^i + B^2\bar{b}_2 \cdot \bar{b}^i + B^3\bar{b}_3 \cdot \bar{b}^i = B^i \text{, звідси}$$

$$B^1 = \bar{B} \cdot \bar{b}^1 = \frac{\bar{B} \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3)}{\bar{b}_1 \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3)},\ B^2 = \bar{B} \cdot \bar{b}^2 = \frac{\bar{B} \cdot (\bar{b}_3 \times \bar{b}_1)}{\bar{b}_1 \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3)},$$

$$B^3 = \bar{B} \cdot \bar{b}^3 = \frac{\bar{B} \cdot (\bar{b}_1 \times \bar{b}_2)}{\bar{b}_1 \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3)}.$$

Таким чином, один і той же вектор $\bar{A}$ можна розкласти за векторами основного й взаємного базисів

$$\bar{A} = A^1\bar{e}_1 + A^2\bar{e}_2 + A^3\bar{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A^i\bar{e}_i = A^i\bar{e}_i. \quad (1.5)$$

$$\bar{A} = A_1\bar{e}^1 + A_2\bar{e}^2 + A_3\bar{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\bar{e}^i = A_i\bar{e}^i \quad (1.6)$$

Числа A^i в (1.5) називаються *контраваріантними*, а числа A_i в (1.6) – *коваріантними* компонентами вектора $\bar{A}$.

На рис. 2 наведено геометричну ілюстрацію взаємних базисів для двовимірного випадку коли вектор $\bar{A}$ лежить у площині векторів $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

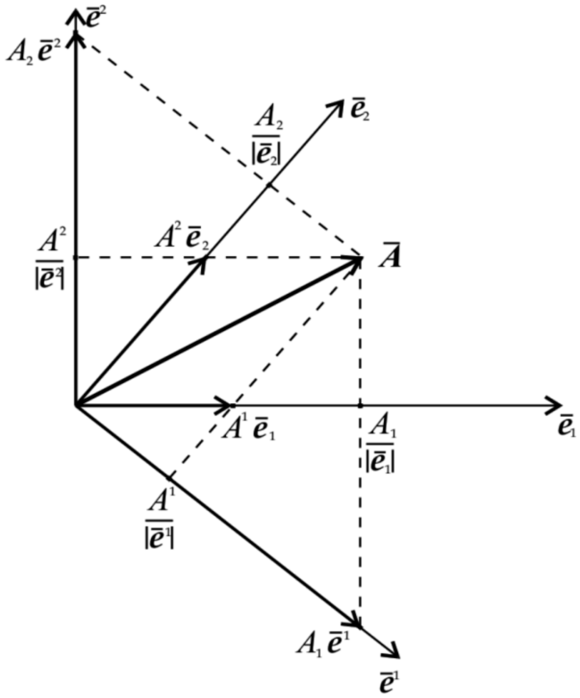

Рис. 2

Коваріантні компоненти A_1, A_2 можуть бути знайдені або за складовими $A_1 \cdot \bar{e}^1, A_2 \cdot \bar{e}^2$ вектора $\bar{A}$ за напрямами взаємного базису, або за проекціями $\frac{A_1}{|\bar{e}_1|}, \frac{A_2}{|\bar{e}_2|}$ вектора $\bar{A}$ на осі основного базису.

1.3 Закон перетворення компонент вектора

Нехай у системі координат, що визначена базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, відомі контраваріантні A^i й коваріантні A_i компоненти вектора $\bar{A}$. Визначимо в іншій системі координат із базисом $(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'})$ контраваріантні $A^{i'}$ й коваріантні $A_{i'}$ компоненти того ж вектора $\bar{A}$. Для цього помножимо обидві частини рівності $\bar{A} = A_k \bar{e}^k$ на вектор $\bar{e}_{i'}$, отримаємо $\bar{A} \cdot \bar{e}_{i'} = A_k (\bar{e}^k \cdot \bar{e}_{i'})$, звідси, враховуючи (1.1), маємо $A_{i'} = A_k (\bar{e}^k \cdot \bar{e}_{i'})$, або

$$A_{i'} = A_k \alpha_{i'}^k, \text{ де } \alpha_{i'}^k = (\bar{e}^k \cdot \bar{e}_{i'}). \tag{1.7}$$

Формула (1.7) виражає закон перетворення коваріантних компонент вектора $\bar{A}$ при переході до нової системи координат.

Аналогічно, помножаючи рівність (1.5) на $\bar{e}^{i'}$, отримаємо закон перетворення контраваріантних компонент вектора $\bar{A}$

$$A'^i = A^k \cdot \alpha_k^{i'}, \text{ де } \alpha_k^{i'} = (\bar{e}_k \cdot \bar{e}^{i'}). \tag{1.8}$$

Аналогічно (1.7), (1.8) можна записати і зворотні закони перетворення компонент вектора $\overline{A}$

$$A_i = \alpha_i^{k'} A_{k'}, \quad A^i = \alpha_{k'}^i A^{k'} \tag{1.9}$$

Відзначимо, що закони перетворення (1.7) – (1.9) лежать в основі аналітичного означення вектора.

Приклад 1.4 Задано векторний базис $\bar{e}_1 = \bar{i}_1, \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2, \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3$, який приймається за основний. Знайти $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)$ – взаємний базис до базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, а також розкласти вектор $\overline{b} = 2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3$ за векторами основного й взаємного базисів.

<u>Розв’язання</u>: Знайдемо взаємний базис за формулами (1.2) – (1.4)

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \bar{i}_2 - \bar{i}_3$$

$$\bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \bar{i}_3$$

Знайдемо контраваріантні компоненти вектора $\overline{b}$ в основному базисі. Для цього помножимо скалярно вектор $\overline{b}$ на вектори взаємного базису. Враховуючи (1.1), отримаємо

$$b^1 = \overline{b} \cdot \bar{e}^1 = (2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3)(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) = 2 + 3 = 5,$$

$$b^2 = \bar{b} \cdot \bar{e}^2 = (2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3)(\bar{i}_2 - \bar{i}_3) = -3 - 1 = -4,$$

$$b^3 = \bar{b} \cdot \bar{e}^3 = (2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3)(\bar{i}_3) = 1,$$

звідси $$\bar{b} = 5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Тепер знайдемо розклад вектора $\bar{b}$ за взаємним базисом, тобто коваріантні компоненти вектора $\bar{b}$, які виражаються через проекції вектора $\bar{b}$ на вектори основного базису

$$b_1 = \bar{b} \cdot \bar{e}_1 = (2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3) \cdot \bar{i}_1 = 2,$$

$$b_2 = \bar{b} \cdot \bar{e}_2 = (2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3) \cdot (\bar{i}_1 + \bar{i}_2) = -1,$$

$$b_3 = \bar{b} \cdot \bar{e}_3 = (2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3) \cdot (\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3) = 0.$$

Звідси маємо розклад

$$\bar{b} = 2\bar{e}^1 - \bar{e}^2.$$

1.4 Зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами вектора

Виразимо коваріантні компоненти вектора $\bar{A}$ через контраваріантні й навпаки, для цього помножимо вираз $\bar{A} = A^k \bar{e}_k$ на $\bar{e}_i$ і $\bar{A} = A_k \bar{e}^k$ на $\bar{e}^i$. Отримаємо

$$\bar{A} \cdot \bar{e}_i = A^k (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) \qquad \text{і} \qquad \bar{A} \cdot \bar{e}^i = A_k (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^i).$$

Позначимо

$$(\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) \equiv g_{ki} = g_{ik}, \quad (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^i) \equiv g^{ki} = g^{ik}, \tag{1.10}$$

$$\bar{e}^k \cdot \bar{e}_i \equiv g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \tag{1.11}$$

Тоді отримаємо формули

$$A_i = g_{ki} A^k, \quad A^i = g^{ki} A_k, \tag{1.12}$$

які і виражають шукану залежність.

Відзначимо, що дев'ять величин g_{ki} утворюють *метричний тензор*, який визначає метрику простору – основну характеристику будь-якої системи координат.

Зв'язок між різними типами компонент метричного тензора g_{ik} і g^{ki} отримаємо, розв'язавши систему рівнянь $A_i = g_{ik} A^k$ відносно A^k і підставивши розв'язок у вираз $A^i = g^{ik} A_k$, звідси $A^i = \dfrac{G^{ik} A_k}{G}$, де $G = \det\|g_{ik}\|$, G^{ik} – алгебраїчне доповнення, відповідне елементу g_{ik} детермінанта G.

$G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{mn} & g_{ml} \\ g_{pn} & g_{pl} \end{vmatrix}$, (i, m, p) і (k, n, l) складають циклічну перестановку чисел $(1,2,3)$.

Таким чином $g^{ik} A_k = A^i = \dfrac{G^{ik} A_k}{G}$, звідси

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G}. \tag{1.13}$$

Аналогічно

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \tag{1.14}$$

де $G' = \det\|g^{ik}\|$, $G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{mn} & g^{ml} \\ g^{pn} & g^{pl} \end{vmatrix}$.

З іншого боку

$$g^{ik} = (\bar{e}^i, \bar{e}^k) = \frac{\bar{e}_p \times \bar{e}_r}{V} \cdot \frac{\bar{e}_s \times \bar{e}_t}{V} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} \bar{e}_p \bar{e}_s & \bar{e}_p \bar{e}_t \\ \bar{e}_r \bar{e}_s & \bar{e}_r \bar{e}_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix},$$

звідси $G = V^2$, $G \cdot G' = 1$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах основного базису, дорівнює $\sqrt{G}$, а на векторах взаємного базису – $\sqrt{G'}$.

1.5 Ортогональні базиси

Базис називають *ортогональним*, якщо його вектори попарно перпендикулярні. Для ортогонального базису основний базис співпадає з взаємним, звідки випиває, що матриця метричного тензора g_{ik} має діагональний вигляд, тобто відмінні від нуля тільки g_{11}, g_{22}, g_{33}. З формул (1.12), що зв'язують коваріантні й контраваріантні компоненти вектора маємо $A_1 = g_{11}A^1$, $A_2 = g_{22}A^2$, $A_3 = g_{33}A^3$ і $A^1 = g^{11}A_1$, $A^2 = g^{22}A_2$, $A^3 = g^{33}A_3$. Звідси отримаємо: $g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}}$; $g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}}$; $g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}}$, а також

$$\Delta s^2 = g_{11}\left(\Delta x^1\right)^2 + g_{22}\left(\Delta x^2\right)^2 + g_{33}\left(\Delta x^3\right)^2.$$

Позначимо $H_1 = \sqrt{g_{11}}$, $H_2 = \sqrt{g_{22}}$, $H_3 = \sqrt{g_{33}}$, ці величини називаються *коефіцієнтами Ламе*.

У прямокутній декартовій системі координат $g^{ii} = g_{ii} = 1$, тобто коваріантні й контраваріантні компоненти вектора співпадають і $H_i = 1$.

Приклад 1.5. Виразити скалярний і векторний добуток двох векторів у косокутній системі координат.

Розв’язання. Нехай $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – базис довільної системи координат. $\bar{A} = A^i\bar{e}_i$, $\bar{B} = B^j\bar{e}_j$ – розкладення векторів $\bar{A}, \bar{B}$ за цим базисом. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{A}\cdot\bar{B} = A^i\bar{e}_i \cdot B^j\bar{e}_j = A^iB^j\left(\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j\right) = g_{ij}A^iB^j$.

Якщо ввести взаємний базис $\left(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\right)$, то можна отримати формули:

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A^i\bar{e}_i \cdot B_j\bar{e}^j = (\bar{e}_i\cdot\bar{e}^j)A^iB_j = \delta_i^jA^iB_j = A^iB_i;$$

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_i\bar{e}^i \cdot \bar{B}_j\bar{e}^j = g^{ij}A_iB_j;$$

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_i\bar{e}^i \cdot \bar{B}^j\bar{e}_j = A_iB^i.$$

З отриманих формул, можна виразити модуль вектора й косинус кута між векторами

$$\left|\bar{A}\right| = \sqrt{\bar{A}\cdot\bar{A}} = \sqrt{g_{ik}A^iA^k} = \sqrt{g^{ik}A_iA_k} = \sqrt{A_iA^i},$$

$$\cos(\bar{A},\bar{B}) = \frac{g_{ik}A^iB^k}{\sqrt{g_{ik}A^iA^k}\sqrt{g_{ik}B^iB^k}} = \frac{g^{ik}A_iB_k}{\sqrt{g^{ik}A_iA_k}\sqrt{g^{ik}B_iB_k}} = \frac{A_iB^i}{\sqrt{A_iA^i}\sqrt{B_iB^i}}.$$

Знайдемо тепер вираз для векторного добутку.

$$\overline{A}\times\overline{B}=A^j\bar{e}_j\times B^i\bar{e}_i=(A^1\bar{e}_1+A^2\bar{e}_2+A^3\bar{e}_3)\times(B^1\bar{e}_1+B^2\bar{e}_2+B^3\bar{e}_3)=$$

$$=A^1B^1(\bar{e}_1\times\bar{e}_1)+A^1B^2(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)+A^1B^3(\bar{e}_1\times\bar{e}_3)+A^2B^1(\bar{e}_2\times\bar{e}_1)+$$

$$+A^2B^2(\bar{e}_2\times\bar{e}_2)+A^2B^3(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)+A^3B^1(\bar{e}_3\times\bar{e}_1)+A^3B^2(\bar{e}_3\times\bar{e}_2)+$$

$$+A^3B^3(\bar{e}_3\times\bar{e}_3)=A^1B^2(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)-A^2B^1(\bar{e}_1\times\bar{e}_2)+A^3B^1(\bar{e}_3\times\bar{e}_1)-$$

$$-A^1B^3(\bar{e}_3\times\bar{e}_1)+A^2B^3(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)-A^3B^2(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)=(A^iB^j-A^jB^i)(\bar{e}_i\times\bar{e}_j),$$

але $\bar{e}^k=\dfrac{\bar{e}_i\times\bar{e}_j}{V}=\dfrac{\bar{e}_i\times\bar{e}_j}{\sqrt{G}}\Rightarrow\bar{e}_i\times\bar{e}_j=\bar{e}^k\sqrt{G}$, звідси $\overline{A}\times\overline{B}=C_k\bar{e}^k$, де

$$C_k=\sqrt{G}\,(A^iB^j-A^jB^i).$$

Індекси (k,i,j) складають циклічну перестановку чисел $(1,2,3)$.

Аналогічно отримаємо $C^k=\dfrac{1}{\sqrt{G}}(A_iB_j-A_jB_i)$.

Приклад 1.6. В системі координат із базисом $\bar{e}_1=\bar{i}_1,\bar{e}_2=\bar{i}_1+\bar{i}_2,\bar{e}_3=\bar{i}_3$ знайти компоненти метричного тензора g_{ij}, а також кут між векторами $\bar{a}=2\bar{e}_1+\bar{e}_2,\ b=3\bar{e}_3$.

<u>Розв’язання</u>: Знайдемо $g_{ik}=(\bar{e}_i\cdot\bar{e}_k)$.

$g_{11}=\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1=\bar{i}_1\cdot\bar{i}_1=1,\ g_{12}=\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2=\bar{i}_1\cdot(\bar{i}_1+i_2)=1,$
$g_{13}=\bar{e}_1\cdot\bar{e}_3=\bar{i}_1\cdot\bar{i}_3=0,\ g_{21}=g_{12}=1,\ g_{22}=\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2=(\bar{i}_1+\bar{i}_2)\cdot(\bar{i}_1+\bar{i}_2)=2,$
$g_{23}=\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3=(\bar{i}_1+\bar{i}_2)\cdot\bar{i}_3=0,\ g_{31}=g_{13}=0,\ g_{32}=g_{23}=0,$
$g_{33}=\bar{e}_3\cdot\bar{e}_3=\bar{i}_3\cdot\bar{i}_3=1$. Звідси

$$\|g_{ik}\|=\begin{Vmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{Vmatrix}.$$

За формулами із попереднього прикладу знайдемо скалярний добуток векторів $\bar{a},\bar{b}$ і кут між ними

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=g_{ik}a^ib^k=g_{11}a^1b^1+g_{12}a^1b^2+g_{13}a^1b^3+g_{21}a^2b^1+g_{22}a^2b^2+g_{23}a^2b^3+$$

$$+g_{31}a^3b^1+g_{32}a^3b^2+g_{33}a^3b^3=1\cdot2\cdot0+1\cdot2\cdot0+0\cdot2\cdot3+1\cdot1\cdot0+2\cdot1\cdot0+0\cdot1\cdot3+$$

$$+0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot0+1\cdot0\cdot3=0\Rightarrow\cos(\bar{a},\bar{b})=0.$$

Отже, вектор $\bar{a}$ є ортогональним до вектора $\bar{b}$.

Перевіримо цей результат у прямокутній декартовій системі координат

$$\bar{a}=2\bar{e}_1+\bar{e}_2=2\bar{i}_1+\bar{i}_1+\bar{i}_2=3\bar{i}_1+\bar{i}_2,\ b=3\bar{e}_3=3\bar{i}_3,\ \bar{a}\cdot\bar{b}=(3\bar{i}_1+\bar{i}_2)3\bar{i}_3=0.$$

1.6 Криволінійні координати

Положення точки M в тривимірному просторі однозначно визначається її радіус-вектором $\bar{r}$ відносно деякої точки O. Цей вектор можна визначити трьома числами (координатами) q^1, q^2, q^3, які повинні змінюватись в залежності від положення точки M у просторі. Спосіб визначення чисел q^1, q^2, q^3 для будь-якого положення точки M у просторі визначає систему координат у цьому просторі.

Поставимо у відповідність кожній точці M у простору єдиний набір чисел q^1, q^2, q^3. Припустимо, що кожне з цих чисел змінюється за неперервним законом в залежності від положення точки M у простору. Зафіксуємо q^1 і будемо довільно змінювати числа q^2, q^3 в межах їх області визначення. Отримані таким чином точки утворюватимуть деяку поверхню у просторі. Якщо надавати фіксованому числу q^1 усі можливі значення, то отримаємо множину таких поверхонь. Аналогічно можна отримати такі множини поверхонь, фіксуючи числа q^2 та q^3. Припустимо тепер, що ці поверхні такі, що через кожну точку M простору проходить одна і лише одна поверхня кожного сімейства. Тоді положення точки M однозначно визначається точкою перетину трьох поверхонь. Ці поверхні мають назву *координатних поверхонь,* а числа q^1, q^2, q^3, що задають ці координатні поверхні, називаються *криволінійними координатами* точки M. Лінії перетину пар координатних поверхонь називаються *координатними лініями* (рис. 3).

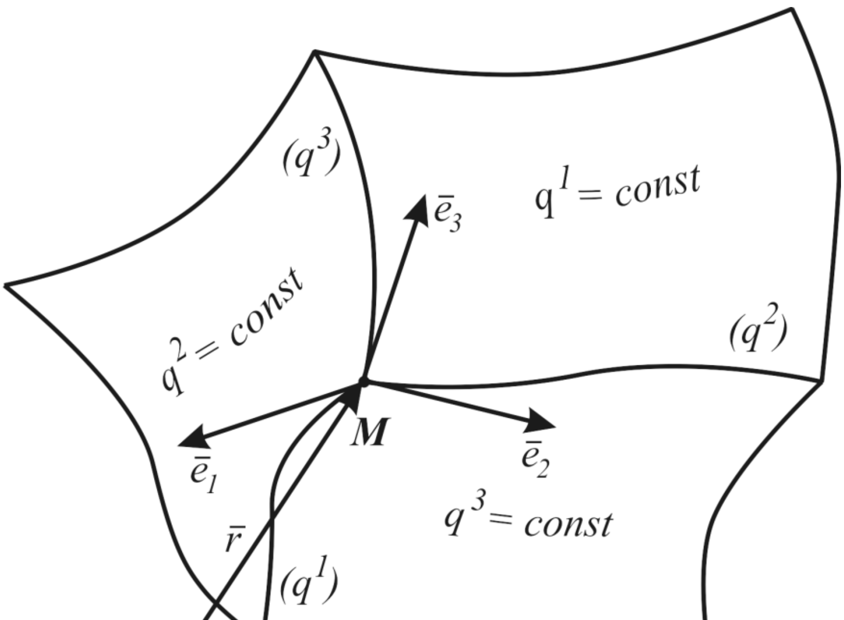

Рис. 3

Вид координатних поверхонь і ліній залежить від способу визначення криволінійних координат q^1, q^2, q^3.

У криволінійній системі координат вводять *локальний базис* $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, вектори якого дотичні до відповідних координатних ліній і направлені у бік зростання координат. Базисні вектори криволінійної системи координат залежать від точки M, тому базис називають локальним.

Якщо вектори локального базису взаємно перпендикулярні, то *система координат* називається *ортогональною*.

Основною характеристикою будь-якої системи координат є її метрика, тобто квадрат елементарної дуги

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k. \tag{1.15}$$

Визначимо основні елементи простору із системою координат q^1, q^2, q^3.

1) Елемент дуги уздовж координатної лінії q^i

$$ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \text{ (немає суми по } i\text{)}. \tag{1.16}$$

2) Елемент площі в координатній поверхні $q^i = const$

$$d\sigma_i = \sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}{}^2} dq^j dq^k, \tag{1.17}$$

де i, j, k - складають парну перестановку чисел 1,2,3.

3) Елемент об'єму

$$dV = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3, \tag{1.18}$$

де $G = \det\|g_{ik}\|$.

Особливо важливим є випадок ортогональних координат

$$ds^2 = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2, \tag{1.19}$$

де $H_1 = \sqrt{g_{11}}, H_2 = \sqrt{g_{22}}, H_3 = \sqrt{g_{33}}$ – коефіцієнти Ламе.

Елементи простору в ортогональній системі координат:

1) $ds_i = H_i dq^i$ (немає суми по *i*);

2) $d\sigma_i = H_j H_k dq_j dq_k$ (немає суми по j, k); (1.20)

3) $dV = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3$.

За формулою (1.15) легко виразити квадрат елементарної дуги в *декартовій, циліндричній* і *сферичній* системах координат:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2;$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

З отриманих виразів видно, що у прямокутній декартовій системі координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, у циліндричній $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\varphi = r$, $H_3 = H_z = 1$, у сферичній $H_1 = H_\rho = 1$, $H_2 = H_\theta = \rho$, $H_3 = H_\varphi = \rho \sin \theta$.

<u>Зв'язок з прямокутними декартовими координатами.</u>

Якщо у просторі крім системи координат q^1, q^2, q^3 увести ще й прямокутну декартову систему координат x_1, x_2, x_3, то для встановлення прямої та зворотної залежності одних координат від інших отримаємо відповідно по три скалярні функції

$$x_1 = x_1(q^1, q^2, q^3), \quad x_2 = x_2(q^1, q^2, q^3), \quad x_3 = x_3(q^1, q^2, q^3);$$

$$q^1 = q^1(x_1, x_2, x_3), \quad q^2 = q^2(x_1, x_2, x_3), \quad q^3 = q^3(x_1, x_2, x_3).$$

Передбачається, що якобіан $I = \det \left\| \dfrac{\partial x_i}{\partial q^j} \right\| \neq 0$.

У випадку *циліндричних* координат маємо:

$$q^1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad q^2 = \varphi = arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad q^3 = z = x_3;$$

$$x_1 = r \cos\varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z.$$

У разі *сферичних* координат:

$$q^1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad q^2 = \theta = arctg \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \quad q^3 = \varphi = arctg \frac{x_2}{x_1};$$

$$x_1 = \rho \sin \theta \cos\varphi, \quad x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \rho \cos\theta.$$

Далі знайдемо вирази для векторів локального базису і компонент метричного тензору в довільній системі координат, для цього обчислимо повний диференціал радіус-вектора

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^3} dq^3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} dq^i.$$

Звідси знайдемо вираз для квадрата елементарної дуги

$$ds^2 = (d\bar{r}, d\bar{r}) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} dq^i \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k} dq^k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k} dq^i dq^k .$$

Звідси, враховуючи (1.10), (1.15), отримаємо вирази для векторів локального базису

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} \qquad (1.21)$$

і компонент метричного тензора

$$g_{ik} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial x_p}{\partial q^i} \frac{\partial x_p}{\partial q^k} \text{ (сума по } p\text{)}, \qquad (1.22)$$

де $x_p = x_p(q^1, q^2, q^3)$, $\bar{r} = x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$.

У випадку ортогональних координат, маємо наступну формулу для коефіцієнтів Ламе

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2} \qquad (1.23)$$

Приклад 1.7 Виразити вектори локального базису циліндричної системи координат через базис прямокутної декартової системи координат, і навпаки. Записати вектор $\bar{A} = \dfrac{x_1\bar{i}_1 - x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ у циліндричній системі координат.

Розв'язання: За формулою (1.21) знайдемо

$$\bar{e}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3) = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi\bar{i}_1 + r\sin\varphi\bar{i}_2 + z\bar{i}_3) = \cos\varphi\bar{i}_1 + \sin\varphi\bar{i}_2,$$

$$\bar{e}_\varphi = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\varphi\bar{i}_1 + r\sin\varphi\bar{i}_2 + z\bar{i}_3) = -r\sin\varphi\bar{i}_1 + r\cos\varphi\bar{i}_2,$$

$$\bar{e}_z = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(r\cos\varphi\bar{i}_1 + r\sin\varphi\bar{i}_2 + z\bar{i}_3) = \bar{i}_3,$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x_1}{r} = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{x_2}{r} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

Остаточно, $\bar{e}_r = \dfrac{x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\bar{e}_\varphi = -x_2\bar{i}_1 + x_1\bar{i}_2$, $\bar{e}_z = \bar{i}_3$.

Розв'язуючи отриману систему відносно $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$, одержимо

$$\bar{i}_1 = \cos\varphi\,\bar{e}_r - \frac{\sin\varphi}{r}\bar{e}_\varphi,\ \ \bar{i}_2 = \frac{\cos\varphi}{r}\bar{e}_\varphi - \sin\varphi\,\bar{e}_r,\ \ \bar{i}_3 = \bar{e}_z .$$

Користуючись цими формулами, отримаємо представлення вектора $\bar{A}$ в циліндричних координатах.

$$\bar{a}=\frac{r\cos\varphi(\cos\varphi\bar{e}_r-\frac{\sin\varphi}{r}\bar{e}_\varphi)-r\sin\varphi(\sin\varphi\bar{e}_r-\frac{\cos\varphi}{r}\bar{e}_\varphi)+z\bar{e}_z}{r}=$$

$$=\frac{(r\cos^2\varphi-r\sin^2\varphi)\bar{e}_r-2\cos\varphi\sin\varphi\bar{e}_\varphi+z\bar{e}_z}{r}=\cos2\varphi\bar{e}_r-\frac{\sin2\varphi}{r}\bar{e}_\varphi+\frac{z}{r}\bar{e}_z.$$

Приклад 1.8 Система координат (q^1,q^2,q^3) пов'язана з прямокутною декартовою системою координат (x_1,x_2,x_3) формулами

$$\begin{cases} x_1=(q^1)^2+q^2-q^3 \\ x_2=-q^1+(q^2)^2+q^3 \\ x_3=q^1-q^2+(q^3)^2 \end{cases}$$

Знайти

1) вектори локального базису;
2) коваріантні компоненти метричного тензора;
3) кути між базисними векторами і їх довжину.

<u>Розв’язання</u>:

1) Знайдемо вектори базису за формулою (1.21)

$$\bar{e}_1=\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^1}=\frac{\partial}{\partial q^1}(x_1\bar{i}_1+x_2\bar{i}_2+x_3\bar{i}_3)=2q^1\bar{i}_1-\bar{i}_2+\bar{i}_3,$$

$$\bar{e}_2=\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^2}=\frac{\partial}{\partial q^2}(x_1\bar{i}_1+x_2\bar{i}_2+x_3\bar{i}_3)=\bar{i}_1+2q^2\bar{i}_2-\bar{i}_3,$$

$$\bar{e}_3=\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^3}=\frac{\partial}{\partial q^3}(x_1\bar{i}_1+x_2\bar{i}_2+x_3\bar{i}_3)=-\bar{i}_1+\bar{i}_2+2q^3\bar{i}_3.$$

2) Коваріантні компоненти метричного тензора знайдемо за формулою (1.10):

$$g_{11}=(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1)=4(q^1)^2+2;$$

$$g_{12}=g_{21}=(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2)=2q^1-2q^2-1;$$

$$g_{13}=g_{31}=(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_3)=-2q^1-1+2q^3;$$

$$g_{22}=(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2)=2+4(q^2)^2;$$

$$g_{23}=g_{32}=(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3)=-1+2q^2-2q^3;$$

$$g_{33}=(\bar{e}_3\cdot\bar{e}_3)=2+4(q^3)^2.$$

Запишемо відповідь у вигляді матриці

$$\|g_{ik}\| = \begin{pmatrix} 4(q^1)^2+2 & 2q^1-2q^2-1 & -2q^1-1+2q^3 \\ 2q^1-2q^2-1 & 2+4(q^2)^2 & -1+2q^2-2q^3 \\ -2q^1-1+2q^3 & -1+2q^2-2q^3 & 2+4(q^3)^2 \end{pmatrix}.$$

3) Знайдемо косинуси кутів між базисними векторами і їх довжини

$$\cos(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2}{|\bar{e}_1|\cdot|\bar{e}_2|} = \frac{2q^1-2q^2-1}{\sqrt{4(q^1)^2+2}\cdot\sqrt{4(q^2)^2+2}},$$

$$\cos(\bar{e}_2,\bar{e}_3) = \frac{\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3}{|\bar{e}_2|\cdot|\bar{e}_3|} = \frac{-1+2q^2-2q^3}{\sqrt{4(q^2)^2+2}\cdot\sqrt{4(q^3)^2+2}},$$

$$\cos(\bar{e}_3,\bar{e}_1) = \frac{\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1}{|\bar{e}_3|\cdot|\bar{e}_1|} = \frac{-2q^1-1+2q^3}{\sqrt{4(q^1)^2+2}\cdot\sqrt{4(q^3)^2+2}}.$$

З отриманих виразів видно, що в довільній точці тривимірного простору базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ не є ортогональним і довжини векторів не рівні одиниці.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення скаляра та вектора. Наведіть фізичні приклади скалярних і векторних величин.

2. Скільки чисел потрібно для однозначного визначення вектора на площині? Відповідь обґрунтуйте.

3. Сформулюйте означення лінійно залежних і незалежних векторів.

4. Доведіть, що будь-які три вектори на площині є лінійно залежними.

5. Сформулюйте означення векторного базису. Які вектори називають ортами? Який вектор називають радіус-вектором точки?

6. Сформулюйте означення взаємного базису та його основні властивості. Як визначаються коваріантні й контраваріантні координати вектора?

7. У чому полягає правило Ейнштейна?

8. За яким законом змінюються компоненти вектора при переході до нової системи координат? Сформулюйте аналітичне означення вектора.

9. Запишіть формули, які зв'язують коваріантні й контраваріантні компоненти вектора. Що таке метричний тензор?

10. Як задається криволінійна система координат у тривимірному просторі?

11. Запишіть формули для основних елементів простору у довільній криволінійній системі координат.

12. Як визначається циліндрична система координат? Запишіть формули зв'язку циліндричних і прямокутних декартових координат.

13. Як визначається сферична система координат? Запишіть формули зв'язку сферичних і прямокутних декартових координат.

14. Визначить і побудуйте координатні поверхні та координатні лінії циліндричної і сферичної системи координат.

15. Запишіть формулу для векторів локального базису довільної криволінійної системи координат.

16. Які системи координат називають ортогональними? Наведіть приклади ортогональних та не ортогональних систем координат.

Індивідуальне завдання №1

1. Задано вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в прямокутній декартовій системі координат із базисом $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$.

Знайти:

а) кути, які утворюють вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ з осями координат;

б) кут між векторами $\bar{m}$ і $\bar{n}$ де $\bar{m} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, $\bar{n} = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$;

в) проекції вектора $\bar{a}$ на напрями векторів $\bar{b}, \bar{c}$.

2. Переконатись, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі та знайти координати вектора $\bar{d}$ в цьому базисі.

3. Задано базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, вектори якого виражені через орти прямокутної декартової системи координат $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$.

Визначити:

а) праву або ліву систему координат утворює базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$;

б) вектори взаємного базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$.

в) об'єми паралелепіпедів побудованих на векторах основного й взаємного базисів.

г) коваріантні і контраваріантні компоненти вектора $\bar{a}$.

4. В базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ знайти контраваріантні компоненти метричного тензора, а також кут між векторами $\bar{a}, \bar{b}$.

5. В базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ тривимірного простору задано коваріантний метричний тензор G і вектори $\bar{a}, \bar{b}$.

Знайти:

а) контраваріантні компоненти g^{ij} тензора G.

б) добутки $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (скалярний), $\bar{a} \times \bar{b}$ (векторний), кут між векторами $\bar{a}, \bar{b}$;

г) коваріантні компоненти векторів $\bar{a},\bar{b}$.

6. Для системи координат (q^1, q^2, q^3), пов'язаної з декартовими координатами (x_1, x_2, x_3) заданими співвідношеннями, знайти:

а) вектора локального базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$;

б) довжини базисних векторів і кути між ними;

в) коваріантні і контраваріантні компоненти метричного тензора.

7. Перетворити координати векторів $\bar{a},\bar{b}$ до циліндричних і сферичних координат.

Варіант 1

1. $\bar{a} = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3,\ \bar{b} = 3\bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{c} = 2\bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 4\bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = \bar{i}_1,\ \bar{b} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{c} = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_3,\ \bar{d} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + \bar{i}_3.$
3. $\bar{e}_1 = -4\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = 3\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = 2\bar{i}_3,\ \bar{a} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_3,\ \bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_3,\ \bar{b} = 3\bar{e}_2.$
5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{Vmatrix},\ \bar{a} = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{b} = 4\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3.$
6. $x_1 = 2q^1 \cos q^2,\ x_2 = 3q^1 \sin q^2, x_3 = q^3.$
7. $\bar{a} = (x_1^2 + x_2^2)\bar{i}_2 - 3x_3\bar{i}_3,\ \bar{b} = (x_1^2 - x_2^2)\bar{i}_1 + \bar{i}_3.$

Варіант 2

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3,\ \bar{b} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 7\bar{i}_3,\ \bar{c} = \bar{i}_2 + 6\bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = 3\bar{i}_1 - \bar{i}_2,\ \bar{b} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{c} = 7\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2,\ \bar{d} = 4\bar{i}_1 - 2\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3.$
3. $\bar{e}_1 = \bar{i}_1,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{a} = 7\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = 3\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{a} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3,$
   $\bar{b} = 7\bar{e}_2 - \bar{e}_3.$
5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix},\ \bar{a} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3,\ \bar{b} = \bar{e}_1 - 7\bar{e}_3.$
6. $x_1 = \left(q^1\right)^2 + \left(q^3\right)^2,\ x_2 = \left(q^1\right)^2 - \left(q^2\right)^2, x_3 = \left(q^2\right)^2 - \left(q^3\right)^2.$
7. $\bar{a} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\bar{i}_1 - 3x_2\bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{b} = 2\bar{i}_1 + x_1x_2\bar{i}_3.$

Варіант 3

1. $\bar{a} = \bar{i}_3,\ \bar{b} = 3\bar{i}_2 - 7\bar{i}_3,\ \bar{c} = 3\bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 6\bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{b} = -\bar{i}_3,\ \bar{c} = 5\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3,\ \bar{d} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 + 7\bar{i}_3.$
3. $\bar{e}_1 = -\bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 5\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{a} = 3\bar{i}_1 - 4\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = -4\bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1,\ \bar{a} = \bar{e}_1 + 7\bar{e}_3,$
   $\bar{b} = 3\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - 8\bar{e}_3.$
5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{Vmatrix},\ \bar{a} = \bar{e}_1 - 6\bar{e}_2,\ \bar{b} = \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3.$
6. $x_1 = 2q^1 \sin q^2 \cos q^3,\ x_2 = q^1 \sin q^2 \sin q^3, x_3 = q^1 \cos q^3.$
7. $\bar{a} = (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)\bar{i}_2 - 2\bar{i}_3,\ \bar{b} = x_1 x_3^2 \bar{i}_2.$

Варіант 4

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 - 4\bar{i}_2 + 7\bar{i}_3,\ \bar{b} = 3\bar{i}_2 - 9\bar{i}_3,\ \bar{c} = -8\bar{i}_1 + 9\bar{i}_2 - \bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{b} = 2\bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{c} = 7\bar{i}_1 - \bar{i}_3,\ \bar{d} = \bar{i}_1.$
3. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_2 + 6\bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_3,\ \bar{a} = -7\bar{i}_1 + 6\bar{i}_2 + \bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_1,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_2 - 7\bar{i}_3,\ \bar{e}_3 = 5\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3,\ \bar{a} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3,$
   $\bar{b} = 5\bar{e}_1 - 6\bar{e}_3.$
5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix},\ \bar{a} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 8\bar{e}_3,\ \bar{b} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2.$
6. $x_1 = 3q^1 \cos q^2 \cos q^3,\ x_2 = 2q^1 \cos q^2 \sin q^3, x_3 = q^1 \sin q^3.$
7. $\bar{a} = 2x_1 x_2 x_3 \bar{i}_1 + 2x_3 \bar{i}_3,\ \bar{b} = (x_1^2 + x_2^2)\bar{i}_3 - 3\bar{i}_2.$

Варіант 5

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_3,\ \bar{b} = 6\bar{i}_1 - 2\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{c} = 8\bar{i}_2 - 3\bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{b} = 4\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{c} = 8\bar{i}_1,\ \bar{d} = 3\bar{i}_1 + 7\bar{i}_2.$
3. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = 6\bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = 3\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{a} = 7\bar{i}_1 - 6\bar{i}_2 + 9\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_1 + 11\bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + 7\bar{i}_2 + 6\bar{i}_3,\ \bar{a} = 3\bar{e}_1 - 8\bar{e}_3,$
   $\bar{b} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3.$

5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{a} = 11\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3$.

6. $x_1 = 2q^1 q^3 \cos q^2$, $x_2 = 2q^1 q^3 \sin q^2$, $x_3 = \left(q^1\right)^2 - \left(q^3\right)^2$.

7. $\bar{a} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} \bar{i}_1 - 3x_1^2 x_3^3 \bar{i}_2$, $\bar{b} = (x_1 - 2x_2^2)\bar{i}_2 + \left(x_1^2 + x_3^2 - 2x_1 x_3\right)\bar{i}_3$.

Варіант 6

1. $\bar{a} = 7\bar{i}_2 - 14\bar{i}_3$, $\bar{b} = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + 6\bar{i}_3$, $\bar{c} = \bar{i}_2 - \bar{i}_3$.
2. $\bar{a} = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - 3\bar{i}_3$, $\bar{b} = 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$, $\bar{c} = 2\bar{i}_3$, $\bar{d} = -\bar{i}_1 + 4\bar{i}_2$.
3. $\bar{e}_1 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{e}_2 = -\bar{i}_1$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_2 + 4\bar{i}_3$, $\bar{a} = 3\bar{i}_2 + 8\bar{i}_3$.
4. $\bar{e}_1 = \bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_3$, $\bar{a} = 7\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_1 - 4\bar{e}_3$.
5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{a} = 3\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 - \bar{e}_3$.
6. $x_1 = 4q^1 q^3 \cos q^2$, $x_2 = q^1 q^3 \sin q^2$, $x_3 = \left(q^1\right)^2 - \left(q^3\right)^2$.
7. $\bar{a} = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\bar{i}_1 - 2x_1 x_2 \bar{i}_2$, $\bar{b} = \dfrac{\bar{i}_1 + x_1\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Варіант 7

1. $\bar{a} = 5\bar{i}_1 + 6\bar{i}_2 - 7\bar{i}_3$, $\bar{b} = -\bar{i}_1 + \bar{i}_3$, $\bar{c} = 2\bar{i}_2 - 9\bar{i}_3$.
2. $\bar{a} = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{b} = -\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3$, $\bar{c} = 7\bar{i}_3$, $\bar{d} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$.
3. $\bar{e}_1 = -\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_2 = 3\bar{i}_1$, $\bar{e}_3 = 4\bar{i}_3$, $\bar{a} = -5\bar{i}_1 + 6\bar{i}_2 - 9\bar{i}_3$.
4. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3$, $\bar{a} = 6\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{b} = -\bar{e}_3$.
5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{a} = 7\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$, $\bar{b} = 3\bar{e}_2 + 8\bar{e}_3$.
6. $x_1 = \operatorname{sh} q^1 \cos q^2$, $x_2 = \operatorname{sh} q^1 \sin q^2$, $x_3 = \sin q^3$.
7. $\bar{a} = (x_1^2 + x_2^2)\bar{i}_1 - 3x_3\bar{i}_3$, $\bar{b} = x_1 x_2 \bar{i}_2 + \left(3x_1 - x_3\right)\bar{i}_3$.

Варіант 8

1. $\bar{a} = \bar{i}_1 + \bar{i}_3,\ \bar{b} = -2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 - 4\bar{i}_3,\ \bar{c} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 6\bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2,\ \bar{b} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2,\ \bar{c} = \bar{i}_3,\ \bar{d} = \bar{i}_1 + 4\bar{i}_2 - \bar{i}_3.$
3. $\bar{e}_1 = 4\bar{i}_1,\ \bar{e}_2 = 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_3,\ \bar{a} = 10\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - 17\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = 3\bar{i}_2 - 2\bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2,\ \bar{a} = 2\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2,$
   $\bar{b} = 11\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 8\bar{e}_3.$
5. $G = \|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},\ \bar{a} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 8\bar{e}_3,\ \bar{b} = 4\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3.$
6. $x_1 = \sin q^1 \cos q^2,\ x_2 = \sin q^1 \sin q^2, x_3 = \operatorname{sh} q^3.$
7. $\bar{a} = (2x_1 + x_3)\bar{i}_1 + 3x_2\bar{i}_3,\ \bar{b} = \dfrac{x_1}{x_2}\bar{i}_2 + (x_1 - 3x_2)\bar{i}_3.$

Варіант 9

1. $\bar{a} = \bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 - 14\bar{i}_3,\ \bar{b} = 3\bar{i}_2 - 2\bar{i}_3,\ \bar{c} = 17\bar{i}_1.$
2. $\bar{a} = 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3,\ \bar{b} = 3\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3,\ \bar{c} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{d} = 2\bar{i}_1 - 2\bar{i}_3.$
3. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{a} = 12\bar{i}_2 - 9\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 - \bar{i}_3,\ \bar{e}_3 = 2\bar{i}_3,\ \bar{a} = 4\bar{e}_1 - 7\bar{e}_3,$
   $\bar{b} = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3.$
5. $G = \|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix},\ \bar{a} = 2\bar{e}_1 - 11\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{b} = -4\bar{e}_1 - 7\bar{e}_3.$
6. $x_1 = q^1 \cos q^2 \operatorname{sh} q^3,\ x_2 = q^1 \sin q^2 \operatorname{sh} q^3, x_3 = q^1 \operatorname{ch} q^3.$
7. $\bar{a} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\bar{i}_3,\ \bar{b} = (x_1^2 - 2x_2 + x_3)\bar{i}_1 + 3\bar{i}_3.$

Варіант 10

1. $\bar{a} = 6\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{b} = 2\bar{i}_1 - \bar{i}_3,\ \bar{c} = 7\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3.$
2. $\bar{a} = 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{b} = \bar{i}_2 - 3\bar{i}_3,\ \bar{c} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{d} = -\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3.$
3. $\bar{e}_1 = \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = 3\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{a} = 15\bar{i}_1 + 8\bar{i}_2 - 7\bar{i}_3.$
4. $\bar{e}_1 = \bar{i}_1 - 2\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = 8\bar{i}_1,\ \bar{a} = 3\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3,$
   $\bar{b} = 7\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3.$

5. $G = \left\| g_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{Vmatrix}, \ \bar{a} = 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3, \ \bar{b} = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3.$

6. $x_1 = q^1 \operatorname{ch} q^2 + q^3, \ x_2 = q^1 \operatorname{sh} q^2 - q^3, x_3 = q^1 q^3.$

7. $\bar{a} = (7x_1^2 - x_2)\bar{i}_1 - 3x_1 x_2 \bar{i}_2 + \bar{i}_3, \ \bar{b} = (x_1 + 6x_3)\bar{i}_2 - (8x_1 + x_2)\bar{i}_3.$

2 ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА

2.1 Поняття тензора

На початку зупинимося на окремих випадках тензорів у тривимірному просторі.

Скаляр

Тензор нульового рангу (скаляр) – це об'єкт, який повністю визначається в будь-якій системі координат одним числом, яке не змінюється при зміні системи координат.

Вектор

Тензор першого рангу (вектор) – це об'єкт, який у будь-якій системі координат визначається трьома числами a^i, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$a^{i'} = \alpha_k^{i'} a^k . \tag{2.1}$$

Приклад 2.1. Нехай задано два лінійно незалежних вектори в системі координат із базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. З компонент цих векторів a^i і b^i утворимо всілякі добутки, позначимо їх $A^{ik} = a^i b^k$, всього отримаємо 9 чисел. Знайти закон перетворення цих чисел при переході до іншої системи координат із базисом $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$.

Розв'язання: Використовуючи закон перетворення компонент вектора (2.1), отримаємо

$$a^{i'} = \alpha_l^{i'} a^l ,\ b^{k'} = \alpha_m^{k'} b^m \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ A^{i'k'} = a^{i'} b^{k'} = \alpha_l^{i'} a^l \alpha_m^{k'} b^m = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} a^l b^m = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} A^{lm} .$$

Величини A^{ik} представляють приклад якісно нового, в порівнянні з вектором і скаляром, об'єкта, що має назву тензор другого рангу.

Тензор другого рангу

Тензор другого рангу – це об'єкт, який визначається в будь-якій системі координат 9 числами, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$a^{i'k'} = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} a^{lm} . \tag{2.2}$$

Прикладами тензорів другого рангу можуть служити тензор напружень σ^{ij}, тензор деформацій ε^{ij}, тензор моментів інерції I^{ij}, метричний тензор g^{ij}.

Відзначимо, що вектор (тензор першого рангу) ми визначили трьома його контраваріантними компонентами, але вектор також однозначно визначається і за допомогою трьох його коваріантних компонент a_i, які перетворюються згідно із законом $a_{i'} = \alpha_{i'}^{k} a_k$.

Для тензорів другого рангу також можна розглядати компоненти різного роду. Так a^{ik} – *контраваріантні компоненти*, a_{ik} – *коваріантні компоненти*, $a_i^{\cdot k}, a_{\cdot k}^{i}$ – мішані компоненти тензора другого рангу. *Закони перетворення* для різних видів компонент тензора виглядатимуть таким чином:

$$a_{i'k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m} a_{lm}; \quad a^{i'k'} = \alpha_{l}^{i'} \alpha_{m}^{k'} a^{lm};$$
$$a_{i'}^{\cdot k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{m}^{k'} a_{l}^{\cdot m}; \quad a_{\cdot k'}^{i'} = \alpha_{l}^{i'} \alpha_{k'}^{m} a_{\cdot m}^{l}.$$

Нагадаємо, що $\alpha_{i'}^{k}, \alpha_{i}^{k'}$ це коефіцієнти прямого й зворотного перетворення векторів базисів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$, тобто $e_{i'} = \alpha_{i'}^{k} e_k$, $e_i = \alpha_i^{k'} e_{k'}$.

Тензор *n*-го рангу

Тензором *n*-го рангу *r*-раз контраваріантним і *s*-раз коваріантним $(n = r + s)$ називається об'єкт, який у будь-якій системі координат визначається 3^n числами (компонентами) $a_{k_1 k_2 \ldots k_s}^{i_1 i_2 \ldots i_r}$, що перетворюються при зміні системи координат згідно із законом

$$a_{k_1' k_2' \ldots k_s'}^{i_1' i_2' \ldots i_r'} = \alpha_{k_1'}^{l_1} \alpha_{k_2'}^{l_2} \ldots \alpha_{k_s'}^{l_s} \alpha_{m_1}^{i_1'} \alpha_{m_1}^{i_1'} \ldots \alpha_{m_r}^{i_r'} a_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{m_1 m_2 \ldots m_r}. \quad (2.3)$$

Тензор такого вигляду називають тензором типу $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

Приклад 2.2. Задано коваріантні компоненти тензора другого рангу $a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 2,\ a_{22} = -4,\ a_{23} = 6,\ a_{31} = 5,\ a_{32} = 1,\ a_{33} = 4$ і матриця переходу від старої системи координат до нової

$$\left\| \alpha_{i'}^{k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Знайти $a_{i'k'}$ – коваріантні компоненти того ж тензора в новій системі координат.

Розв’язання: За законом $a_{i'k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m} a_{lm}$ перетворення коваріантних компонент тензора маємо

$$a_{1'1'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{1}a_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{2}a_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{3}a_{13} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{1}a_{21} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{2}a_{22} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{3}a_{23} +$$
$$+ \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{1}a_{31} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{2}a_{32} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{3}a_{33} = 33,$$
$$a_{1'2'} = \alpha_{1'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 93,\ a_{1'3'} = \alpha_{1'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = 37,\ a_{2'1'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm} = 116,$$

$$a_{2'2'}=\alpha_{2'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm}=131,\; a_{2'3'}=\alpha_{2'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm}=-60,\; a_{3'1'}=\alpha_{3'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm}=92,$$
$$a_{3'2'}=\alpha_{3'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm}=79,\; a_{3'3'}=\alpha_{3'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm}=-95.$$

2.2 Зв'язок між різними компонентами тензора

Різні види компонент тензора 2-го рангу, у системі координат із метрикою $ds^2=g_{ik}dx^i dx^k$, зв'язані між собою формулами

$$a^{ik}=g^{il}g^{km}a_{lm},\; a_{ik}=g_{il}g_{km}a^{lm},$$
$$a_{ik}=g_{kl}a_{i}^{\cdot l}=g_{il}a_{\cdot k}^{l},\quad a_{i}^{\cdot k}=g^{kl}a_{il},\quad a_{i}^{\cdot k}=g_{il}a^{lk}, \tag{2.4}$$
$$a_{\cdot k}^{l}=g^{il}a_{ik},\; a_{\cdot k}^{l}=g_{ki}a^{li},\; a^{ik}=g^{il}a_{l}^{\cdot k}=g^{kl}a_{\cdot l}^{i}.$$

Крапка у формулах (2.4) підкреслює порядок індексів, так у записі $a_i^{\cdot k}$ перший індекс – нижній (коваріантний), а другий – верхній (контраваріантний).

Правило (2.4) одержання одних компонент тензора через інші за допомогою метричного тензора називають *операцією підняття (опускання) індексів* у компонент тензора.

Це правило полягає в тому, що індекс, який піднімається (опускається) переходить у метричний тензор, а на те місце, куди він повинен бути піднятий (опущений), ставиться «німий» індекс підсумовування; другим «німим» індексом підсумовування є вільний індекс метричного тензора.

Наприклад,

$$A_{ikl}=g_{im}A_{\cdot kl}^{m}=g_{im}g_{kn}A_{\cdot\cdot l}^{mn}=g_{km}A_{i\cdot l}^{\cdot m}=g_{im}g_{kn}g_{lr}A^{mnr}=g_{im}g_{ln}A_{\cdot k\cdot}^{m\cdot n}.$$

Приклад 2.3. Показати, що величини $g_{ik}, g^{ik}, g_i^{\cdot k}$ в системі координат з основним базисом $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ є різними видами компонент одного й того ж тензора 2-го рангу.

Розв’язання: Знайдемо закони перетворення цих компонент при переході до нової системи координат з основним базисом $(\bar{e}_{1'},\bar{e}_{2'},\bar{e}_{3'})$.

$$g_{i'k'}=\bar{e}_{i'}\cdot\bar{e}_{k'}=\alpha_{i'}^{l}\bar{e}_l\alpha_{k'}^{m}\bar{e}_m=\alpha_{i'}^{l}\alpha_{k'}^{m}\bar{e}_l\bar{e}_m=\alpha_{i'}^{l}\alpha_{k'}^{m}g_{lm},$$
$$g^{i'k'}=\bar{e}^{i'}\cdot\bar{e}^{k'}=\alpha_{l}^{i'}\bar{e}^{l}\alpha_{m}^{k'}\bar{e}^{m}=\alpha_{l}^{i'}\alpha_{m}^{k'}g^{lm},$$
$$g_{i'}^{\cdot k'}=\bar{e}_{i'}\cdot\bar{e}^{k'}=\alpha_{i'}^{l}\bar{e}_l\alpha_{m}^{k'}\bar{e}^{m}=\alpha_{i'}^{l}\alpha_{m}^{k'}\bar{e}_l\bar{e}^{m}=\alpha_{i'}^{l}\alpha_{m}^{k'}g_{l}^{\cdot m}.$$

Закон перетворення для всіх видів компонент виконується. Покажемо, що це компоненти одного тензора. Для цього перевіримо чи задовольняють вони формулам зв'язку або правилу підняття, опускання індексів. Відомо, що $\bar{e}_i=g_{il}\bar{e}^{l}$, тоді

$$g_{ik}=\bar{e}_i\cdot\bar{e}_k=g_{il}\bar{e}^{l}g_{km}\bar{e}^{m}=g_{il}g_{km}g^{lm},$$
$$g_{ik}=g_{il}\bar{e}^{l}\bar{e}_k=g_{il}g_{\cdot k}^{l}=g_{kl}g_{i}^{\cdot l}=\bar{e}_i g_{kl}\bar{e}^{l}.$$

Видно, що правило (2.4) виконується, значить це компоненти одного тензора.

Відзначимо, що для змішаних компонент метричного тензора справедливі співвідношення

$$g_{i}^{\cdot k} = g_{\cdot i}^{k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \tag{2.5}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

Приклад 2.4. В декартовій системі координат $K(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$ задано компоненти тензора другого рангу

$$\left\| A^{ik} \right\| = \left\| A_{i}^{\cdot k} \right\| = \left\| A_{\cdot k}^{i} \right\| = \left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Базисні вектори системи координат $K'(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ виражаються через орти декартової системи координат за співвідношеннями

$$\bar{e}_1 = \bar{i}_1,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3.$$

Визначити коваріантні, змішані й контраваріантні компоненти даного тензора в системі координат K'.

<u>Розв’язання</u>: Випишемо коефіцієнти $\alpha_{i'}^{k}$ прямого перетворення системи координат K у K', скориставшись формулами (1.7),

$$\alpha_{1'}^{1} = 1, \quad \alpha_{1'}^{2} = 0, \quad \alpha_{1'}^{3} = 0,$$

$$\alpha_{2'}^{1} = 1, \quad \alpha_{2'}^{2} = 1, \quad \alpha_{2'}^{3} = 0,$$

$$\alpha_{3'}^{1} = 1, \quad \alpha_{3'}^{2} = 1, \quad \alpha_{3'}^{3} = 1.$$

За законом $A_{i'k'} = \alpha_{i'}^{m} \alpha_{k'}^{n} A_{mn}$ перетворення коваріантних компонент тензора, одержимо

$$A_{1'1'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{1}A_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{2}A_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{3}A_{13} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{1}A_{21} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{2}A_{22} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{3}A_{23} +$$
$$+ \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{1}A_{31} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{2}A_{32} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{3}A_{33} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Аналогічно знайдемо інші компоненти

$A_{1'2'} = 3$, $A_{1'3'} = 6$, $A_{2'1'} = 4$, $A_{2'2'} = 8$, $A_{2'3'} = 15$, $A_{3'1'} = 5$, $A_{3'2'} = 11$, $A_{3'3'} = 19$.

Відповідь запишемо у вигляді матриці

$$\left\| A_{i'k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 19 \end{Vmatrix}.$$

Інші види компонент тензора знайдемо за формулами (2.4).

Для цього знайдемо коваріантні компоненти метричного тензора

$$\|g_{ik}\| = \|\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо тепер контраваріантні компоненти

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G},\ G = \det\|g_{ik}\| = 1.$$

$$G^{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ G^{12} = -1,\ G^{13} = 0,\ G^{21} = -1,\ G^{22} = 2,$$

$$G^{23} = -1,\ G^{31} = G^{13} = 0,\ G^{32} = G^{23} = -1,\ G^{33} = 1.$$

Звідси

$$g^{ik} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Далі скористаємось формулами (2.4).

$A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \Rightarrow$

$A^{11} = g^{11}g^{11}A_{11} + g^{11}g^{12}A_{12} + g^{11}g^{13}A_{13} + g^{12}g^{11}A_{21} + g^{12}g^{12}A_{22} +$

$+ g^{12}g^{13}A_{23} + g^{13}g^{11}A_{31} + g^{13}g^{12}A_{32} + g^{13}g^{13}A_{33} = 2,$

$A^{12} = -1,\ A^{13} = -1,\ A^{21} = 0,\ A^{22} = -2,\ A^{23} = 3,\ A^{31} = -1,\ A^{32} = 1,\ A^{33} = 1.$

Звідси

$$\|A^{i'k'}\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$A_i^{\cdot k} = g^{kl} A_{il} \quad \Rightarrow \quad A_1^{\cdot 1} = g^{11}A_{11} + g^{12}A_{12} + g^{13}A_{13} = 1,\quad A_1^{\cdot 2} = -2,\quad A_1^{\cdot 3} = 3,$
$A_2^{\cdot 1} = 0,\ A_2^{\ 2} = -3,\ A_2^{\ 3} = 7,\ A_3^{\ 1} = -1,\ A_3^{\cdot 2} = -2,\ A_3^{\ 3} = 8.$

Звідси

$$\|A_{i'}^{\cdot k'}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 8 \end{Vmatrix}.$$

$A^i{}_{\cdot k} = g^{im} A_{mk} \quad \Rightarrow \quad A^1{}_{\cdot 1} = g^{11}A_{11} + g^{12}A_{21} + g^{13}A_{31} = 0,\quad A^2{}_{\cdot 1} = 1,\quad A^3{}_{\cdot 1} = 1,$
$A^1{}_{\cdot 2} = -2,\ A^2{}_{\cdot 2} = 2,\ A^3{}_{\cdot 2} = 3,\ A^1{}_{\cdot 3} = -3,\ A^2{}_{\cdot 3} = 5,\ A^3{}_{\cdot 3} = 4.$

Звідси

$$\|A^{i'}_{\cdot k'}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Приклад 2.5. Задано мішані компоненти тензора четвертого рангу в системі координат з базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ і метричний тензор g_{ij},

$$A^{11}_{\cdot\cdot ik} = 1,\ A^{12}_{\cdot\cdot ik} = 4,\ A^{21}_{\cdot\cdot ik} = 5,\ A^{22}_{\cdot\cdot ik} = 4,\ \forall i,k = 1,2$$

$$g_{11} = 6,\ g_{12} = g_{21} = 5,\ g_{22} = 2.$$

Підняти індекс i.

<u>Розв’язання</u>: Для того щоб підняти нижній індекс i, знайдемо контраваріантні компоненти метричного тензора $g^{ij} = \dfrac{G^{ij}}{G}$, $G = \det\left\|g_{ij}\right\| = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -13,\ G^{11} = 2, G^{21} = -5, G^{21} = -5, G^{22} = 6.$

$$\left\|g^{ij}\right\| = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{13} & \dfrac{5}{13} \\ \dfrac{5}{13} & -\dfrac{6}{13} \end{vmatrix}.$$

За правилом (2.4), враховуючи, що $A^{jl}_{\cdot\cdot 1k} = A^{jl}_{\cdot\cdot 2k} = A^{jl}_{\cdot\cdot nk}$, отримаємо

$$A^{jli}_{\cdot\cdot\cdot k} = g^{im}A^{jl}_{\cdot\cdot mk} = g^{i1}A^{jl}_{\cdot\cdot 1k} + g^{i2}A^{jl}_{\cdot\cdot 2k} = (g^{i1} + g^{i2})A^{jl}_{\cdot\cdot nk} \Rightarrow$$

$$A^{111}_{\cdot\cdot\cdot k} = (g^{11} + g^{12})A^{11}_{\cdot\cdot nk} = (-\frac{2}{13} + \frac{5}{13}) \cdot 1 = \frac{3}{13},\ A^{112}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{1}{13},\ A^{121}_{\cdot\cdot\cdot k} = \frac{12}{13},\ A^{122}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{4}{13},$$

$$A^{211}_{\cdot\cdot\cdot k} = \frac{15}{13},\ A^{212}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{5}{13},\ A^{221}_{\cdot\cdot\cdot k} = \frac{12}{13},\ A^{222}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{4}{13}.$$

2.3 Розклад тензора за векторами

Покажемо, що будь-який тензор 2-го рангу може бути розкладений у суму попарних добутків компонент трьох векторів. Уведемо трійку взаємно ортогональних ортів $(\bar{u}_{(1)}, \bar{u}_{(2)}, \bar{u}_{(3)})$, позначимо через $u_{(\alpha)i}, u^i_{(\alpha)}$ коваріантні й контраваріантні компоненти вектора $\bar{u}_{(\alpha)}$ в тій системі координат, у якій задані компоненти тензора, наприклад, коваріантні T_{ik}.

Розглянемо скаляри

$$T_{(\alpha\beta)} = T_{ik} \cdot u^i_{(\alpha)} u^k_{(\beta)}.$$

Помножимо кожний з них на $u_{(\alpha)p} \cdot u_{(\beta)q}$ і підсумуємо по α, β:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T_{(\alpha\beta)} u_{(\alpha)p} u_{(\beta)q} = \sum_{i,k}^{3} T_{ik} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} u^i_{(\alpha)} u^k_{(\beta)} u_{(\alpha)p} u_{(\beta)q}. \qquad (2.6)$$

З іншого боку, $\delta_{\alpha\beta} = \bar{u}_\alpha \cdot \bar{u}_\beta = \sum\limits_{i=1}^{3} u^i_{(\alpha)} u_{(\beta)i}$.

Помножимо цю рівність на $u^{\alpha}_{(\beta)}$ і підсумуємо по β:

$$\sum_{\beta=1}^{3}\delta_{\alpha\beta}u^{\alpha}_{(\beta)} = \sum_{i=1}^{3}u^{i}_{(\alpha)}\sum_{\beta=1}^{3}u_{(\beta)i}u^{\alpha}_{(\beta)} \Rightarrow u^{\alpha}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{3}u^{i}_{(\alpha)}\sum_{\beta=1}^{3}u_{(\beta)i}u^{\alpha}_{(\beta)} .$$

З іншого боку $u^{\alpha}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{3} g_i^{\cdot\alpha} u^{i}_{(\alpha)}$.

Звідси, одержимо

$$g_i^{\cdot\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3}u_{(\beta)i}u^{\alpha}_{(\beta)} .$$

Тоді права частина рівності (2.6) перетвориться в такий спосіб

$$\sum_{i,k}^{3}T_{ik}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}u^{i}_{(\alpha)}u^{k}_{(\beta)}u_{(\alpha)p}u_{(\beta)q} = \sum_{i,k}^{3}T_{ik}\,g^{\cdot i}_{p}g^{\cdot k}_{q} = T_{pq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{pq} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}T_{(\alpha\beta)}u_{(\alpha)p}u_{(\beta)q} .$$

Таким чином, отримали розклад тензора за векторами.

2.4 Фізичні компоненти

Слід зазначити, що розмірність векторних і тензорних величин залежить від задачі, і якщо задача заздалегідь приведена до безрозмірного вигляду, то і компоненти є безрозмірними. При розв’язуванні задачі з фізичними величинами базис можна задати безрозмірним. Тоді компоненти векторів і тензорів зберігають розмірність розглянутих величин. З іншої сторони основному базису можна приписати розмірність, що відповідає розглянутим величинам, тоді контраваріантні компоненти векторів і тензорів будуть мати іншу розмірність, можливо позбавлену фізичного змісту. Щоб уникнути такої ситуації, варто розглянути, так звані, «фізичні компоненти». Для цього визначимо векторний базис $\bar{e}_i^{\,*}$ і відповідний йому взаємний $\bar{e}^{i^*}$ за допомогою співвідношень

$$\bar{e}_i^{\,*} = \frac{\bar{e}_i}{|\bar{e}_i|},\ \bar{e}^{i^*} = \bar{e}^{i}|\bar{e}_i|,$$

тоді

$$\bar{a} = a^{*i}\bar{e}_i^{\,*} = a_i^{\,*}\bar{e}^{i^*} . \qquad (2.7)$$

Компоненти a^{*i}, $a_i^{\,*}$ в розкладах (2.7) називають *фізичними компонентами вектора* $\bar{a}$. Зв'язок фізичних компонент з коваріантними і контраваріантними компонентами визначається співвідношеннями

$$a_i^{\ *} = \frac{a_i}{|\bar{e}_i|},\ a^{i^*} = a^i|\bar{e}_i|.$$

Враховуючи, що $|\bar{e}_i| = \sqrt{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i} = \sqrt{g_{ij}}$, отримаємо

$$a^{i*} = a^i\sqrt{g_{ii}} \text{ (немає суми по } i\text{)},$$

$$a_i^{\ *} = \frac{a^i}{\sqrt{g_{ii}}} \text{ (немає суми по } i\text{)}.$$

Поняття «фізичні компоненти» векторів природно узагальнюються й на компоненти тензорів другого рангу

$$a^{ik*} = a^{ik}\sqrt{g_{ii}g_{kk}} \text{ (немає суми по } i,\ k\text{)},$$

$$a_{ik}^{\ \ *} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}} \text{ (немає суми по } i,\ k\text{)}.$$

2.5 Дії над тензорами

Додавання тензорів

Додавання визначається тільки для тензорів однакового рангу й будови. Сумою $A+B$ двох тензорів називається тензор C того ж рангу й будови що й A, B, компоненти якого в будь-якій системі координат дорівнюють сумам відповідних компонент тензорів A, B.

$$C^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} + B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}. \qquad (2.8)$$

Приклад 2.6 Нехай компоненти $A_{i\cdot j}^{\cdot k}, B_{i\cdot j}^{\cdot k}$ двох тензорів задано у системі координат $K(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Знайти суму цих тензорів у тій самій системі координат .

$A_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = A_{1\cdot 2}^{\cdot 1} = 1,\ A_{1\cdot 1}^{\cdot 2} = 0, A_{1\cdot 2}^{\cdot 2} = 2,\ A_{2\cdot 1}^{\cdot 1} = -3, A_{2\cdot 2}^{\cdot 1} = 5,\ A_{2\cdot 1}^{\cdot 2} = A_{2\cdot 2}^{\cdot 2} = -2;$

$B_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = 0, B_{1\cdot 2}^{\cdot 1} = 8,\ B_{1\cdot 1}^{\cdot 2} = B_{1\cdot 2}^{\cdot 2} = 4,\ B_{2\cdot 1}^{\cdot 1} = -6, B_{2\cdot 2}^{\cdot 1} = 0,\ B_{2\cdot 1}^{\cdot 2} = -7, B_{2\cdot 2}^{\cdot 2} = 3.$

Розв’язання: За формулою (2.8) знайдемо суму відповідних координат заданих тензорів

$C_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = A_{1\cdot 1}^{\cdot 1} + B_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = 1 + 0 = 1.$

Аналогічно

$C_{1\cdot 2}^{\cdot 1} = 9,\ C_{1\cdot 1}^{\cdot 2} = 4,\ C_{1\cdot 2}^{\cdot 2} = 6,\ C_{2\cdot 1}^{\cdot 1} = -9,\ C_{2\cdot 2}^{\cdot 1} = 5,\ C_{2\cdot 1}^{\cdot 2} = -9,\ C_{2\cdot 2}^{\cdot 2} = 1.$

Відзначимо, що операція додавання тензорів інваріантна, тобто не залежить від того, у якій системі координат задано тензори.

Множення тензора на скаляр

Добутком тензора A на скаляр λ називається тензор $B = \lambda A$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють добутку компонент тензора А на скаляр λ.

Множення двох тензорів

Ця операція визначається для будь-яких двох тензорів, не залежно від їхнього рангу й будови. Добутком тензора A рангу n_1 на тензор B рангу n_2 з компонентами $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$, $B^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{l_1 l_2 \ldots l_q}$ називається тензор $C = A \otimes B$ рангу $n_1 + n_2$ з компонентами

$$C^{i_1 i_2 \ldots i_r k_1 \ldots k_p}_{j_1 j_2 \ldots j_s l_1 \ldots l_q} = A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \cdot B^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{l_1 l_2 \ldots l_q}. \tag{2.8}$$

Приклад 2.7. Нехай задано два тензори з компонентами A^i, B_{jk} в деякій системі координат $K(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Знайти $A \otimes B$, і $B \otimes A$, якщо $A^1 = 1, A^2 = 0$, $\|B_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання: Знайдемо компоненти $C = A \otimes B$ за формулою (2.8)

$$C^{i}_{\cdot jk} = A^i \cdot B_{jk}.$$

Звідси $C^1_{\cdot 11} = A^1 \cdot B_{11} = 1$, $C^1_{\cdot 12} = 0$, $C^1_{\cdot 21} = 0$, $C^1_{\cdot 22} = 2$, $C^2_{\cdot jk} = A^2 \cdot B_{jk} = 0$.

Аналогічно для $D = B \otimes A$ отримаємо

$$D^{\cdot\cdot i}_{jk} = B_{jk} \cdot A^i.$$

Звідси $D^{\cdot\cdot 1}_{11} = 1$, $D^{\cdot\cdot 1}_{12} = 0$, $D^{\cdot\cdot 2}_{11} = 0$, $D^{\cdot\cdot 2}_{12} = 0$, $D^{\cdot\cdot 1}_{21} = 0$, $D^{\cdot\cdot 2}_{21} = 0$, $D^{\cdot\cdot 1}_{22} = 2$, $D^{\cdot\cdot 2}_{22} = 0$.

Помітимо, що $A \otimes B \neq B \otimes A$, тобто добуток тензорів не комутативний.

Операція перестановки індексів, або утворення ізомеру.

Два тензори A і B одного рангу й будови називаються рівними, якщо рівні відповідні координати цих тензорів у деякій системі координат.

$$A = B \Leftrightarrow A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = B^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}.$$

Відзначимо, що з рівності координат тензорів у деякій системі координат випливає їхня рівність у будь-якій іншій системі координат.

Ізомер утворюється при зміні порядку проходження верхніх або нижніх індексів. Наприклад,

$$A^{ij}_{\cdot\cdot pqr} = B^{ji}_{\cdot\cdot pqr}.$$

По суті, ця операція є формальною.

Її значення виявляється тоді, коли вона комбінується з визначеними вище операціями.

Згортання мішаного тензора (згортка)

Згортанням називається підсумовування компонент тензора по двох різнойменним («верхній», «нижній») індексах. Згортання застосовується тільки до змішаних компонент тензора.

Властивості:

1) Згортання можна проводити для тензорів рангу $n \geq 2$;
2) При згортанні тензора рангу n по двох індексах одержимо тензор рангу $n-2$;
3) Операцію згортання можна проводити декілька разів.

Приклад 2.8. Знайти вектор, що утворюється множенням тензора T^{ij} на вектор A_k з наступним згортанням по першому (другому) індексу тензора й індексу вектора, якщо $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

Розв’язання: При множенні тензора на вектор одержуємо тензор 3-го рангу $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = T^{ij} A_k$, щоб не знаходити усі 27 компонент цього тензору, проведемо згортку по його першому верхньому індексу й нижньому індексу, замінивши ці індекси на індекс підсумовування l.

$B^j = C^{lj}_{\cdot\cdot l} = T^{lj} A_l = T^{1j} A_1 + T^{2j} A_2 + T^{3j} A_3.$

$B^1 = T^{11} A_1 + T^{21} A_2 + T^{31} A_3 = 10,$

$B^2 = T^{12} A_1 + T^{22} A_2 + T^{32} A_3 = 17,$

$B^3 = T^{13} A_1 + T^{23} A_2 + T^{33} A_3 = 16.$

Якщо провести згортку по другому верхньому і нижньому індексах тензора C одержимо інший результат

$D^i = C^{il}_{\cdot\cdot l} = T^{il} A_l = T^{i1} A_1 + T^{i2} A_2 + T^{i3} A_3.$

$D^1 = T^{1l} A_l = T^{11} A_1 + T^{12} A_2 + T^{13} A_3 = 7,$

$D^2 = T^{2l} A_l = T^{21} A_1 + T^{22} A_2 + T^{23} A_3 = 14,$

$D^3 = T^{3l} A_l = T^{31} A_1 + T^{32} A_2 + T^{33} A_3 = 19.$

Зауваження. Множення з наступним згортанням називають *скалярним добутком* тензорів.

Симетрування

Поняття симетрії відносять до тензорів рангу не менш двох, що мають пару однойменних індексів.

Тензор $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ називається симетричним по парі верхніх (нижніх) індексів, якщо компоненти , що виходять при перестановці цих індексів, рівні один одному. Наприклад, $A_{ik} = A_{ki}$.

Тензор $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$ називається кососиметричним (антисиметричним) по парі верхніх (нижніх) індексів, якщо в результаті їхньої перестановки знак відповідних компонент міняється на протилежний. Наприклад, $A_{ik} = -A_{ki}$.

Властивість симетрії інваріантна, тобто не залежить від вибору системи координат.

Операція симетрування по n верхнім (нижнім) індексам полягає в утворенні $n!$ ізомерів, у яких ці індекси розташовуються всіма можливими способами, із наступним додаванням і діленням суми на $n!$.

Симетрування позначається парою круглих дужок, у яких розташовуються індекси, що беруть участь в операції. Наприклад,

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}),$$

$$B^{(ijk)} = \frac{1}{3!}(B^{ijk} + B^{ikj} + B^{jki} + B^{jik} + B^{kij} + B^{kji}),$$

$$T_{(ij|k|)} = \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{jik})$$

(індекс k , що не бере участь в операції позначають $|k|$).

У результаті операції симетрування одержуємо новий тензор того ж рангу й будови, що має властивість симетрії по даному набору однойменних індексів.

Альтернування

Операція альтернування здійснюється аналогічно симетруванню, але при цьому кожний з $n!$ ізомерів береться з додатним знаком при парній перестановці індексів, і з від'ємним – при непарній.

Індекси, що беруть участь в альтернуванні позначають квадратними дужками. Наприклад,

$$A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}).$$

У результаті альтернування по парі індексів одержимо кососиметричний тензор.

Приклад 2.9 Для заданого тензора третього рангу з компонентами $T^1_{11} = \sin x^1 + \cos x^2$, $T^1_{12} = x^1$, $T^1_{21} = (x^1)^2$, $T^1_{22} = x^1 x^2$, $T^2_{11} = \sin x^1 - \cos x^2$, $T^2_{12} = x^2$, $T^2_{21} = (x^2)^2$, $T^2_{22} = \dfrac{x^1}{x^2}$ виконати операції симетрування й альтернування по нижніх індексах. Додати отримані тензори.

Розв'язання: Виконаємо симетрування за формулою

$$S^k_{ij} = T^k_{(ij)} = \frac{1}{2}(T^k_{ij} + T^k_{ji}).$$

Одержимо

$$S^1_{11} = \frac{1}{2}(T^1_{11} + T^1_{11}) = T^1_{11} = \sin x^1 + \cos x^2,$$

$$S_{11}^2 = \frac{1}{2}(T_{11}^2 + T_{11}^2) = T_{11}^2 = \sin x^1 - \cos x^2,$$

$$S_{12}^1 = \frac{1}{2}(x^1 + (x^1)^2),$$

$$S_{12}^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x^2)^2),$$

$$S_{21}^1 = \frac{1}{2}(x^1 + (x^1)^2),$$

$$S_{21}^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x^2)^2),$$

$$S_{22}^1 = x^1 x^2,$$

$$S_{22}^2 = \frac{x^1}{x^2}.$$

Потім альтернуємо тензор за формулою $A^k{}_{ij} = T_{[ij]}^k = \frac{1}{2}\left(T_{ij}^k - T_{ji}^k\right)$.

$$A_{11}^1 = \frac{1}{2}\left(T_{11}^1 - T_{11}^1\right) = 0,$$

$$A_{11}^2 = 0,$$

$$A_{12}^1 = \frac{1}{2}\left(x^1 - (x^1)^2\right),$$

$$A_{12}^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - (x^2)^2\right),$$

$$A_{21}^1 = \frac{1}{2}\left((x^1)^2 - x^1\right),$$

$$A_{21}^2 = \frac{1}{2}\left((x^2)^2 - x^2\right),$$

$$A_{22}^1 = 0,$$

$$A_{22}^2 = 0.$$

Помітимо, що в сумі ці тензори дають тензор T_{ij}^k

$$S_{ij}^k + A_{ij}^k = \frac{1}{2}(T_{ij}^k + T_{ji}^k) + \frac{1}{2}(T_{ij}^k - T_{ji}^k) = T_{ij}^k.$$

Таким чином, будь-який тензор, що має хоча б пару однойменних індексів можна представити у вигляді суми симетричного й кососиметричного тензорів.

Одиничний тензор

Відомий з алгебри символ Кронекера δ_k^i є тензором другого рангу з матрицею

$$\left\|\delta_k^i\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \delta_k^i = \alpha_k^{j'} \alpha_{j'}^i = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k. \end{cases}$$

Компоненти одиничного тензора однакові у всіх координатних системах.

Множення на δ_k^i з наступним згортанням часто використовується в алгебраїчних виразах.

Приклад 2.10. Спростити вирази: $\delta_k^i \cdot A_{kj}$; $\delta_i^l \delta_k^m b^i b^k - b^l \delta_j^m a^j$; $A_i^{\cdot k} B_k - B^i$.

<u>Розв’язання</u>:

1) $\delta_k^i \cdot A_{kj} = A_{ij}$ – тотожне перетворення (перейменування індексу);

2) $\delta_i^l \delta_k^m b^i b^k - b^l \delta_j^m a^j = b^l b^m - b^l a^m = b^l (b^m - a^m)$;

3) $A_i^{\cdot k} B_k - B^i = A_i^{\cdot k} B_k - \delta_i^{\cdot k} B_k = (A_i^{\cdot k} - \delta_i^{\cdot k}) B_k = T_i^{\cdot k} B_k$.

<u>Діадний добуток векторів</u>

Якщо розглянути всілякі добутки компонент двох векторів $A^i B^k = C^{ik}$ $(i,k = 1,2,3)$, то одержимо дев'ять чисел, що утворюють тензор другого рангу, який називається *діадним добутком векторів* $\overline{A}, \overline{B}$. Діадний добуток є тензорним добутком $\overline{A} \otimes \overline{B}$ векторів $\overline{A}, \overline{B}$.

Діадний добуток не комутативний $\overline{A} \otimes \overline{B} \neq \overline{B} \otimes \overline{A}$. Але матриця $\overline{B} \otimes \overline{A}$ є транспонована матриця $\overline{A} \otimes \overline{B}$. Аналогічно із записом вектора $\overline{A} = A^i \overline{e}_i$ тензор C можна записати так

$$C = A^i B^k \overline{e}_i \overline{e}_k = C^{ik} \overline{e}_i \overline{e}_k.$$

Узагальнюючи цей спосіб запису на випадок тензора будь-якого рангу, одержимо

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_p} \overline{e}^{\, j_1} \dots \overline{e}_{i_1} \dots .$$

У цьому виразі вектори $\overline{e}^{\, j_1}, \dots, \overline{e}^{\, j_s}, \overline{e}_{i_1}, \dots, \overline{e}_{i_p}$ мають визначений порядок, підсумовування проводиться за всіма індексами $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_s$.

2.6 Головні осі тензора

Розглянемо мішані компоненти тензора 2-го рангу $T_{\cdot k}^{i}$ і деякий вектор з компонентами A^k. Якщо цей тензор помножити на вектор і зробити згортку за індексом вектора і нижнім індексом тензора, в результаті одержимо новий вектор із компонентами $B^i = T^i_{\cdot k} A^k$.

Таким чином, тензор при скалярному множенні на вектор змінює довжину цього вектора і його напрямок.

Знайдемо для даного тензора $T^i_{\cdot k}$ всі вектори, що змінюються тільки за довжиною. Для цього розв'яжемо відносно компонент A^k рівняння

$$T^i_{\cdot k} A^k = \lambda A^i, \tag{2.9}$$

де λ – скаляр.

Якщо розв'язок цього рівняння існує, то вектори, що йому задовольняють, називаються *власними векторами тензора* $T^i_{\cdot k}$, напрямки цих векторів – *головними напрямами тензора*, осі цих напрямків – *головними осями тензора*.

Значення компонент тензора в координатній системі головних осей називаються *головними значеннями*.

Знайдемо розв'язок рівняння (2.9).

$$T^i_{\cdot k} A^k - \lambda A^i = (T^i_{\cdot k} A^k - \lambda \delta^i_{\cdot k} A^k) = (T^i_{\cdot k} - \lambda \delta^i_{\cdot k}) A^k = 0 .$$

Таким чином, для знаходження компонент A^k необхідно розв'язати однорідну систему з трьох лінійних рівнянь. Як відомо з алгебри, однорідна система має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулеві

$$\begin{vmatrix} T^1_{\cdot 1} - \lambda & T^1_{\cdot 2} & T^1_{\cdot 3} \\ T^2_{\cdot 1} & T^2_{\cdot 2} - \lambda & T^2_{\cdot 3} \\ T^3_{\cdot 1} & T^3_{\cdot 2} & T^3_{\cdot 3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{2.10}$$

Це рівняння третього степеня називається *характеристичним*.

Спростимо задачу, і будемо розглядати тільки тензори із симетричними коваріантними компонентами $T_{ik} = T_{ki}$. Тоді матриця системи є симетричною і характеристичне рівняння має тільки дійсні корені. Нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ – корені рівняння (2.10), тоді компоненти шуканих векторів, відповідні власним значенням λ_s, визначаються з точністю до сталого дійсного множника. Їх можна визначити з трьох систем рівнянь

$$(T^i_{.k} - \lambda_s \delta^i_{.k}) A^k = 0$$

звідси одержимо

$$\frac{A^1_{(s)}}{\begin{vmatrix} T^2_{.2} - \lambda_s & T^2_{.3} \\ T^3_{.2} & T^3_{.3} - \lambda_s \end{vmatrix}} = \frac{A^2_{(s)}}{\begin{vmatrix} T^2_{.3} & T^2_{.1} \\ T^3_{3} - \lambda_s & T^3_{.1} \end{vmatrix}} = \frac{A^3_{(s)}}{\begin{vmatrix} T^2_{.1} & T^2_{.2} - \lambda_s \\ T^3_{1} & T^3_{.2} \end{vmatrix}}, \quad s = 1,2,3. \tag{2.11}$$

Відзначимо, що три вектори $\overline{A}_{(s)}$ взаємно перпендикулярні, а вихідний тензор у системі координат, осі якої є головними осями тензора, буде мати компоненти

$$\left\|T_{i'k'}\right\| = \left\|T^{i'}_{.k'}\right\| = \left\|T^{i'k'}\right\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}.$$

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то головні напрями тензора єдині.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то двократному кореневі $\lambda_1 = \lambda_2$ відповідає власна площина, яка перпендикулярна третьому головному напряму. У цій площині будь-який напрям буде головним.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то будь-який напрям буде головним. Такий тензор називається *кульовим*.

Тензорна поверхня

Будь-якому симетричному тензору $T_{ik} = T_{ki}$ можна поставити у відповідність поверхню другого порядку $T_{ik} x^i x^k = 1$. Ця поверхня називається тензорною. Головні осі тензора є головними осями тензорної поверхні, яка у системі головних осей має рівняння

$$\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(x^2)^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{(x^3)^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 1.$$

Якщо всі $\lambda_s > 0$, то тензорна поверхня – еліпсоїд. Головні осі тензора – головні осі еліпсоїда. У випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ маємо сферу радіуса $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, у цьому випадку матриця тензора в головних осях має вигляд

$$\left\|T_{i'k'}\right\| = \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \lambda \delta_{ik}$$

У випадку $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ маємо еліпсоїд обертання.

Приклад 2.11. Знайти головні значення й головні напрями тензора $T_i^{.k}$, якщо

$$T_i^{.k} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Визначити вид тензорної поверхні.

Розв’язання: Розв’яжемо характеристичне рівняння (2.10)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 2\right) = 0,$$
звідси $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $\lambda_3 = 3$.

З співвідношення (2.11) знайдемо власні вектори, що відповідають кожному значенню λ.

1) $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$,

$$\frac{E^1_{(1)}}{\begin{vmatrix} 2-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 3-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{vmatrix}} = \frac{E^2_{(1)}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{E^3_{(1)}}{\begin{vmatrix} 2 & 2-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{E^1_{(1)}}{5-\sqrt{17}} = \frac{E^2_{(1)}}{-3+\sqrt{17}} = \frac{E^3_{(1)}}{0},$$
$$\overline{E}_{(1)} = \left(5-\sqrt{17};-3+\sqrt{17};0\right).$$

2) $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $\overline{E}_{(2)} = \left(-3-\sqrt{17};\dfrac{7+\sqrt{17}}{2};0\right)$.

3) $\lambda_3 = 3$, $\overline{E}_{(3)} = (0;0;-2)$.

Вектори $\overline{E}_{(1)}$, $\overline{E}_{(2)}$, $\overline{E}_{(3)}$ визначають головні напрями тензора.

В ортонормованому базисі $\overline{e}_{1'}, \overline{e}_{2'}, \overline{e}_{3'}$, де $\overline{e}_{i'} = \dfrac{\overline{E}_{(i)}}{\left|\overline{E}_{(i)}\right|}$, компоненти тензора матимуть вигляд
$$T_{i'k'} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Тензорна поверхня в цьому базисі матиме рівняння

$$T_{ik}x^i x^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x^1\right)^2}{\frac{2}{3+\sqrt{17}}} + \frac{\left(x^2\right)^2}{\frac{2}{3-\sqrt{17}}} + \frac{\left(x^3\right)^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$ Це однопорожнинний гіперболоїд.

<u>Інваріанти тензора</u>

Виконаємо елементарні перетворення у характеристичному рівнянні (2.10).

$$\begin{vmatrix} T^1_{.1} - \lambda & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} - \lambda & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda^3 - \lambda^2\left(T^1_{.1} + T^2_{.2} + T^3_{.3}\right) + \lambda\left(\begin{vmatrix} T^2_{.2} & T^3_{.3} \\ T^2_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^2_{.1} \\ T^1_{.2} & T^2_{.2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^3_{.1} \\ T^1_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} = 0.$$

Зауважимо, що λ_1, λ_2, λ_3 – скаляри, які не залежать від системи координат. Звідси випливає, що коефіцієнти цього рівняння також не повинні змінюватись при зміні системи координат.

Величини, які не змінюються при зміні системи координат називаються *інваріантами*.

Таким чином, для тензора другого рангу *інваріантами* є

$$I_1 = T^1_{.1} + T^2_{.2} + T^3_{.3} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = inv,$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} T^2_{.2} & T^3_{.3} \\ T^2_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^2_{.1} \\ T^1_{.2} & T^2_{.2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^3_{.1} \\ T^1_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix} = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 = inv, \qquad (2.12)$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = inv.$$

Тензор, у якого інваріант $I_1 = 0$ називають *девіатором*.

Будь-який тензор можна розкласти на девіатор і кульовий тензор

$$T_i^{.k} = T_i^{.k} - \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k} + \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k} = D_i^{.k} + \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k}.$$

Тензор

$$D_i^{.k} = T_i^{.k} - \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k} \qquad (2.13)$$

є девіатором, тому що $D_i^{.i} = T_i^{.i} - \frac{1}{3}T_l^{.l} \cdot 3 = 0$.

Тензор $\frac{1}{3}T_l^{\cdot l} g_i^{\cdot k}$ – кульовий.

Коваріантні й контраваріантні компоненти девіатора мають вигляд

$$D_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3}T_l^{\cdot l} g_{ik}, \ D^{ik} = T^{ik} - \frac{1}{3}T_l^{\cdot l} g^{ik}.$$

Приклад 2.12. Тензор $\left\| T_i^{\cdot k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$ представити у вигляді суми девіатора і кульового тензора. Знайти інваріанти тензора I_1, I_2, I_3.

<u>Розв’язання</u>: Знайдемо девіатор тензора $\left\| T_i^{\cdot k} \right\|$ за формулою (2.13)

$$D_i^{\cdot k} = T_i^{\cdot k} - \frac{1}{3}T_l^{\cdot l} g_i^{\cdot k} = T_i^{\cdot k} - \frac{7}{3} g_i^{\cdot k} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix} - \frac{7}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 4 \\ 5 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

$$B_i^{\cdot k} = \frac{1}{3}T_l^{\cdot l} g_i^{\cdot k} = \frac{7}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{Vmatrix} \text{ – кульовий тензор,}$$

$$T_i^{\cdot k} = D_i^{\cdot k} + B_i^{\cdot k}.$$

Знайдемо інваріанти тензора $T_i^{\cdot k}$ за формулами (2.12)

$I_1 = 1 + 3 + 3 = 7$,

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 13,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27.$$

<u>Ознака тензорності</u>

Нехай A^i, A_i, B^i, B_i – контраваріантні й коваріантні компоненти двох векторів $\overline{A}$, $\overline{B}$. Якщо за допомогою величин T^{ik}, T_{ik}, T_i^k можна скласти інваріанти вигляду

$$T^{ik} A_i A_k = inv,$$

$$T_{ik} A^i A^k = inv, \qquad (2.13)$$
$$T_i^k A^i B_k = inv,$$

тоді ці величини є, відповідно, контраваріантними, коваріантними і мішаними компонентами тензора другого рангу.

2.7 Псевдотензори

Псевдотензор є об’єктом близьким до тензора за написанням й природою, його компоненти мають такі властивості:

1) при перетворенні системи координат, закон перетворення компонент псевдотензора є таким самим як і у тензора;

2) при перетворенні координат, що переводить праву систему в ліву і навпаки, закон перетворення псевдотензора відрізняється від закону перетворення тензора знаком

$$\Pi^{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}_{k'_1 k'_2 \ldots k'_s} = -\alpha^{l_1}_{k'_1} \alpha^{l_2}_{k'_2} \ldots \alpha^{l_s}_{k'_s} \alpha^{i'_1}_{m_1} \alpha^{i'_1}_{m_1} \ldots \alpha^{i'_r}_{m_r} \Pi^{m_1 m_2 \ldots m_r}_{l_1 l_2 \ldots l_s} .$$

Прикладом одиничного псевдотензора третього рангу можуть служити величини ε_{ijk} (символи Леві-Чівіта), які задаються співвідношеннями

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\bar{i}_i \times \bar{i}_j\right) \cdot \bar{i}_k ,$$

де $\bar{i}_m$ – орти прямокутної декартової системи координат, тобто ε_{ijk} дорівнюють нулеві, одиниці або мінус одиниці, в залежності від того які значення приймають індекси i, j, k.

За допомогою символів Леві-Чівіта можна утворювати псевдотензори будь-якого рангу. Наприклад, $\Pi = \varepsilon_{ijk} T^{ijk}$ – псевдоскаляр, якщо T^{ijk} – тензор. $\Pi^i = \varepsilon^{ijk} T_{jk}$ – псевдовектор. Якщо A_j, B_k – компоненти векторів $\overline{A}, \overline{B}$, то величини $\Pi^i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k$ є компонентами їх векторного добутку $\overline{A} \times \overline{B}$.

<u>Основні властивості псевдотензорів</u>

1) Сума двох псевдотензорів одного рангу є псевдотензором того ж рангу.

2) Добуток двох псевдотензорів є тензором, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників.

3) Добуток псевдотензора й тензора – псевдотензор.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте поняття тензора другого рангу. Які назви мають тензори нульового і першого рангу? Визначте тензор довільного рангу.

2. Що таке фізичні компоненти тензора?

3. Скільки компонент має тензор четвертого рангу у тривимірному (двовимірному) просторі?

4. Перерахуйте основні операції над тензорами. Як визначається операція згортання тензора?

5. Які тензори називають симетричними і кососиметричними? Як визначаються операції симетрування й альтернування тензорів?

6. Що називають діадним добутком векторів?

7. Сформулюйте поняття власних векторів, головних осей тензора другого рангу. Що таке головні значення тензора?

8. Яку поверхню називають тензорною? В якому випадку ця тензорна поверхня буде еліпсоїдом?

9. Як визначаються інваріанти тензора другого рангу? Що таке девіатор? Якій тензор називають кульовим?

10. Сформулюйте ознаку тензорності для тензора другого рангу.

11. Який об'єкт називають псевдотензором? Наведіть приклади псевдотензорів та перерахуйте їх основні властивості. Що таке символи Леві-Чівіта?

Індивідуальне завдання №2

1. Задано компоненти тензора другого рангу A й матриця α переходу від старої системи координат до нової. Знайти аналогічні за будовою компоненти тензора A в новій системі координат.

2. Тензор A_{ik} задано в прямокутній декартовій системі координат із базисом $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$. Визначити коваріантні, контраваріантні і мішані компоненти того ж тензора в системі координат із базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, вектори якого виражені через орти $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$.

3. Задано компоненти тензора четвертого рангу A в системі координат із базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, а також метричний тензор G. Опустити (підняти) указаний індекс.

4. Задано компоненти двох тензорів третього рангу A і B. Знайти суму цих тензорів.

5. Задано тензори A і B. Знайти добутки $A \otimes B$ і $B \otimes A$.

6. Задано тензори T^{ij} і A_k. Знайти вектор, утворений множенням тензора на вектор із подальшою згорткою по першому індексу тензора й індексу вектора.

7. Задано тензор третього рангу. Симетрувати й альтернувати його по парі нижніх індексів.

8. Знайти головні значення і головні напрями тензора. Визначити вид тензорної поверхні.

9. Задано тензор другого рангу T. Представити тензор T у вигляді суми девіатора і кульового тензора. Знайти інваріанти I_1, I_2, I_3 тензора T.

Варіант 1

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$

2. $\left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2, \ \bar{e}_2 = -\bar{i}_3, \ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2.$

3. Опустити другий верхній індекс.
$A^{11}_{..ik} = -2, \ A^{12}_{..ik} = 0, \ A^{21}_{..ik} = 2, \ A^{22}_{..ik} = 1 \ (i, k = 1{,}2),$
$g_{11} = 9, \ g_{12} = g_{21} = 3, \ g_{22} = -2.$

4. $A_{111} = A_{121} = 2, \ A_{112} = 0, \ A_{122} = -5, \quad A_{212} = A_{222} = 6,$
$A_{211} = A_{221} = 8; \ B_{111} = B_{212} = 0, \ B_{112} = -2, \ B_{121} = 3, \ B_{122} = 10,$
$B_{211} = -7, \ B_{221} = 11, \ B_{222} = -5.$

5. $A^1 = 2, \ A^2 = 1, \ \left\| B_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}.$

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{Vmatrix}, \ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

7. $T^1_{11} = x^1 - x^2, \ T^1_{12} = \mathrm{e}^{x^1}, \ T^1_{21} = \mathrm{e}^{-x^2}, \ T^1_{22} = 3x^1 + x^2,$
$T^2_{11} = \left(x^1\right)^3 + \left(x^2\right)^3, \ T^2_{12} = \dfrac{x^1}{x^2}, \ T^2_{21} = \dfrac{x^2}{x^1}, \ T^2_{22} = 0.$

8. $\left\| T_i^{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$

9. $\left\| T^{i}_{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$

Варіант 2

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -5 \\ 8 & -3 & 8 \end{Vmatrix}, \ \alpha = \left\| \alpha^{k'}_{i} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$

2. $\left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = \bar{i}_2, \ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 3\bar{i}_3, \ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_3.$

3. Опустити індекс k.
$A^{.ik}_{11} = 1, \ A^{.ik}_{12} = 5, \ A^{.ik}_{21} = -3, \ A^{.ik}_{22} = 0 \ (i, k = 1,2);$
$g_{11} = 2, \ g_{12} = g_{21} = 1, \ g_{22} = 4.$

4. $A_{111} = 1, \ A_{112} = 2, \ A_{121} = A_{122} = 0, \quad A_{211} = 7, \ A_{212} = 4,$
$A_{221} = 6, \ A_{222} = 3; B_{111} = B_{222} = B_{121} = -1, \ B_{112} = 8,$
$B_{122} = B_{211} = -7, \ \ B_{221} = 0, \ B_{222} = 3.$

5. $A^1 = 3, \ A^2 = -1, \ \left\| B_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 6 \end{Vmatrix}.$

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{Vmatrix}, \ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix}.$

7. $T^1_{11} = x^2, \ T^1_{12} = x^3 - 2x^1, \ T^1_{21} = -\left(x^1\right)^2 + 3x^2, \ T^1_{22} = \cos x^1 - \sin x^2,$
$T^2_{11} = -\operatorname{tg}\left(x^1 x^2\right), \ T^2_{12} = T^2_{21} = x^3, \ T^2_{22} = -x^3 \sin x^2.$

8. $\left\| T^{.k}_{i} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

9. $\left\| T^{i}_{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

Варіант 3

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -5 & 3 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{Vmatrix}, \quad \alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

2. $\left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 8 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2, \ \bar{e}_2 = 2\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = 2\bar{i}_3.$

3. Опустити індекс k.
$A_{11}^{..ik} = 3, \ A_{12}^{..ik} = 0, \ A_{21}^{..ik} = -7, \ A_{22}^{..ik} = 10 \ (i, k = 1,2);$
$g_{11} = 1, \ g_{12} = g_{21} = -2, \ g_{22} = 5.$

4. $A_{111} = 1, \ A_{112} = A_{121} = -1, \ A_{122} = 0, \quad A_{211} = -8, \ A_{212} = 5,$
$A_{221} = 6, \ A_{222} = 7; B_{111} = B_{222} = B_{333} = 1, \ B_{112} = 8, \ B_{121} = 10,$
$B_{122} = -3, \ B_{211} = B_{212} = -5.$

5. $A^1 = 3, \ A^2 = 1, \ \left\| B_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}.$

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{Vmatrix}.$

7. $T_{11}^1 = x^1 + 5x^3, \ T_{12}^1 = x^2 + x^3, \ T_{21}^1 = -x^2, \ T_{22}^1 = \lg x^3,$
$T_{11}^2 = x^1 + x^2, \ T_{12}^2 = -x^2 + x^3, \ T_{21}^2 = 7x^1, \ T_{22}^2 = \left(x^2\right)^2.$

8. $\left\| T_i^{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{Vmatrix}.$

9. $\left\| T_{.k}^{i} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

Варіант 4

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 11 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

2. $\|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = \bar{i}_2$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 - 5\bar{i}_3$, $\bar{e}_3 = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_3$.

3. Опустити індекс k.

$A_{11}^{..ik} = -8$, $A_{12}^{..ik} = -4$, $A_{21}^{..ik} = 6$, $A_{22}^{..ik} = 0$ $(i, k = 1,2)$;

$g_{11} = -2$, $g_{12} = g_{21} = 3$, $g_{22} = -5$.

4. $A_{111} = -8$, $A_{112} = A_{121} = 0$, $A_{122} = -10$, $A_{211} = 6$, $A_{212} = 1$, $A_{221} = 7$, $A_{222} = 11$; $B_{111} = B_{222} = B_{333} = -1$, $B_{112} = -3$, $B_{121} = 5$, $B_{122} = 3$, $B_{211} = B_{212} = -7$.

5. $A^1 = 2$, $A^2 = 5$, $\|B_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 3 & 10 \\ -7 & 1 \end{Vmatrix}$.

6. $\|T^{ij}\| = \begin{Vmatrix} -8 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\|A_k\| = \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{Vmatrix}$.

7. $T_{11}^1 = x^1 + 10x^2$, $T_{12}^1 = \cos x^2$, $T_{21}^1 = \sin x^2$, $T_{22}^1 = x^3$, $T_{11}^2 = 5$, $T_{12}^2 = -x^1 + x^2$, $T_{21}^2 = x^1 - x^2$, $T_{22}^2 = \mathrm{e}^{x^1}$.

8. $\|T_i^{.k}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{Vmatrix}$.

9. $\|T_{.k}^{i}\| = \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$.

Варіант 5

1. $A = \|A^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 8 \\ 5 & 6 & 11 \end{Vmatrix}$, $\alpha = \|\alpha_i^{k'}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

2. $\|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = \bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 3\bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + \bar{i}_3$.

3. Опустити індекс k.

$A_{11}^{..ik} = 3$, $A_{12}^{..ik} = 9$, $A_{21}^{..ik} = -10$, $A_{22}^{..ik} = 7$ $(i, k = 1,2)$;

$g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 4$, $g_{22} = 17$.

4. $A_{111} = 71$, $A_{112} = -3$, $A_{121} = 10$, $A_{122} = 10$, $A_{211} = 13$,

$A_{212}=-9$, $A_{221}=17$, $A_{222}=17$; $B_{111}=B_{112}=B_{221}=-14$, $B_{121}=-8$, $B_{122}=6$, $B_{211}=-6$, $B_{212}=B_{222}=-15$.

5. $A^1=17$, $A^2=2$, $\|B_{ik}\|=\begin{Vmatrix}2 & 11\\ -8 & 5\end{Vmatrix}$.

6. $\|T^{ij}\|=\begin{Vmatrix}1 & 7 & -10\\ 3 & 2 & 8\\ 0 & 3 & 4\end{Vmatrix}$, $\|A_k\|=\begin{Vmatrix}7\\ 2\\ 4\end{Vmatrix}$.

7. $T_{11}^1=3x^2-4x^1$, $T_{12}^1=x^3+x^2$, $T_{21}^1=-x^3+5x^2$, $T_{22}^1=0$,

$T_{11}^2=x^3x^2$, $T_{12}^2=\left(x^3\right)^2$, $T_{21}^2=\dfrac{x^1}{x^3}$, $T_{22}^2=\operatorname{tg}\left(x^1x^2\right)$.

8. $\|T_{i}^{.k}\|=\begin{Vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 5 & 26\end{Vmatrix}$.

9. $\|T_{.k}^{i}\|=\begin{Vmatrix}7 & 12 & 1\\ 5 & 6 & 8\\ -1 & 0 & 3\end{Vmatrix}$.

Варіант 6

1. $A=\|A^{ij}\|=\begin{Vmatrix}4 & 1 & -3\\ 5 & -5 & 0\\ -7 & -1 & 1\end{Vmatrix}$, $\alpha=\|\alpha_i^{k'}\|=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix}$.

2. $\|A_{ik}\|=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 4\end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1=2\bar{i}_1-3\bar{i}_3$, $\bar{e}_2=\bar{i}_3$, $\bar{e}_3=2\bar{i}_2$.

3. Підняти індекс k.

$A_{ik}^{..11}=3$, $A_{ik}^{..12}=-1$, $A_{ik}^{..21}=4$, $A_{ik}^{..22}=-1$ $(i,k=1,2)$;

$g^{11}=3$, $g^{12}=g^{21}=1$, $g^{22}=\dfrac{2}{3}$.

4. $A_{111}=0$, $A_{112}=9$, $A_{121}=8$, $A_{122}=-2$, $A_{211}=4$, $A_{212}=-6$, $A_{221}=6$, $A_{222}=-5$; $B_{111}=B_{121}=B_{122}=-6$, $B_{112}=0$, $B_{221}=3$, $B_{211}=-3$, $B_{212}=B_{222}=-9$.

5. $A^1=3$, $A^2=-1$, $\|B_{ik}\|=\begin{Vmatrix}2 & -6\\ 3 & 1\end{Vmatrix}$.

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{Vmatrix}$.

7. $T_{11}^{1} = x^1 + x^2$, $T_{12}^{1} = \sin x^1$, $T_{21}^{1} = \cos x^2$, $T_{22}^{1} = -x^2$, $T_{11}^{2} = \mathrm{e}^{x^1}$, $T_{12}^{2} = -x^1 + 3\left(x^2\right)^2$, $T_{21}^{2} = x^1 + 6x^2$, $T_{22}^{2} = x^1$.

8. $\left\| T_{i}^{\cdot k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

9. $\left\| T_{.k}^{i} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

Варіант 7

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$, $\alpha = \left\| \alpha_{i}^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{Vmatrix}$.

2. $\left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = 4\bar{i}_3$.

3. Підняти індекс k.
$A_{ik}^{\cdot\cdot 11} = 8$, $A_{ik}^{\cdot\cdot 12} = -3$, $A_{ik}^{\cdot\cdot 21} = 4$, $A_{ik}^{\cdot\cdot 22} = 0$ $(i, k = 1,2)$;
$g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 3$, $g^{22} = 10$.

4. $A_{111} = 3$, $A_{112} = 6$, $A_{121} = -3$, $A_{122} = 6$, $A_{211} = -7$, $A_{212} = 0$, $A_{221} = -4$, $A_{222} = -2$; $B_{111} = B_{222} = -3$, $B_{112} = 7$, $B_{121} = -7$, $B_{122} = 4$, $B_{212} = 3$, $B_{221} = B_{211} = 6$.

5. $A^1 = 8$, $A^2 = 3$, $\left\| B_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{Vmatrix}$.

7. $T_{11}^{1} = \left(x^1\right)^2$, $T_{12}^{1} = -x^2$, $T_{21}^{1} = x^1$, $T_{22}^{1} = \mathrm{tg}\, x^2$, $T_{11}^{2} = \mathrm{ctg}\, x^1$,
$T_{12}^{2} = \sin^2\left(x^1 + x^2\right)$, $T_{21}^{2} = \cos^2\left(x^1 + x^2\right)$, $T_{22}^{2} = 0$.

8. $\left\|T_{i}^{\cdot k}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix}.$

9. $\left\|T_{\cdot k}^{i}\right\| = \begin{Vmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{Vmatrix}.$

Варіант 8

1. $A = \left\|A^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{Vmatrix}, \ \alpha = \left\|\alpha_{i}^{k'}\right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}.$

2. $\left\|A_{ik}\right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = \bar{i}_3, \ \bar{e}_2 = \bar{i}_3 + \bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1.$

3. Підняти індекс k.
$A_{ik}^{\cdot\cdot 11} = 2, \ A_{ik}^{\cdot\cdot 12} = 6, \ A_{ik}^{\cdot\cdot 21} = -1, \ A_{ik}^{\cdot\cdot 22} = 3 \ (i, k = 1,2);$
$g^{11} = 7, \ g^{12} = g^{21} = 4, \ g^{22} = 3.$

4. $A_{111} = 3, \ A_{112} = A_{121} = A_{122} = -9, \ A_{211} = A_{222} = 6, \ A_{212} = -8,$
$A_{221} = 7, \ B_{111} = B_{222} = -6, \ B_{112} = 3, \ B_{121} = 4, \ B_{122} = -10,$
$B_{212} = 18, \ B_{211} = 0, \ B_{221} = 2.$

5. $A^1 = 8, \ A^2 = 4, \ \left\|B_{ik}\right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$

6. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 2 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}, \ \left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{Vmatrix}.$

7. $T_{11}^{1} = T_{22}^{1} = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2, \ T_{12}^{1} = \operatorname{arctg}\left(x^1 x^2\right), \ T_{21}^{1} = \operatorname{arcctg}\left(x^1 x^2\right),$
$T_{11}^{2} = \sin x^2, \ T_{12}^{2} = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + x^1 x^2, \ T_{21}^{2} = x^1 x^2, \ T_{22}^{2} = \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2.$

8. $\left\|T_{i}^{\cdot k}\right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & -1 \end{Vmatrix}.$

9. $\left\| T^{i}_{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$

Варіант 9

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{Vmatrix}, \ \alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{Vmatrix}.$

2. $\left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 9 & 6 & 1 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = 2\bar{i}_2, \ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 - 3\bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + 4\bar{i}_2 + \bar{i}_3.$

3. Підняти індекс k.
$A_{ik}^{..11} = 7, \ A_{ik}^{..12} = 3, \ A_{ik}^{..21} = -2, \ A_{ik}^{..22} = 6 \ (i, k = 1,2);$
$g^{11} = -2, \ g^{12} = g^{21} = -1, \ g^{22} = -1.$

4. $A_{111} = 7, \ A_{112} = A_{121} = 3, \ A_{122} = -5, \ A_{211} = 9,$
$A_{212} = A_{221} = -1, \quad A_{222} = 4, \ B_{111} = B_{222} = -8, \ B_{112} = 1,$
$B_{121} = 13, \ \ B_{122} = 10, \ B_{212} = 8, \ B_{211} = 4, \ B_{221} = 21.$

5. $A^1 = 0, \ A^2 = -3, \ \left\| B_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} -5 & 7 \\ 8 & -1 \end{Vmatrix}.$

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}, \ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}.$

7. $T_{11}^1 = x^1 x^2, \ T_{12}^1 = x^1 \operatorname{sh} x^2, \ T_{21}^1 = x^2 \operatorname{sh} x^2, \ T_{22}^1 = -1, \ T_{11}^2 = 0,$
$T_{12}^2 = \operatorname{ch}^2 x^1, \ T_{21}^2 = \operatorname{sh}^2 x^1, \ T_{22}^2 = x^1.$

8. $\left\| T_i^{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$

9. $\left\| T^{i}_{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \end{Vmatrix}.$

Варіант 10

1. $A = \left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$.

2. $\left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = 3\bar{i}_3$, $\bar{e}_2 = 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3$.

3. Підняти індекс k.
$A_{ik}^{..11} = -10$, $A_{ik}^{..12} = 3$, $A_{ik}^{..21} = 0$, $A_{ik}^{..22} = -6$ $(i, k = 1,2)$;
$g^{11} = 8$, $g^{12} = g^{21} = 3$, $g^{22} = 1$.

4. $A_{111} = A_{112} = -6$, $A_{122} = A_{121} = -8$, $A_{211} = A_{212} = A_{221} = 4$, $A_{222} = 5$; $B_{111} = B_{212} = B_{222} = 0$, $B_{112} = 6$, $B_{121} = 7$, $B_{122} = 5$, $B_{211} = -2$, $B_{221} = -9$.

5. $A^1 = -6$, $A^2 = 7$, $\left\| B_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}$.

6. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{Vmatrix}$.

7. $T_{11}^1 = 17$, $T_{12}^1 = x^1 + x^2$, $T_{21}^1 = x^1 - x^2$, $T_{22}^1 = 3x^1x^2$, $T_{11}^2 = 0$, $T_{12}^2 = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2$, $T_{21}^2 = 2x^2x^1$, $T_{22}^2 = x^1 - x^2$.

8. $\left\| T_{i}^{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$.

9. $\left\| T_{.k}^{i} \right\| = \begin{Vmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$.

3 ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

3.1 Тензорне поле. Тензор-функція

<u>Тензорне поле</u>

Якщо кожній точці M деякої множини X тривимірного простору R^3 однозначно зіставлений деякий тензор T, то кажуть, що задано поле цього тензора і пишуть $T = T(M)$, $M \in X \subset R^3$.

Окремі види тензорних полів: скалярне поле $u = u(M)$; векторне поле $\overline{A} = \overline{A}(M)$; поле тензора 2-го рангу $P_{ik} = P_{ik}(M)$. Точку M у просторі визначає її радіус-вектор $\bar{r}$, таким чином, ми можемо розглядати дані поля як однозначні функції радіуса-вектора: $u = u(\bar{r})$, $\overline{A} = \overline{A}(\bar{r})$, $P_{ik} = P_{ik}(\bar{r})$, $T = T(\bar{r})$.

<u>Тензор-функція скалярного аргументу</u>

Якщо кожному значенню скалярної величини $t \in X \subset R^1$ однозначно зіставлене значення тензорної величини T, то кажуть, що задана тензор-функція скалярного аргументу і пишуть $T = T(t)$, $t \in X \subset R^1$.

Похідною тензор-функції по скалярному аргументу називається границя

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

Похідна тензор-функції по скалярному аргументу є тензором того ж рангу й обчислюється за звичайними правилами шляхом почленного диференціювання компонент тензора.

Приклад 3.1. Задано компоненти тензора другого рангу

$$\|P_{ik}\| = \begin{Vmatrix} tx_1 & x_2 \sin t & x_3 \\ -x_2 \sin t & t^2 x_2^2 & e^t x_3 \\ -x_3 & -e^t x_3 & t^3 x_3^3 \end{Vmatrix}.$$

Знайти $\dfrac{\partial P}{\partial t}$.

<u>Розв'язання</u>: Для того щоб знайти зазначену похідну, необхідно продиференціювати кожну компоненту тензора як функцію змінної t. Наприклад $\dfrac{\partial P_{11}}{\partial t} = \dfrac{\partial(tx_1)}{\partial t} = x_1$, аналогічно одержимо інші компоненти тензора

$$\left\| \frac{\partial P_{ik}}{\partial t} \right\| = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \cos t & 0 \\ -x_2 \cos t & 2tx_2^2 & e^t x_3 \\ 0 & -e^t x_3 & 3t^2 x_3^3 \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо докладніше окремі випадки тензорних полів.

3.2 Скалярні поля і їх характеристики

Нехай у просторі задано скалярне поле $u=u(M)$, $M \in X \subset R^3$. Визначимо його основні характеристики.

Поверхня рівня – сукупність точок множини X, у яких функція $u=u(M)$ приймає одне і теж постійне значення, $u(M)=const$, $M \in S$.

Похідна за напрямом

Нехай у скалярному полі зафіксована точка M_0 і деякий напрям, який визначається одиничним вектором $\bar{l}$. Виберемо іншу точку M таким чином, щоб вектор $\overline{M_0 M}$ був колінеарний до вектора $\bar{l}$. Нехай $\Delta u = u(M)-u(M_0)$, $\Delta l = \left|\overline{M_0 M}\right|$ – довжина вектора $\overline{M_0 M}$.

Похідною скалярного поля $u=u(M)$ в точці M_0 за напрямом вектора $\bar{l}$ називають границю $\dfrac{\partial u}{\partial l} \equiv \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля в даній точці за даним напрямом.

Якщо напрям вектора $\bar{l}$ є дотичним до поверхні рівня, яка проходить через дану точку, то $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$ (на поверхні рівня поле стале).

Градієнт скалярного поля

Нехай скалярне поле $u=u(M)$, що задане в прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) *(домовимось для декартових координат індекси писати внизу)*, має неперервні частинні похідні першого порядку, тоді градієнтом скалярного поля $u=u(x_1,x_2,x_3)$ в точці $M(x_1,x_2,x_3)$ називається «вектор», який має координатами частинні похідні поля в даній точці, і записується

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\bar{i}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\bar{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\bar{i}_3 \tag{3.1}$$

Властивості градієнта

1. Градієнт скалярного поля в даній точці є ортогональним до поверхні рівня, що проходить через цю точку.

2. Похідна за напрямом в даній точці дорівнює проекції градієнта на даний напрям, тобто $\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \bar{l}$. З іншого боку, права частина останньої рівності є згортка градієнта і орта $\bar{l}$.

3. За напрямом градієнта в точці M скалярне поле u має найбільшу швидкість зростання в цій точці. Величина максимальної швидкості поля u в точці M дорівнює модулю градієнта

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2}.$$

Оператор «набла»

Якщо ввести символічний вектор-оператор за правилом

$$\nabla = \bar{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

то більшість диференціальних операцій приймають більш простий вигляд, наприклад, $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

За допомогою оператора «набла» властивості градієнта, що пов’язані з арифметичними діями над скалярними полями $u(M)$, $v(M)$, $c(M) \equiv const$, можна записати в наступному скороченому вигляді:

1. $\nabla(cu) = c\nabla u$;
2. $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$;
3. $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$;
4. $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$.

Якщо у просторі задана ортогональна криволінійна система $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, то

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\bar{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\bar{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\bar{e}_3, \tag{3.3}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Приклад 3.2. Задано скалярне поле $u = \left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^3$ й точки $M_0(2;1;2)$, $M_1(1;0;1)$.

Знайти:

а) поверхні рівня, що проходять через точки M_0, M_1;

б) похідну скалярного поля u в точці M_0 за напрямом вектора $\overline{M_0 M_1}$;

в) напрям та швидкість найскорішого зростання скалярного поля u в точці M_0.

Розв’язання: а) знайдемо поверхню рівня, що проходить через точку $M_0(2;1;2)$.

$$\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^3=C=u(M_0)=8 \Leftrightarrow x_1^2+2x_2^2-x_3^2=2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{2}+x_2^2-\frac{x_3^2}{2}=1.$$

Це однопорожнинний гіперболоїд.

Аналогічно для точки $M_1(1;0;1)$

$$\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^3=C=u(M_1)=0 \;\Leftrightarrow\; x_3^2=x_1^2+2x_2^2.$$

Отримали конус другого порядку.

б) знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{M_0M_1}$, для цього нормуємо вектор $\overline{M_0M_1}=(-1;-1;-1)$. Позначимо $\bar{l}=\dfrac{\overline{M_0M_1}}{|M_0M_1|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Знайдемо частинні похідні поля в точці $M_0(2;1;2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=6x_1\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^2=48;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=12x_2\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^2=48;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}=-6x_3\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^2=-48.$$

Тоді за формулою (3.1) $\operatorname{grad}u(M_0)=48(\bar{i}_1+\bar{i}_2-\bar{i}_3)$ і похідна за напрямом $\overline{M_0M_1}$ дорівнює $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad}u\cdot\bar{l}=-48\dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{48}{\sqrt{3}}$.

в) у даній задачі треба знайти градієнт та його модуль (дивись властивості градієнта) в точці $M_0(2;1;2)$

$\operatorname{grad}u(M_0)=48(\bar{i}_1+\bar{i}_2-\bar{i}_3)$ визначає напрям найскорішого зростання поля u в точці M_0.

$\dfrac{\partial u}{\partial l}_{\max}=|\operatorname{grad}u|=48\sqrt{3}$ визначає максимальну швидкість поля в цій точці.

3.3 Векторні поля та їх характеристики

Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат (x_1,x_2,x_3) і векторне поле

$$\overline{A}(M)=A_1(x_1,x_2,x_3)\bar{i}_1+A_2(x_1,x_2,x_3)\bar{i}_2+A_3(x_1,x_2,x_3)\bar{i}_3,\; M\in X\subset R^3.$$

Визначимо основні характеристики векторного поля $\overline{A}(M)$.

Векторні лінії

Лінія, дотична до якої у кожній точці M є колінеарною до вектора $\overline{A}(M)$, називається векторною лінією поля. Якщо поле неперервно-диференційовне, то векторні лінії визначаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3}. \tag{3.4}$$

Якщо поле $\overline{A}(M)$ задано в криволінійних ортогональних координатах (q^1, q^2, q^3), то система (3.4) матиме вигляд

$$\frac{H_1 dq_1}{A_1} = \frac{H_2 dq_2}{A_2} = \frac{H_3 dq_3}{A_3}, \tag{3.5}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Потік векторного поля

Якщо у векторному полі $\overline{A}(M)$ задана двостороння поверхня S з вектором нормалі $\overline{n}$, то потоком векторного поля $\overline{A}(M)$ через поверхню S за напрямом нормалі $\overline{n}$ називається поверхневий інтеграл

$$\Pi_S = \iint_S \overline{n} \cdot \overline{A} dS, \tag{3.6}$$

або $\Pi_S = \iint_S A_n dS$, де A_n – проекція вектора $\overline{A}$ на вектор $\overline{n}$.

Дивергенція векторного поля

Дивергенцією векторного поля $\overline{A}$ в точці M називається границя

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (S \to M)}} \frac{1}{\tau} \iint \overline{n} \cdot \overline{A} dS \equiv \operatorname{div} \overline{A},$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує деякий окіл точки M; τ – об'єм, обмежений поверхнею S; $\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S; запис $(S \to M)$ означає, що поверхня S стягується в точку M.

У прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3), у випадку неперервно-диференційовного векторного поля, дивергенція в кожній точці виражається формулою

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \tag{3.7}$$

Якщо поле $\overline{A}(M)$ задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, то

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial\left(A_1 H_2 H_3\right)}{\partial q^1} + \frac{\partial\left(A_2 H_1 H_3\right)}{\partial q^2} + \frac{\partial\left(A_3 H_1 H_2\right)}{\partial q^3}\right), \quad (3.8)$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

За допомогою оператора ∇ дивергенцію можна записати як скалярний добуток «вектора» ∇ на вектор $\overline{A}$: $\operatorname{div}\overline{A} = \nabla \cdot \overline{A}$.

<u>Теорема Остроградського-Гаусса</u> у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iiint\limits_{\tau} \operatorname{div}\overline{A}d\tau = \iint\limits_{S} \overline{n} \cdot \overline{A}dS\,, \quad (3.9)$$

де S – замкнена поверхня, що обмежує об’єм τ; $\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S; векторне поле $\overline{A}$ є неперевно-диференційовним на $\tau \cup S$.

<u>Циркуляція векторного поля</u>

Циркуляцією векторного поля $\overline{A}$ вздовж замкненої кривої L, яку задано параметричним рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(s)$, називається криволінійний інтеграл

$$Ц = \oint\limits_{L} \overline{A} \cdot d\overline{r}\,. \quad (3.10)$$

У прямокутній декартовій системі координат $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ формула (3.10) має вигляд:

$$Ц = \oint\limits_{L} A_1\left(x_1, x_2, x_3\right)dx_1 + A_2\left(x_1, x_2, x_3\right)dx_2 + A_3\left(x_1, x_2, x_3\right)dx_3\,.$$

<u>Ротор векторного поля</u>

Ротором векторного поля $\overline{A}$ в точці M називається границя

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (S \to M)}} \frac{1}{\tau}\iint \overline{n} \times \overline{A}dS \equiv \operatorname{rot}\overline{A}\,.$$

Ротор є псевдовектором (аксіальним вектором).

У прямокутній декартовій системі координат $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ для ротора справедлива формула

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\bar{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\bar{i}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\bar{i}_3,$$

або

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \overline{A}. \tag{3.11}$$

Якщо поле $\overline{A}$ задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, то

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1\bar{e}_1 & H_2\bar{e}_2 & H_3\bar{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & \dfrac{\partial}{\partial q^3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix}, \tag{3.12}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Градієнт, дивергенцію й ротор можна розглядати як диференціальні операції, які застосовуються до скалярних і векторних полів.

Диференціальні операції другого порядку

Якщо поле $\overline{A}$ двічі неперервно-диференційовне, то можна утворити такі операції другого порядку:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} u = \nabla^2 u = \Delta u$, де $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – *оператор Лапласа* в декартових координатах;
2) $\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\overline{A}\right) = \overline{\nabla}\left(\overline{\nabla} \cdot \overline{A}\right)$;
3) $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\overline{A}\right) = \overline{\nabla} \cdot \left(\overline{\nabla} \times \overline{A}\right) \equiv 0$;
4) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} u \equiv 0$;
5) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = \overline{\nabla} \times \left(\overline{\nabla} \times \overline{A}\right) = \overline{\nabla}\left(\overline{\nabla} \cdot \overline{A}\right) - \left(\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\overline{A}\right) - \Delta\overline{A}$.

Теорема Стокса у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iint_S \bar{n} \cdot \operatorname{rot}\overline{A}\, dS = \oint_L \overline{A} \cdot d\bar{r}, \tag{3.13}$$

де L – замкнений контур, який обмежує двосторонню поверхню S, поле $\overline{A}$ – неперервно-диференційовне на контурі L і на поверхні S.

Приклад 3.3.

Знайти потік векторного поля $\overline{A} = (x_1 + 3x_2)\bar{i}_1 + (x_3 - x_2)\bar{i}_2 + (2x_1 - x_3)\bar{i}_3$ через зовнішню сторону поверхні S: $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, яка знаходиться у першому октанті. Обчислення виконати двома способами: безпосередньо та за теоремою Остроградського-Гаусса.

Розв'язання: А) Перший спосіб (безпосередньо).

Розглянемо поверхню S. Ця поверхня є замкненою і кусково-гладкою. Вона складається з трьох площин S_{OCB}: $x_1 = 0$; S_{OAC}: $x_2 = 0$; S_{OAB}: $x_3 = 0$ і параболоїда S_{ACB}: $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$ (рис. 4).

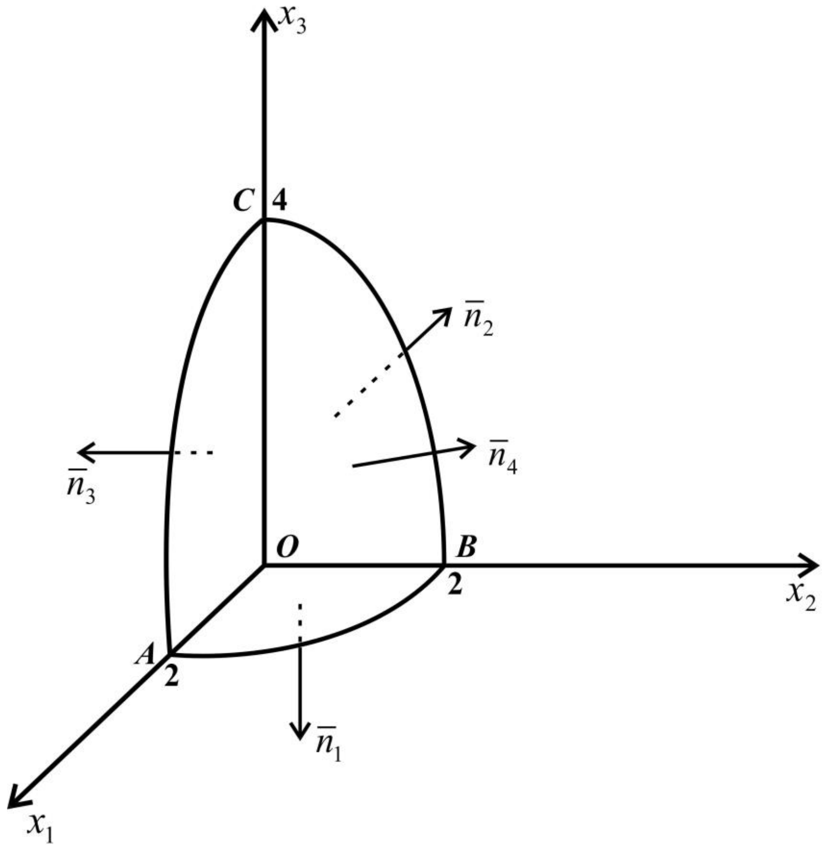

Рис. 4

За властивістю адитивності поверхневого інтеграла, маємо

$$\Pi_S = \Pi_{S_{OAB}} + \Pi_{S_{OBC}} + \Pi_{S_{OAC}} + \Pi_{S_{ABC}}.$$

Обчислимо окремо кожний інтеграл:

1. S_{OAB}: $x_3 = 0$, $\bar{n}_1 = -\bar{i}_3$. Проекція D_{OAB} поверхні S_{OAB} на площину Ox_1x_2 задається нерівностями D_{OAB}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le \sqrt{4 - x_1^2}$. Скалярний добуток $\bar{n} \cdot \overline{A} = x_3 - 2x_1$. Елемент площі $dS = dx_1 dx_2$. Звідси отримуємо

$$\Pi_{S_{OAB}} = \iint\limits_{S_{OAB}} (x_3 - 2x_1) dS = \iint\limits_{D_{OAB}} (-2x_1) dx_1 dx_2 = -2\int_0^2 dx_2 \int_0^{\sqrt{4-x_2^2}} x_1 dx_1 = -\int_0^2 (4 - x_2^2) dx_2 = -\frac{16}{3};$$

2. S_{OBC}: $x_1 = 0$, $\bar{n}_2 = -\bar{i}_1$. Проекція D_{OBC}: $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 4 - x_2^2$. $\bar{n} \cdot \bar{A} = -x_1 - 3x_2$. $dS = dx_2 dx_3$. Звідси

$$\Pi_{S_{OBC}} = \iint\limits_{S_{OBC}} (-x_1 - 3x_2) dS = \iint\limits_{D_{OBC}} (-3x_2) dx_2 dx_3 = -3\int_0^2 dx_2 \int_0^{4-x_2^2} x_2 dx_3 =$$

$$= -3\int_0^2 x_2 (4 - x_2^2) dx_2 = -12;$$

3. S_{OAC}: $x_2 = 0$, $\bar{n}_3 = -\bar{i}_2$. Проекція D_{OAC}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_3 \le 4 - x_1^2$. $\bar{n} \cdot \bar{A} = x_2 - x_3$. $dS = dx_1 dx_3$. Звідси

$$\Pi_{S_{OAC}} = \iint\limits_{S_{OAC}} (x_2 - x_3) dS = \iint\limits_{D_{OAC}} (-x_3) dx_1 dx_3 = -\int_0^2 dx_1 \int_0^{4-x_1^2} x_3 dx_3 = ;$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (4 - x_1^2)^2 dx_1 = -\frac{128}{15};$$

4. S_{ABC}: $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$. $\bar{n}_4 = \dfrac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \dfrac{2x_1\bar{i}_1 + 2x_2\bar{i}_2 + \bar{i}_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}}$, тут $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 4$. Проекція D_{ABC}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le \sqrt{4 - x_1^2}$.

$$\bar{n} \cdot \bar{A} = \frac{2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2(x_3 - x_2) + 2x_1 - x_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}}. \quad dS = \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}\, dx_1 dx_2.$$

Звідси отримуємо

$$\Pi_{S_{ABC}} = \iint\limits_{S_{ABC}} \frac{2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2(x_3 - x_2) + 2x_1 - x_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}} dS =$$

$$= \iint\limits_{D_{ABC}} \left[2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2\left(4 - x_1^2 - x_2^2 - x_2\right) + 2x_1 - 4 + x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_2 =$$

$$= -2\pi + 12 + \frac{16}{3} + \frac{128}{15}.$$

Підсумовуючи результати 1) – 4), отримаємо $\Pi_S = -2\pi$.

Б) Другий спосіб.

За теоремою Остроградського-Гаусса

$$\Pi_S = \iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{A} dV.$$

Знайдемо дивергенцію векторного поля та елемент об’єму в декартових координатах: $\operatorname{div}\overline{A} = -1$; $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Тоді

$$\Pi_S = -\iiint\limits_V dx_1 dx_2 dx_3 = -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_0^{4-r^2} dx_3 = -2\pi,$$

де (r, φ, x_3) – циліндричні координати.

Приклад 3.4. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{A} = x_2\bar{i}_1 + x_3\bar{i}_2 + x_1\bar{i}_3$ уздовж контуру $L: x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Обчислення виконати двома способами: безпосередньо та за теоремою Стокса.

Розв’язання: А) Перший спосіб (безпосередньо).

Контур L є лінією перетину циліндра $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ та площини $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, тобто це – еліпс. Виберемо на контурі L додатний напрям обходу і скористаємось формулою (3.10)

Спочатку запишемо параметричні рівняння контуру L

$$\begin{cases} x_1 = R\cos t, \\ x_2 = R\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \\ x_3 = -R\cos t - R\sin t, \end{cases}$$

Потім підставимо ці рівняння в (3.10). Отримаємо

$$Ц = \oint\limits_L x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_3 = \int\limits_0^{2\pi} \big(R\sin t(-R\sin t) + (-R\cos t - R\sin t)R\cos t +$$

$$+ R\cos t(R\sin t - R\cos t)\big)dt = -3\pi R^2.$$

Б) Другий спосіб (за формулою Стокса).

Виберемо в якості поверхні S, що натягнута на контур L площину $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Тоді за формулою Стокса (3.13)

$$Ц = \iint\limits_S \bar{n} \cdot \operatorname{rot}\overline{A} dS.$$

Знайдемо нормаль до поверхні S: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, яка узгоджена з напрямом обходу контуру L.

$$\bar{n} = \frac{\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3}{\sqrt{3}}.$$

Далі знайдемо $\operatorname{rot}\overline{A}$.

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = -(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3).$$

Обчислимо скалярний добуток і знайдемо елемент площі поверхні.

$\bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{A}=-\sqrt{3}$. $dS=\sqrt{3}dx_1dx_2$.

Підставляючи останні результати в (3.13), отримаємо

$$Ц=\iint\limits_S \bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{A}dS=-\iint\limits_S\sqrt{3}dS=-3\iint\limits_D dx_1dx_2=-3\pi R^2 .$$

3.4 Спеціальні векторні поля

Потенціальні векторні поля

Якщо векторне поле $\bar{A}$ є полем градієнта деякого скалярного поля u, то векторне поле $\bar{A}$ називається *потенціальним*, а поле u його *скалярним потенціалом*.

$$\bar{A}=\operatorname{grad}u,\ u \text{ – скалярній потенціал.}$$

Критерій потенціальності: Для того щоб диференційовне векторне поле $\bar{A}$ в однозв'язний області $X\subset R^3$ було потенціальним необхідно і достатньо, щоб $\operatorname{rot}\bar{A}=\bar{0}$, $\forall M\in X$.

Наслідок: Циркуляція потенціального поля $\bar{A}$ по будь якому замкненому контуру L, що лежіть усередині X дорівнює нулю.

Скалярний потенціал потенційного поля $\bar{A}$ можна знайти за формулою

$$u(M)=\int\limits_{x_1^0}^{x_1}A_1\left(t,x_2^0,x_3^0\right)dt+\int\limits_{x_2^0}^{x_2}A_2\left(x_1^0,t,x_3^0\right)dt+\int\limits_{x_3^0}^{x_3}A_3\left(x_1^0,x_2^0,t\right)dt+u(M_0) \quad (3.14)$$

де $M_0\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)$ – деяка фіксована точка поля, $M(x_1,x_2,x_3)$ – довільна точка поля.

Соленоїдальні векторні поля

Якщо поле $\bar{A}$ є полем ротора деякого векторного поля $\bar{W}$, то поле $\bar{A}$ називається *соленоїдальним*, а вектор $\bar{W}$ його *векторним потенціалом*.

$$\bar{A}=\operatorname{rot}\bar{W},\ \bar{W} \text{ – векторний потенціал.}$$

Критерій соленоїдальності: Для того щоб диференційовне векторне поле $\bar{A}$ в однозв'язний області $X\subset R^3$ було соленоїдальним необхідно й достатньо, щоб $div\bar{A}=0$, $\forall M\in X$.

Векторний потенціал соленоїдального поля в області X визначається з точністю до градієнта довільного скалярного поля, тобто якщо $\overline{W_0}$ – векторний потенціал поля $\overline{A}$, то $\overline{W} = \overline{W_0} + grad u$ – також векторний потенціал поля $\overline{A}$.

Таким чином, для знаходження векторного потенціалу достатньо знайти деякий частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задається векторним рівнянням $\overline{A} = \operatorname{rot}\overline{W}$. Для спрощення процедури знаходження розв'язку цієї системі можна одну з компонент вектора $\overline{W}$ вважати рівною нулю, наприклад, $W_3 = 0$. Тоді векторний потенціал можна знайти за формулою

$$\overline{W} = \bar{i}_2 \int\limits_{x_1^0}^{x_1} A_3(t, x_2, x_3)dt + \bar{i}_3 \left(-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} A_2(t, x_2, x_3)dt + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} A_1\left(x_1^0, t, x_3\right)dt \right) \quad (3.15)$$

<u>Квазіпотенціальне векторне поле</u>

Якщо існує скалярне поле $\mu(M)$ таке, що $\mu\overline{A} = \operatorname{grad} u$, для певного скалярного поля $u(M)$, тоді векторне поле $\overline{A}$ називається квазіпотенціальним.

Критерій квазіпотенціальності – $\overline{A} \cdot rot\overline{A} \equiv 0$.

<u>Гармонічне векторне поле</u>

Якщо векторне поле $\overline{A}$ є одночасно потенціальним і соленоїдальним, то його називають гармонічним (лапласовим) векторним полем.

Потенціал такого поля є розв'язком рівняння Лапласа $\Delta u = 0$.

Потенціал u у цьому випадку є гармонічною функцією.

Приклад 3.5. Переконатись, що векторне поле

$$\overline{A} = 2x_1x_2\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - 2x_2x_3\right)\bar{i}_2 - x_2^2\bar{i}_3$$

є потенціальним, та знайти його скалярний потенціал.

<u>Розв'язання</u>: Перевіримо критерій потенційності.

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 2x_1x_2 & x_1^2 - 2x_2x_3 & -x_2^2 \end{vmatrix} = \bar{i}_1(-2x_2 + 2x_2) + \bar{i}_2 \cdot 0 + \bar{i}_3(2x_1 - 2x_1) \equiv 0$$

Критерій виконується, тому поле є потенціальним і $\overline{A} = \operatorname{grad} u$.

Потенціал u знайдемо за формулою (3.14), за M_0 візьмемо начало координат, а за контур інтегрування – ламану, яка з'єднує точки M_0, M та має ланки, що паралельні осям координат. Тоді

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_0^{x_1} 2t \cdot 0dt + \int\limits_0^{x_2} \left(x_1^2 - 2t \cdot 0\right)dt + \int\limits_0^{x_3} \left(-x_2^2\right)dt = x_1^2x_2 - x_2^2x_3 + C.$$

Приклад 3.6.

Переконатись, що векторне поле $\overline{A} = x_1^2 x_2 \bar{i}_1 + \left(x_3 - x_1 x_2^2\right)\bar{i}_2 + 2x_1 \bar{i}_3$ є соленоїдальним та знайти його векторний потенціал.

Розв'язання: Перевіримо критерій соленоїдальності – $div\overline{A} \equiv 0$.
div $\overline{A} = 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 \equiv 0$.

Критерій виконується, тому

$$\overline{A} = \mathrm{rot}\,\overline{W} = \left(\frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}\right)\bar{i}_1 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}\right)\bar{i}_2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}\right)\bar{i}_3.$$

Нехай $W_3 = 0$, тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial W_2}{\partial x_3} = x_1^2 x_2 \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial x_3} = x_3 - x_1 x_2^2 \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial W_1}{\partial x_2} = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_2 = -x_1^2 x_2 x_3 + \varphi(x_1, x_2) \\ W_1 = \dfrac{1}{2} x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3 + \psi(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial W_1}{\partial x_2} = 2x_1 \end{cases}$$

Нехай $\psi(x_1, x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial W_1}{\partial x_2} = -2x_1 x_2 x_3 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 x_3 = 2x_1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2x_1 \Rightarrow \varphi = x_1^2 + C$, причому константу C можна вважати рівною нулю.

Таким чином, деякий векторний потенціал має вигляд

$$\overline{W_0} = \left(\frac{1}{2} x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - x_1^2 x_2 x_3\right)\bar{i}_2.$$

В загальному випадку

$$\overline{W} = \overline{W_0} + grad u,$$

де u – довільне диференційовне скалярне поле.

Основна терема векторного аналізу

Довільне неперервно-диференційовне векторне поле $\overline{A}(M)$, що задане у будь-якій точці M тривимірного простору R^3 і таке, що $\lim\limits_{|OM| \to \infty} \overline{A}(M) = \lim\limits_{|OM| \to \infty} rot\overline{A}(M) = \overline{0}$, $\lim\limits_{|OM| \to \infty} div\overline{A}(M) = 0$, може бути єдиним чином представлене у вигляді суми потенціального $\overline{A}_1$ й соленоїдального $\overline{A}_2$ векторних полів. Тобто $\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$, де $\mathrm{rot}\,\overline{A}_1 \equiv \overline{0}$ і $\mathrm{div}\,\overline{A}_2 \equiv 0$.

3.5 Диференціювання векторного поля за напрямом

Похідною векторного поля $\overline{A}$ в точці M за напрямом орту $\bar{l}$ називається вектор, що виражається границею

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\overline{A}(l + \Delta l) - \overline{A}(l)}{\Delta l} ,$$

де l – координата точки M на осі, що задається ортом $\bar{l}$, Δl – приріст координати l вздовж осі, що задається ортом $\bar{l}$.

Розглянемо диференціальну характеристику векторного поля, подібну до градієнта скалярного поля:

$$\nabla \overline{A} = \left(\nabla A_1, \nabla A_2, \nabla A_3\right).$$

Три вектори ∇A_i в прямокутній декартовій системі координат визначаються наступним чином

$$\nabla A_i = \bar{i}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \text{ (сума по } k \text{).}$$

Величини $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_k}$ утворюють тензор другого рангу – аналог градієнта для скалярного поля. За допомогою цього тензора похідну векторного поля в точці M за будь яким напрямом $\bar{l}$ можна виразити формулою

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial l} = \bar{l} \cdot \nabla \overline{A} = \left(\bar{l} \cdot \nabla\right)\overline{A} = l_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k},$$

тут точкою позначено скалярний добуток тензорів.

3.6 Поле тензора другого рангу

Розглянемо поле симетричного тензора другого рангу, який заданий у прямокутній декартовій системі координат $\left(x_1, x_2, x_3\right)$. В цій системі координат коваріантні, контраваріантні і мішані компоненти тензорів співпадають, тому в подальшому домовимось усі індекси в тензорних виразах писати внизу.

<u>Потік тензорного поля</u>

Потоком тензорного поля $T(\bar{r})$ через двосторонню поверхню S за напрямом нормалі $\bar{n}$ називається поверхневий інтеграл

$$\overline{W} = \iint_S \bar{n} \cdot T dS ,$$

або в координатах

$$W_i = \iint_S n_k T_{ki} dS \text{ (сума по } k \text{).} \tag{3.16}$$

Потік тензора другого рангу – вектор.

Приклад 3.7. Знайти потік одиничного тензора δ_{ik} через довільну замкнену поверхню S.

Розв'язання: За формулою (3.16) $W_i = \iint\limits_S n_k \delta_{ki} dS = \iint\limits_S n_i dS$, або $\overline{W} = \iint\limits_S \overline{n} dS$. Помножимо скалярно обидві частини останньої рівності на довільний сталий вектор $\overline{C}$. З використанням теореми Остроградського-Гауса, отримаємо $\overline{C} \cdot \overline{W} = \iint\limits_S \overline{n} \cdot \overline{C} dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{C} dV = 0$. Звідси, за умови довільності вектора $\overline{C}$, отримаємо $\overline{W} = \overline{0}$.

Дивергенція тензорного поля

Дивергенція поля тензора другого рангу є вектором і визначається границею

$$\operatorname{div} T = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S \overline{n} \cdot T dS,$$

де S – поверхня, що обмежує об'єм τ і стягується до точки M.

Компоненти вектора $\operatorname{div} T$ в декартових координатах можна обчислити за формулою

$$(\operatorname{div} T)_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k}.$$

Використовуючи оператор «набла», отримаємо $\operatorname{div} T = \nabla \cdot T$.

Диференціювання тензорного поля за напрямом

Похідна тензорного поля T в точці M за напрямом орта $\bar{l}$ визначається аналогічно до похідної векторного поля і є тензором другого рангу. Цей тензор можна знайти за формулою

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \left(\bar{l} \cdot \bar{i}_k\right) \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}.$$

3.7 Коваріантне диференціювання тензорів. Символи Крістоффеля

Розглянемо вектор $\overline{A}$ в системі координат $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ з основним базисом $\left(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\right)$ і взаємним – $\left(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\right)$. Ці базиси є локальними, тобто залежать від координат точки простору.

Знайдемо диференціал вектора $\overline{A}$ в основному і взаємному базисах

$$d\overline{A} = d\left(A^i \bar{e}_i\right) = \bar{e}_i dA^i + A^i d\bar{e}_i,$$
$$d\overline{A} = d\left(A_i \bar{e}^i\right) = \bar{e}^i dA_i + A_i d\bar{e}^i.$$

З іншого боку $d\overline{A} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial q^k} dq^k$. Звідси отримаємо формули для похідної $\frac{\partial \overline{A}}{\partial q^k}$ в основному і взаємному базисах

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial q^k} = \frac{\partial A^i}{\partial q^k}\overline{e}_i + A^i \frac{\partial \overline{e}_i}{\partial q^k} = \frac{\partial A_i}{\partial q^k}\overline{e}^i + A_i \frac{\partial \overline{e}^i}{\partial q^k}.$$

Компоненти трьох векторів $\frac{\partial \overline{A}}{\partial q^k}$ утворюють тензор другого рангу, який має назву *коваріантної похідної* вектора $\overline{A}$.

Позначимо коваріантні й контраваріантні компоненти цього тензора наступним чином:

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial q^k} \cdot \overline{e}_i \equiv A_{i;k}, \; \frac{\partial \overline{A}}{\partial q^k} \cdot \overline{e}^i \equiv A^i_{\cdot;k}, \tag{3.17}$$

назвемо їх, відповідно, коваріантною похідною коваріантного вектора і коваріантною похідною контраваріантного вектора.

<u>Символи Крістоффеля</u>

Розпишемо рівності (3.17)

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial q^k} + A_j \frac{\partial \overline{e}^j}{\partial q^k}\overline{e}_i, \qquad A^i_{\cdot;k} = \frac{\partial A^i}{\partial q^k} + A^j \frac{\partial \overline{e}_j}{\partial q^k}\overline{e}_i \tag{3.18}$$

враховуючи, що $\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\overline{e}_i \cdot \overline{e}^j\right) = 0$ отримаємо $\overline{e}^j \frac{\partial \overline{e}_i}{\partial q^k} + \overline{e}_i \frac{\partial \overline{e}^j}{\partial q^k} = 0 \Leftrightarrow$ $\overline{e}^j \frac{\partial \overline{e}_i}{\partial q^k} = -\overline{e}_i \frac{\partial \overline{e}^j}{\partial q^k}$.

Позначимо

$$\Gamma^i_{jk} \equiv \overline{e}^i \frac{\partial \overline{e}_j}{\partial q^k}; \tag{3.19}$$

ці 27 величин мають назву символів Крістоффеля другого роду.

Враховуючи введене позначення, коваріантна похідна отримає вигляд

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial q^k} + A_j \Gamma^j_{ik}, \quad A^i_{\cdot;k} = \frac{\partial A^i}{\partial q^k} + A^j \Gamma^i_{jk}. \tag{3.20}$$

Помножимо (3.19) на $\bar{e}_i$ й отримаємо $\bar{e}_i \cdot \Gamma^i_{jk} = \dfrac{\partial \bar{e}_j}{\partial q^k}$, звідси видно, що Γ^i_{jk} є коефіцієнтами розкладення вектора $\dfrac{\partial \bar{e}_j}{\partial q^k}$ за векторами основного базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Позначимо через $\Gamma_{i,jk}$ коефіцієнти розкладення вектора $\dfrac{\partial \bar{e}_j}{\partial q^k}$ за векторами взаємного базису, тобто

$$\bar{e}^i \cdot \Gamma_{i,jk} = \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial q^k}.$$

Коефіцієнти $\Gamma_{i,jk}$ називають символами Крістоффеля першого роду,

$$\Gamma_{i,jk} = \bar{e}_i \frac{\partial \bar{e}^j}{\partial q^k}. \tag{3.21}$$

Враховуючи, що $g_{il} = (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_l)$, отримаємо формули, що виражають зв'язок між символами Крістоффеля першого й другого роду

$$\Gamma_{i,jk} = g_{il}\Gamma^l_{jk},\ \Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk} \tag{3.22}$$

Символи Крістоффеля симетричні за індексами j і k, тобто

$$\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj},\ \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Символи Крістоффеля цілком визначаються метричним тензором, тобто геометрією простору:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\right);\ \Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk}. \tag{3.23}$$

Коваріантна похідна тензора

Узагальнимо означення коваріантної похідної вектора на випадок тензора другого рангу:

$$T_{ik;l}=\frac{\partial T_{ik}}{\partial q^l}-T_{mk}\Gamma^m_{il}-T_{im}\Gamma^m_{kl};$$

$$T^{ik}_{..;l}=\frac{\partial T^{ik}}{\partial q^l}+T^{mk}\Gamma^i_{ml}+T^{im}\Gamma^k_{ml}; \qquad (3.24)$$

$$T^i_{.k;l}=\frac{\partial T^i_{.k}}{\partial q^l}+T^m_{.k}\Gamma^i_{ml}-T^i_{.m}\Gamma^m_{kl}.$$

Для запису формул типу (3.20), (3.24) для тензорів більш високого рангу можна користатися наступним правилом. Перший доданок у кожній формулі – це частинна похідна обраної компоненти тензора. Інші доданки (їх кількість дорівнює рангу тензора) – це згортки символів Крістоффеля й компонент тензора по парі індексів, причому перед ними ставиться знак плюс, якщо підсумовування відбувається по нижньому індексу символа Крістоффеля, і знак мінус – якщо по верхньому.

Наприклад, для тензора третього рангу отримаємо вираз:

$$A^{..l}_{ik;m}=\frac{\partial A^{..l}_{ik}}{\partial q^m}-A^{..l}_{nk}\Gamma^n_{im}-A^{..l}_{in}\Gamma^n_{km}+A^{..n}_{ik}\Gamma^l_{nm}. \qquad (3.25)$$

Якщо позначити коваріантну похідну символом ∇_i, то легко переконатися, що ця операція має такі ж самі властивості по відношенню до операцій додавання й множення, як і звичайна похідна:

1. $\nabla_i(A+B)=\nabla_i A+\nabla_i B;$
2. $\nabla_i(A\cdot B)=\nabla_i A\cdot B+A\cdot\nabla_i B.$

В окремому випадку тензора нульового рангу – скаляра, його коваріантна похідна співпадає зі звичайною частинною похідною $u_{;i}=\frac{\partial u}{\partial q^i}$. Звідси можна зробити висновок, що компоненти градієнта є коваріантними, і тому коректніше було б називати градієнт ковектором.

Приклад 3.8. Знайти символи Крістоффеля для системи координат, яка зв'язана з декартовими координатами (x_1, x_2, x_3) співвідношеннями:
$x_1=q^1\sin q^2\cos q^3$, $x_2=q^1\sin q^2\sin q^3$, $x_3=q^1\cos q^2$ (сферичні координати).

Розв'язання: Знайдемо компоненти метричного тензора для сферичних координат за формулою $g_{ik}=\frac{\partial x^l}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial q^k}$:

$$g_{11}=\frac{\partial x^l}{\partial q^1}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial q^1}=\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^1}\right)^2+\left(\frac{\partial x^2}{\partial q^1}\right)^2+\left(\frac{\partial x^3}{\partial q^1}\right)^2=1;$$

$$g_{22}=\frac{\partial x^l}{\partial q^2}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial q^2}=\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x^2}{\partial q^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x^3}{\partial q^2}\right)^2=\left(q^1\right)^2;$$

$$g_{33}=\frac{\partial x^l}{\partial q^3}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial q^3}=\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^3}\right)^2+\left(\frac{\partial x^2}{\partial q^3}\right)^2+\left(\frac{\partial x^3}{\partial q^3}\right)^2=\left(q^1\right)^2\sin^2 q^2;$$

$g_{ik}=0$, якщо $i\neq k$.

За формулою (3.23) знайдемо символи Крістоффеля першого роду:

$$\Gamma_{1,11}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}=0;\ \Gamma_{1,12}=\Gamma_{1,21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1}\right)=0;$$

$$\Gamma_{1,22}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial q^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1}\right)=0;\ \Gamma_{2,11}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}\right)=0;$$

$$\Gamma_{2,12}=\Gamma_{2,21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial q^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial q^2}\right)=q^1;\ \Gamma_{2,22}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial q^2}=0;$$

$$\Gamma_{1,13}=\Gamma_{1,31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{13}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{31}}{\partial q^1}\right)=0;$$

$$\Gamma_{1,23}=\Gamma_{1,32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{13}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{32}}{\partial q^1}\right)=0;$$

$$\Gamma_{1,33}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{13}}{\partial q^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}\right)=-q^1\sin^2 q^2;$$

$$\Gamma_{2,13}=\Gamma_{2,31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{23}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{31}}{\partial q^2}\right)=0;$$

$$\Gamma_{2,23}=\Gamma_{2,32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{23}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial q^2}\right)=0;$$

$$\Gamma_{2,33}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{23}}{\partial q^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}\right)=-\left(q^1\right)^2\sin q^2\cos q^2;$$

$$\Gamma_{3,11}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{31}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}\right)=0,\ \Gamma_{3,12}=\Gamma_{3,21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial q^2}+\frac{\partial g_{32}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial q^3}\right)=0;$$

$$\Gamma_{3,22}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{32}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}\right)=0;$$

$$\Gamma_{3,23}=\Gamma_{3,32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{32}}{\partial q^3}\right)=\left(q^1\right)^2\sin q^2\cos q^2;$$

$$\Gamma_{3,13}=\Gamma_{3,31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial q^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}-\frac{\partial g_{31}}{\partial q^3}\right)=q^1\sin^2 q^2;\ \Gamma_{3,33}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^3}=0.$$

Випишемо ненульові значення:

$$\Gamma_{1,33}=-q^1\sin^2 q^2;\ \Gamma_{2,12}=\Gamma_{2,21}=q^1;\ \Gamma_{2,33}=-\left(q^1\right)^2\sin q^2\cos q^2;$$

$$\Gamma_{3,13}=\Gamma_{3,31}=q^1\sin^2 q^2;\ \Gamma_{3,23}=\Gamma_{3,32}=\left(q^1\right)^2\sin q^2\cos q^2.$$

Символи Крістоффеля другого роду знайдемо за формулою $\Gamma^i_{jk}=g^{il}\Gamma_{l,jk}$. Зауважимо, що у сферичній системі координат $g^{ii}=\dfrac{1}{g_{ii}}$, тому $g^{11}=1$, $g^{22}=\left(\dfrac{1}{q^1}\right)^2$, $g^{33}=\left(\dfrac{1}{q^1\sin q^2}\right)^2$.

Отримаємо,

$\Gamma^1_{11}=g^{11}\Gamma_{1,11}+g^{12}\Gamma_{2,11}+g^{13}\Gamma_{3,11}=0$, $\Gamma^2_{11}=\Gamma^3_{11}=0$, $\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{22}=\Gamma^3_{22}=0$,

$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=g^{11}\Gamma_{1,12}+g^{12}\Gamma_{2,12}+g^{13}\Gamma_{3,12}=0$,

$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=g^{11}\Gamma_{1,12}+g^{12}\Gamma_{2,12}+g^{13}\Gamma_{3,12}=0$,

$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=g^{21}\Gamma_{1,12}+g^{22}\Gamma_{2,12}+g^{23}\Gamma_{3,12}=g^{22}\Gamma_{2,12}=\dfrac{1}{q^1}$,

$\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=g^{31}\Gamma_{1,12}+g^{32}\Gamma_{2,12}+g^{33}\Gamma_{3,12}=0$,

$\Gamma^1_{23}=\Gamma^1_{32}=g^{11}\Gamma_{1,23}+g^{12}\Gamma_{2,23}+g^{13}\Gamma_{3,23}=0$, $\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=0$,

$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=g^{31}\Gamma_{1,23}+g^{32}\Gamma_{2,23}+g^{33}\Gamma_{3,23}=g^{33}\Gamma_{3,23}=\mathrm{ctg}\,q^2$,

$\Gamma^1_{33}=g^{11}\Gamma_{1,33}+g^{12}\Gamma_{2,33}+g^{13}\Gamma_{3,33}=g^{11}\Gamma_{1,33}=-q^1\sin^2 q^2$,

$\Gamma^2_{33}=g^{21}\Gamma_{1,33}+g^{22}\Gamma_{2,33}+g^{23}\Gamma_{3,33}=g^{22}\Gamma_{2,33}=-\mathrm{ctg}\,q^2$,

$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=g^{31}\Gamma_{1,13}+g^{32}\Gamma_{2,13}+g^{33}\Gamma_{3,13}=g^{33}\Gamma_{3,13}=\dfrac{1}{q^1}$, $\Gamma^1_{13}=\Gamma^1_{31}=0$,

$\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=0$, $\Gamma^3_{33}=0$.

Ненульові компоненти: $\Gamma^1_{33}=-q^1\sin^2 q^2$; $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\dfrac{1}{q^1}$; $\Gamma^2_{33}=-\mathrm{ctg}\,q^2$; $\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\dfrac{1}{q^1}$; $\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\mathrm{ctg}\,q^2$.

Приклад 3.9. Знайти коваріантну похідну тензора A, який у сферичній системі координат має компоненти $A^1_{.11} = q^1$, $A^1_{.12} = A^1_{.21} = q^2$, $A^1_{.22} = q^1 - q^2$, $A^2_{.11} = \left(q^2\right)^2$, $A^2_{.12} = A^2_{.21} = \left(q^1\right)^2$, $A^2_{.22} = \left(q^1\right)^2 - q^2$, $A^3_{.ik} = A^i_{.3k} = A^k_{.i3} = 0$.

Розв'язання: Користуючись результатом прикладу 3.8 и формулою (3.25), знайдемо

$$A^1_{.11;1} = \frac{\partial A^1_{.11}}{\partial q^1} = 1,$$

$$A^1_{.11;2} = \frac{\partial A^1_{.11}}{\partial q^2} - A^1_{.m1}\Gamma^m_{12} - A^1_{.1m}\Gamma^m_{12} + A^m_{.11}\Gamma^1_{m2} = -2A^1_{.m1}\Gamma^m_{12} = -2A^1_{.21}\Gamma^2_{12} = \frac{-2q^2}{q^1},$$

$$A^1_{.11;3} = 0, \quad A^1_{.12;1} = \frac{\partial A^1_{.12}}{\partial q^1} - A^1_{.m2}\Gamma^m_{11} - A^1_{.1m}\Gamma^m_{21} + A^m_{.12}\Gamma^1_{m1} = -A^1_{.12}\Gamma^2_{21} = -\frac{q^2}{q^1},$$

$$A^1_{.12;2} = \frac{\partial A^1_{.12}}{\partial q^2} - A^1_{.m2}\Gamma^m_{12} - A^1_{.1m}\Gamma^m_{22} + A^m_{.12}\Gamma^1_{m2} = 1 - A^1_{.22}\Gamma^2_{12} = 1 - \left(q^1 - q^2\right)\frac{1}{q^1} = \frac{q^2}{q^1},$$

$$A^1_{.22;1} = \frac{\partial A^1_{.22}}{\partial q^1} - A^1_{.m2}\Gamma^m_{21} - A^1_{.2m}\Gamma^m_{21} + A^m_{.22}\Gamma^1_{m1} = 1 - 2A^1_{.22}\Gamma^2_{21} = 1 - 2\left(q^1 - q^2\right)\frac{1}{q^1} = \frac{2q^2}{q^1} - 1,$$

$$A^1_{.22;2} = \frac{\partial A^1_{.22}}{\partial q^2} - A^1_{.m2}\Gamma^m_{22} - A^1_{.2m}\Gamma^m_{22} + A^m_{.22}\Gamma^1_{m2} = -1,$$

$$A^2_{.11;1} = \frac{\partial A^2_{.11}}{\partial q^1} - A^2_{.m1}\Gamma^m_{11} - A^2_{.1m}\Gamma^m_{11} + A^m_{.11}\Gamma^2_{m1} = A^2_{.11}\Gamma^2_{21} = \frac{\left(q^2\right)^2}{q^1},$$

$$A^2_{.11;2} = \frac{\partial A^2_{.11}}{\partial q^2} - A^2_{.m1}\Gamma^m_{12} - A^2_{.1m}\Gamma^m_{12} + A^m_{.11}\Gamma^2_{m2} = 2q^2 - 2A^2_{.21}\Gamma^2_{12} + A^1_{.11}\Gamma^2_{12} = 2q^2 - 2q^1 + 1,$$

$$A^2_{.12;1} = \frac{\partial A^2_{.12}}{\partial q^1} - A^2_{.m2}\Gamma^m_{11} - A^2_{.1m}\Gamma^m_{21} + A^m_{.12}\Gamma^2_{m1} = 2q^1,$$

$$A^2_{.12;2} = \frac{\partial A^2_{.12}}{\partial q^2} - A^2_{.m2}\Gamma^m_{12} - A^2_{.1m}\Gamma^m_{22} + A^m_{.12}\Gamma^2_{m2} = \frac{q^2}{q^1},$$

$$A^2_{.22;1} = \frac{\partial A^2_{.22}}{\partial q^1} - A^2_{.m2}\Gamma^m_{21} - A^2_{.2m}\Gamma^m_{21} + A^m_{.22}\Gamma^2_{m1} = q^1 + \frac{q^2}{q^1},$$

$$A^2_{.22;2} = \frac{\partial A^2_{.22}}{\partial q^2} - A^2_{.m2}\Gamma^m_{22} - A^2_{.2m}\Gamma^m_{22} + A^m_{.22}\Gamma^2_{m2} = -\frac{q^2}{q^1},$$

$$A^1_{.12;3} = 0, \quad A^1_{.22;3} = 0, \quad A^2_{.11;3} = \frac{\partial A^2_{.11}}{\partial q^3} - A^2_{.m1}\Gamma^m_{13} - A^2_{.1m}\Gamma^m_{13} + A^m_{.11}\Gamma^2_{m3} = 0, \quad A^2_{.12;3} = 0,$$

$$A^2_{.22;3} = 0, \quad A^i_{.3j;l} = A^i_{.j3;l} = 0,$$

$$A^3_{.ij;l} = \frac{\partial A^3_{.ij}}{\partial q^l} - A^3_{.mj}\Gamma^m_{il} - A^3_{.im}\Gamma^m_{jl} + A^m_{.ij}\Gamma^3_{ml} = \begin{cases} 0, l \neq 3 \\ A^m_{ij}\Gamma^3_{m3}, m = 1;2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$A^3_{.11;3} = A^1_{.11}\Gamma^3_{13} + A^2_{.11}\Gamma^3_{23} = 1 + \left(q^2\right)^2 \operatorname{ctg} q^2,$$

$$A^3_{.12;3} = A^1_{.12}\Gamma^3_{13} + A^2_{.12}\Gamma^3_{23} = \frac{q^2}{q^1} + \left(q^1\right)^2 \operatorname{ctg} q^2,$$

$$A^3_{.22;3} = A^1_{.22}\Gamma^3_{13} + A^2_{.22}\Gamma^3_{23} = \left(q^1 - q^2\right)\frac{1}{q^1} + \left(\left(q^1\right)^2 - q^2\right)\operatorname{ctg} q^2.$$

Тензор $A^i_{.jk;l}$ є симетричним по парі нижніх індексів j,k, це випливає із симетрії по цим індексам тензора $A^i_{.jk}$ й символів Крістоффеля Γ^i_{jk}, тому інші компоненти тензора знаходяться з міркувань симетрії. Остаточно маємо 20 ненульових компонент з 81.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте поняття скалярного поля. Перерахуйте основні види скалярних полів, наведіть фізичні приклади.

2. Що таке поверхні рівня, які характеристики скалярного поля вони визначають? Наведіть приклад скалярного поля, яке має поверхнями рівня концентричні сфери.

3. Що називають градієнтом скалярного поля? Як визначається градієнт в прямокутній декартовій системі координат? Які властивості має градієнт скалярного поля?

4. Запишіть формулу для градієнта скалярного поля в ортогональній криволінійній системі координат. Що таке оператор «набла»?

5. Сформулюйте поняття векторного поля. Перерахуйте основні види векторних полів, наведіть фізичні приклади.

6. Що називають векторною лінією векторного поля? Запищіть систему диференціальних рівнянь для визначення векторних ліній.

7. Сформулюйте поняття потоку векторного поля. В чому полягає фізичний зміст потоку?

8. Яку характеристику векторного поля називають дивергенцією? Запишіть формули для обчислення дивергенції в основних ортогональних системах координат.

9. Що таке циркуляція векторного поля? Визначте циркуляцію в прямокутній декартовій системі координат.

10. Сформулюйте поняття ротора векторного поля. Запишіть формулу для ротора в ортогональних координатах. Яким чином ротор пов'язаний з циркуляцією векторного поля?

11. Запишіть за допомогою оператора «набла» основні диференціальні операції першого і другого порядку.

12. Запишіть теореми Острогадського-Гаусса і Стокса у векторному вигляді. Сформулюйте умови цих теорем.

13. Яке векторне поле називають потенціальним? Що таке скалярний потенціал векторного поля і як він знаходиться? Як переконатися, що задане векторне поле є потенціальним? Доведіть рівність нулю циркуляції потенціального векторного поля за будь-яким замкненим контуром.

14. Яке векторне поле називають соленоїдальним? Що таке векторний потенціал векторного поля і як його знайти? Як переконатися, що задане векторне поле є соленоїдальним? Доведіть рівність нулю потоку соленоїдального векторного поля через будь-яку замкнену поверхню.

15. Які векторні поля називають гармонічними? Запишіть критерій гармонічності векторного поля. Наведіть приклад гармонічного поля.

16. Сформулюйте основну теорему векторного аналізу.

17. Як визначається коваріантна похідна вектора?

18. Запишіть формули для символів Крістоффеля другого і першого роду.

19. Запишіть означення потоку і дивергенції поля тензора другого рангу.

20. Скільки компонент має коваріантна похідна тензора четвертого рангу у тривимірному просторі?

Індивідуальне завдання №3

1. Задано скалярне поле $u(x_1, x_2, x_3)$ й точки M_0, M.
Знайти а) поверхні рівня, що проходять через точки M_0 і M;
б) похідну поля u в точці M_0 в напрямку вектора $\overline{M_0M}$;
в) напрямок і швидкість найшвидшого зростання поля u в точці M_0.

2. Знайти потік векторного поля $\overline{A}$ через поверхню S. Обчислення провести двома способами: безпосередньо і за теоремою Остроградського – Гауса.

3. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{A}$ уздовж контуру L. Обчислення провести двома способами: безпосередньо і за теоремою Стокса.

4. Переконатися, що векторне поле $\overline{A}$ є потенціальним і знайти його скалярний потенціал.

5. Переконатися, що векторне поле $\overline{A}$ є соленоїдальним і знайти його векторний потенціал.

6. Знайти потік тензорного поля $P_{ij}(M)$ через частину площини p, відсічену координатними площинами.

7. Знайти символи Крістоффеля для системи координат (q^1, q^2, q^3), що зв'язана з прямокутною декартовою системою координат (x_1, x_2, x_3) заданими співвідношеннями.

8. Знайти коваріантну похідну тензора A, що заданий у системі координат (q^1, q^2, q^3) з попередньої задачі.

Зауваження: У задачах 1 - 7 використовуються нижні індекси для позначення декартових координат, тому що в прямокутній декартовій системі координат взаємний базис збігається з основним, коваріантні компоненти вектора збігаються з контраваріантними компонентами.

Варіант 1

1. $u = \left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right)^5$, $M_0(1;1;1)$, $M(0;1;0)$.

2. $\overline{A} = x_1^2\bar{i}_1 + x_2^2\bar{i}_2 + x_3^2\bar{i}_3$, $S: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

3. $\overline{A} = \left(x_1^2 + x_3^2\right)\bar{i}_1 - 3x_1x_2\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

4. $\overline{A} = 2x_1x_2\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - 2x_2x_3\right)\bar{i}_2 - x_2^2\bar{i}_3$.

5. $\bar{A} = 3x_1x_2^2\bar{i}_1 - \left(x_2^3 + x_3^2x_2\right)\bar{i}_2 + \frac{1}{3}x_3^3\bar{i}_3$.

6. $\left\| P_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & -1 \\ -1 & 1 & x_3 \end{Vmatrix}$, $p: x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$.

7. $x_1 = q^1 \cos q^2$, $x_2 = q^1 \sin q^2$, $x_3 = 3q^3$.

8. $\left\| A^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} \cos\left(q^1 + q^2\right) & q^2 & 0 \\ -\left(q^2\right)^3 & \sin\left(q^1 - q^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Варіант 2

1. $u = \left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3\right)^3$, $M_0(1;1;1)$, $M(0;0;1)$.

2. $\bar{A} = \left(x_1^2 - x_2^2\right)\bar{i}_1 + 2x_1x_3\bar{i}_2 - x_2\bar{i}_3$, $S: x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1$,
$x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0$.

3. $\bar{A} = \left(x_1^2 + 2x_2x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_2^2 - x_1\right)\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 = 4$,
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

4. $\bar{A} = x_3x_2^2\bar{i}_1 + 2x_1x_2x_3\bar{i}_2 + x_1x_2^2\bar{i}_3$.

5. $\bar{A} = 2x_2x_3\bar{i}_1 + 32\left(x_2 + x_3^2x_1\right)\bar{i}_2 + x_1^3\bar{i}_3$.

6. $\left\| P_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & x_1^2 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{Vmatrix}$, $p: x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$.

7. $x_1 = q^1 \cos q^2 \sin q^3$, $x_2 = q^1 \sin q^2 \sin q^3$, $x_3 = q^1 \cos q^3$.

8. $\left\| A_i^{\cdot j} \right\| = \begin{Vmatrix} \left(q^1 + q^2\right)^2 & q^3 & 0 \\ -q^3 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Варіант 3

1. $u = \left(x_1^2 + 3x_2 - x_3^2\right)^4$, $M_0(1;0;2)$, $M(2;-1;0)$.

2. $\bar{A}=(x_1+3x_2x_3)\bar{i}_1+(3x_1-x_3)\bar{i}_2+(x_1+x_2)\bar{i}_3$,
$S: x_1-\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_3=1,\ x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$.

3. $\bar{A}=x_1x_2\bar{i}_1-x_1^2\bar{i}_2+x_2\bar{i}_3,\ L: x_1^2+x_3^2=16,\ x_1+x_2=1$.

4. $\bar{A}=2x_1x_2\bar{i}_1+\left(x_1^2-2x_2x_3\right)\bar{i}_2-x_2^2\bar{i}_3$.

5. $\bar{A}=\left(x_1^2+x_2^2-x_3\right)\bar{i}_1+(x_2x_3-2x_2x_1)\bar{i}_2+\frac{1}{2}\left(x_1^2-x_3^2\right)\bar{i}_3$.

6. $\|P_{ij}\|=\begin{Vmatrix}0 & x_1 & 0\\ -x_1 & 3x_2 & 1\\ 0 & -1 & x_3^2\end{Vmatrix},\quad p: x_1+4x_2+2x_3=1$.

7. $x_1=2q^1q^3\sin q^2,\ x_2=2q^1q^3\cos q^2,\ x_3=\left(q^1\right)^2-\left(q^3\right)^2$.

8. $\|A_{ij}\|=\begin{Vmatrix}q^1+3q^2 & 0 & 0\\ 0 & \left(q^2\right)^3 & 1\\ 0 & -1 & q^3\end{Vmatrix}$.

Варіант 4

1. $u=\left(x_1+x_2^2-2x_3^2\right)^7,\ M_0(1;0;1),\ M(0;-1;1)$.

2. $\bar{A}=4x_1^2\bar{i}_1-x_2x_3\bar{i}_2+x_1\bar{i}_3,\ S: x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{6}x_3=1,\ x_1=0,\ x_2=0$,
$x_3=0$.

3. $\bar{A}=x_2\bar{i}_1+4x_1x_3\bar{i}_3,\ L: x_1^2+x_3^2=16,\ x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{4}x_3=1$.

4. $\bar{A}=\left(3x_2x_1^2-x_2^3\right)\bar{i}_1+\left(x_1^3-3x_1x_2^2\right)\bar{i}_2$.

5. $\bar{A}=\left(x_2^3+x_3\right)\bar{i}_1+(3x_1x_3-x_2)\bar{i}_2+\left(x_2^3+x_3\right)\bar{i}_3$.

6. $\|P_{ij}\|=\begin{Vmatrix}x_1 & 2 & 1\\ 2 & x_3 & 0\\ 1 & 0 & x_2\end{Vmatrix},\ p: 2x_1-3x_2+x_3=-1$.

7. $x_1=q^3\sin q^2\cos q^1,\ x_2=q^3\sin q^2\sin q^1,\ x_3=q^3\cos q^2$.

8. $\|A^i_{.j}\|=\begin{Vmatrix}\left(q^3+q^2\right)^3 & q^1 & 0\\ q^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$.

Варіант 5

1. $u=\left(x_1^2+x_2^2+5x_3^2\right)^4,\ M_0(1;0;0),\ M(0;1;0).$
2. $\overline{A}=(2x_1-3x_2)\bar{i}_1+(7x_1-x_3)\bar{i}_2,\ S:\dfrac{1}{4}x_1+x_2+2x_3=1,\ x_1=0,$ $x_2=0,\ x_3=0$
3. $\overline{A}=(6x_2-x_3)\bar{i}_1+(5x_1+x_3)\bar{i}_2+(x_1-x_2)\bar{i}_3,\ L:x_1^2+\dfrac{1}{4}x_2^2=1,$ $x_2+2x_3=1.$
4. $\overline{A}=\left(3x_2x_1^2x_3\right)\bar{i}_1+\left(x_1^3x_3\right)\bar{i}_2+\left(x_2x_1^3\right)\bar{i}_3.$
5. $\overline{A}=\left(7x_2-x_1^2x_3\right)\bar{i}_1+\left(2x_1x_2x_3-x_2^3\right)\bar{i}_2+3x_2^3x_3\bar{i}_3.$
6. $\left\|P_{ij}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & x_3+x_1 & 0\\ x_1-x_2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & x_2\end{matrix}\right\|,\quad p:x_1-2x_2-3x_3=-1.$
7. $x_1=q^1\sin q^2\cos q^3,\ x_2=q^1\sin q^2\sin q^3,\ x_3=q^1\cos q^2.$
8. $\left\|A^{ij}\right\|=\left\|\begin{matrix}\sin q^1 & \cos q^2 & 0\\ \cos q^2 & q^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$

Варіант 6

1. $u=\left(x_1^2-x_2^2-2x_3\right)^3,\ M_0(0;-1;0),\ M(2;1;1).$
2. $\overline{A}=(3x_1+x_2)\bar{i}_1-2x_3x_1\bar{i}_2+(6x_1-x_2)\bar{i}_3,\ S:x_1-x_2-5x_3=1,$ $x_1=0, x_2=0,\ x_3=0$
3. $\overline{A}=(2x_3-x_1)\bar{i}_1+(7x_2+x_1)\bar{i}_2-3x_3\bar{i}_3,\ L:x_1^2+9x_2^2=1,$ $x_1+x_3=2.$
4. $\overline{A}=2x_1(x_2+x_3)\bar{i}_1+\left(x_1^2+x_2^2\right)\bar{i}_2+\left(x_1^2+x_3^2\right)\bar{i}_3.$
5. $\overline{A}=\left(x_1^4+x_2^4\right)\bar{i}_1+\left(x_2x_3+x_3^2\right)\bar{i}_2-\left(4x_1^3x_3+\dfrac{x_3^2}{2}\right)\bar{i}_3.$
6. $\left\|P_{ij}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & 2 & x_3\\ -2 & x_1 & 0\\ -x_3 & 0 & x_2\end{matrix}\right\|,\quad p:x_1+x_2-x_3=1.$
7. $x_1=\dfrac{\operatorname{sh}q^1\cos q^2}{\operatorname{ch}q^1-\cos q^3},\ x_2=\dfrac{\operatorname{sh}q^1\sin q^2}{\operatorname{ch}q^1-\cos q^3},\ x_3=\dfrac{\sin q^3}{\operatorname{ch}q^1-\cos q^3}.$

8. $\left\| A_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & q^3 \\ 0 & -q^3 & \left(q^2\right)^4 \end{Vmatrix}.$

Варіант 7

1. $u = \left(2x_1^2 + x_2^2 - x_3\right)^6,\ M_0(1;1;2),\ M(0;2;3).$

2. $\bar{A} = (4x_1 + x_3)\bar{i}_1 - (3x_2 + x_1)\bar{i}_2 + (x_2 + 3x_3)\bar{i}_3,$
$S: x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2,\ x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

3. $\bar{A} = x_2^2\bar{i}_1 + (x_1 - x_3)\bar{i}_2 + x_1^2\bar{i}_3,\ L: x_1^2 + x_2^2 = 4,\ x_1 + 3x_3 = -1.$

4. $\bar{A} = \left(x_1^3 - 8\right)\bar{i}_1 + 2x_2x_3\bar{i}_2 + x_2^2\bar{i}_3.$

5. $\bar{A} = x_2^2x_3^3\bar{i}_1 + \left(x_1^2x_2 - x_2^2x_3\right)\bar{i}_2 + \left(x_3^2x_2 - x_1^2x_3\right)\bar{i}_3.$

6. $\left\| P_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} x_3 & -x_1 & 0 \\ -x_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{Vmatrix},\quad p: x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1.$

7. $x_1 = \dfrac{\sin q^1 \cos q^2}{\operatorname{ch} q^3 - \cos q^1},\ x_2 = \dfrac{\sin q^1 \sin q^2}{\operatorname{ch} q^3 - \cos q^1},\ x_3 = \dfrac{\operatorname{sh} q^3}{\operatorname{ch} q^3 - \cos q^1}.$

8. $\left\| A_i^{\cdot j} \right\| = \begin{Vmatrix} q^1 + q^2 & -q^3 & 0 \\ q^3 & \operatorname{tg} q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

Варіант 8

1. $u = \left(x_1 + x_2^2 + 2x_3^2\right)^2,\ M_0(1;1;0),\ M(-2;1;1).$

2. $\bar{A} = (3x_2 - x_1)\bar{i}_1 + (x_2 - x_3)\bar{i}_2 + x_2^2\bar{i}_3,\ S: 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

3. $\bar{A} = (2x_1 + x_2)\bar{i}_1 + x_3\bar{i}_2 + (x_1 - x_2)\bar{i}_3,\ L: x_3^2 + x_2^2 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

4. $\bar{A} = x_1^4\bar{i}_1 + \dfrac{x_3^2}{2}\bar{i}_2 + x_3x_2\bar{i}_3.$

5. $\bar{A} = \left(3x_1^2x_2 + x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\bar{i}_2 - 6x_1x_2x_3\bar{i}_3.$

6. $\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & -x_2 \\ -x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_3 \end{matrix} \right\|$, $p: 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1$.

7. $x_1 = \dfrac{\operatorname{sh} q^3 \cos q^1}{\operatorname{ch} q^3 - \cos q^2}$, $x_2 = \dfrac{\operatorname{sh} q^3 \sin q^1}{\operatorname{ch} q^3 - \cos q^2}$, $x_3 = \dfrac{\sin q^2}{\operatorname{ch} q^3 - \cos q^2}$.

8. $\left\| A_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3q^1 & 2q^2 & 0 \\ -2q^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$.

Варіант 9

1. $u = \left(3x_1 + x_2^2 + x_3^2\right)^3$, $M_0(0;1;0)$, $M(-2;-2;1)$.
2. $\bar{A} = (6x_2x_1)\bar{i}_1 + (3x_1 - 7x_2)\bar{i}_2 + \bar{i}_3$, $S: x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1$,

$x_1 = 0, x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
3. $\bar{A} = (x_1 - 3x_3)\bar{i}_1 + (2x_2 + x_1)\bar{i}_2 + 6x_1\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $x_3 = 2$.
4. $\bar{A} = \dfrac{1}{3} x_1 x_2^3 \bar{i}_1 + \dfrac{x_1^2 x_2^2}{2} \bar{i}_2 + x_3^4 \bar{i}_3$.
5. $\bar{A} = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\bar{i}_1 + \left(x_3^2 + x_1^2\right)\bar{i}_2 - 2x_1x_3\bar{i}_3$.
6. $\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & x_3 \\ -2 & -x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & 4x_1 \end{matrix} \right\|$, $p: x_1 + x_2 - 6x_3 = 1$.
7. $x_1 = \dfrac{\operatorname{sh} q^1 \cos q^2}{\operatorname{ch} q^1 - \cos q^3}$, $x_2 = \dfrac{\operatorname{sh} q^1 \sin q^2}{\operatorname{ch} q^1 - \cos q^3}$, $x_3 = \dfrac{\sin q^3}{\operatorname{ch} q^1 - \cos q^3}$
8. $\left\| A_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} \operatorname{ch} q^1 & \cos q^2 & 0 \\ -\sin q^2 & 4q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$.

Варіант 10

1. $u = \left(4x_1 - x_2^2 - x_3^2\right)^4$, $M_0(1;-2;0)$, $M(2;0;3)$.
2. $\bar{A} = (2x_1 + 3x_3)\bar{i}_1 + (x_1 - x_2)\bar{i}_2 + (x_3 - 3x_2)\bar{i}_3$, $S: x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$,

$x_1 = 0, x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
3. $\bar{A} = (x_1 + x_3)\bar{i}_1 - 3x_1\bar{i}_2 - 2x_3\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$, $x_2 = 2$.

4. $\overline{A} = \left(x_1^2 + x_2\right)\bar{i}_1 + \left(x_1 - 1\right)\bar{i}_2 + \left(x_3^3 - 1\right)\bar{i}_3.$

5. $\overline{A} = x_1^2 x_2 x_3 \bar{i}_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\bar{i}_2 + \left(x_2^2 - x_1 x_2 x_3^2\right)\bar{i}_3.$

6. $\left\|P_{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} x_3 & -x_1 & 0 \\ -x_1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & x_2 \end{Vmatrix}, \quad p: 4x_1 + x_2 - x_3 = 1.$

7. $x_1 = 3q^1 \sin q^3 \cos q^2,\ x_2 = 7q^1 \sin q^2 \sin q^3,\ x_3 = 2q^1 \cos q^3.$

8. $\left\|A_{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} -2q^1 q^3 & 0 & q^3 \\ 0 & 0 & q^1 \\ -q^3 & q^1 & 0 \end{Vmatrix}.$

Предметний покажчик

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и основы тензорного исчисления. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 216 с.
2. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т . Современная геометрия. – М.: Наука. Глав. ред. физ-мат. лит., 1979. – 760 с.
4. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Высш шк., 1973. – 192 с.
5. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – М.: Изд-во гос.ун., 1974. – 206 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. – М.: Гостехиздат, 1951. – 628 с.
7. Сокольников И.С. Тензорный анализ. – М.: Наука, 1971. – 376 с.

Додаткова:

8. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьк. гос.ун., 1964. – 483 с.
9. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
10. Кеплер Х., Киричевский В.В., Ковнеристов Г.Б. Основы тензорного исчисления и его применение в механике твердого тела. – К.: КИСИ, 1992. – 183 с.
11. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с применением в механике. – К.: Наук. думка, 1972. – 148 с.
12. Киричевский В.В., Копылова Н.А. Курс высшей математики. – К.: Наук. думка, 1998. – 572 с.
13. Киричевский В.В. Основы тензорного исчисления и его приложения к задачам механики / Методические указания. – Ворошиловград, 1989. – 94 с.
14. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
15. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Лекции по теории упругости. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 208 с.
16. Стреляєв Ю.М, Клименко М.І. Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Фізика». – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – 69 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович
Стреляєв Юрій Михайлович
Клименко Михайло Іванович

ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для студентів освітнього ступеня «бакалавр»
напряму підготовки «Математика»

Рецензент *С.А. Левчук*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Ю.М. Стреляєв*