1. Векторний базис

Система будь-яких трьох лінійно незалежних упорядкованих векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, називається *базисом* тривимірного простору. Отже, для перевірки того, що система утворює базис достатньо показати, що система

$$\alpha\overline{e_1} + \beta\,\overline{e_2} + \gamma\overline{e_3} = \overline{0}$$

має лише нульовий розв'язок $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Якщо мішаний добуток $\overline{e_1}(\,\overline{e_2} \times \overline{e_3})$ – додатне число, базис утворює *праву* систему координат, якщо від'ємне, то *ліву* систему координат. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах базису, дорівнює

$$V = |\overline{e_1}(\,\overline{e_2} \times \overline{e_3})\,|$$

2. Взаємний базис

Вектори базисі, взаємного до $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, знаходяться за формулами:

$$\overline{e^1} = \frac{\overline{e_2} \times \overline{e_3}}{\overline{e_1}(\,\overline{e_2} \times \overline{e_3})}, \overline{e^2} = \frac{\overline{e_3} \times \overline{e_1}}{\overline{e_1}(\,\overline{e_2} \times \overline{e_3})}, \overline{e^3} = \frac{\overline{e_1} \times \overline{e_2}}{\overline{e_1}(\,\overline{e_2} \times \overline{e_3})}$$

3. Коваріантні та контраваріантні компоненти вектора

Контраваріантні компоненти вектора – це його координати при розвиненні за основним базисом, а *коваріантні* – за взаємним:

$$\bar{A} = A^i\overline{e_\iota} = A_i\overline{e^\iota},$$

A^i – контраваріантні компоненти, A_i – коваріантні компоненти.

$$A^i = \overline{A}\,\overline{e_\iota}.$$

Зв'язок між коваріантними та контраваріантними компонентами вектора:

$$A_i = g_{ik}A^k, A^i = g^{ik}A_i.$$

Тут $g_{ik} = \overline{e_\iota}\,\overline{e_k}$, $g^{ik} = \overline{e^\iota}\,\overline{e^k}$ компоненти метричного тензора (коваріантні та контраваріантні).

4. Закон перетворення компонент вектора при переході від одного базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ до іншого $\overline{e_{1'}}, \overline{e_{2'}}, \overline{e_{3'}}$

$$A_{i'} = A_k\alpha_{i'}^k, \text{ де } \alpha_{i'}^k = \overline{e^k}\,\overline{e_{\iota'}}, A^{i'} = A^k\alpha_k^{i'}, \text{ де } \alpha_k^{i'} = \overline{e^{\iota'}}\,\overline{e_k}.$$

5. Тензор

Тензором називається лінійний бакатокомпонентний алгебраїчний об'єкт, заданий у векторному просторі. Тензори дозволяють спрощувати запис фізичних законів та рівнянь. Тензори розрізняються за типами, які визначаються двома натуральними числами: $T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{k_1 k_2 \dots k_s}$ – це тензор *рангу* $s + r$, s-разів коваріантний та r-разів контраваріантний.

В тривимірному просторі: тензор нульового рангу – скаляр, тензор першого рангу – вектор, тензор другого рангу – матриця.

Для тензора другого рангу можуть бути компоненти $A^{ik}, A_{ik}, A_{i}^{\cdot k}, A^{i}_{\cdot k}$. Крапка показує порядок проходження індексів, тобто у $A_{i}^{\cdot k}$ перший індекс нижній, другий – верхній.

6. Закон перетворення компонент тензора другого рангу при переході від одного базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ до іншого $\overline{e_{1'}}, \overline{e_{2'}}, \overline{e_{3'}}$

$$A^{i'k'} = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} A^{lm},$$

$$A_{i'k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m} A_{lm}.$$

$$A_{i'}^{\cdot k} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_m^{k'} A_l^{\cdot m},$$

$$A^{i}_{\cdot k} = \alpha_l^{i'} \alpha_{k'}^{m} A^{l}_{\cdot m},$$

$$\text{де } \alpha_k^{i'} = \overline{e^{i'}}\, \overline{e_k}.$$

7. Згортання тензора

Згортанням називається підсумовування компонент тензора по двох різнойменних (верхній, нижній) індексах. Згортання можно проводити для тензорів рангу не менше другого.

Наприклад, якщо множиться тензор другого рангу з компонентами T^{ij} на тензор першого рангу з компонентами A_k, то ми отримаємо тензор третього рангу з компонентами $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = T^{ij} A_k$ (27 чисел). Тому й проводять згортку по першому (або другому) верхньому індексу та нижньому індексу:

$$B^j = C^{lj}_{\cdot\cdot l} = T^{lj} A_l = T^{1j} A_1 + T^{2j} A_2 + T^{3j} A_3.$$