2. Криволінійні координати. Поняття тензора. Операції над тензорами.

2.1 Ортогональні базиси

Векторний базис називають *ортогональним*, якщо його вектори взаємно перпендикулярні.

Для ортогонального базису основний базис співпадає за напрямами з взаємним, звідки випливає, що матриця метричного тензора g_{ik} має діагональний вигляд, тобто відмінні від нуля тільки g_{11}, g_{22}, g_{33}. З формул (1.13), що зв'язують коваріантні й контраваріантні компоненти вектора, маємо

$$A_1 = g_{11}A^1, A_2 = g_{22}A^2, A_3 = g_{33}A^3 \text{ і } A^1 = g^{11}A_1, A^2 = g^{22}A_2, A^3 = g^{33}A_3$$

звідки отримаємо $g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}}; g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}}; g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}}$.

Враховуючи (1.14), для квадрата елементарної дуги отримаємо

$$\Delta s^2 = g_{11}\left(\Delta x^1\right)^2 + g_{22}\left(\Delta x^2\right)^2 + g_{33}\left(\Delta x^3\right)^2 = g_{ii}\left(\Delta x^i\right)^2 \tag{2.1}$$

або
$$\Delta s^2 = \left(H_1\Delta x^1\right)^2 + \left(H_2\Delta x^2\right)^2 + \left(H_3\Delta x^3\right)^2 = \left(H_i\Delta x^i\right)^2 \tag{2.2}$$

Величини $H_1 = \sqrt{g_{11}}$, $H_2 = \sqrt{g_{22}}$, $H_3 = \sqrt{g_{33}}$ називаються *коефіцієнтами Ламе*.

У прямокутній декартовій системі координат $H_i = 1$, коваріантні й контраваріантні компоненти вектора співпадають.

2.2 Криволінійні координати

Положення точки M у просторі однозначно визначається її радіус-вектором $\bar{r}$ відносно деякої точки O. Цей вектор не залежить від вибраної системи координат, і визначається в будь-якій системі координат трьома числами q^1, q^2, q^3, які вже залежать від прийнятої системи координат (способи їх визначення).

Наприклад, якщо числа q^1, q^2, q^3 означають взяті з певним знаком відстані до трьох взаємно перпендикулярних площин, що проходять через точку O, то матимемо прямокутну декартову систему координат (ПДСК).

Нехай тепер q^1, q^2, q^3 – «довільні», зафіксуємо $q^1 = const$ і будемо неперервним чином змінювати числа q^2, q^3, отримаємо поверхню у просторі, надаючи константі q^1 різні значення, матимемо сімейство поверхонь, аналогічно фіксуючи q^2 і q^3, отримаємо ще два сімейства. Припустимо тепер, що ці поверхні такі, що через кожну точку M простору проходить одна і лише одна поверхня кожного сімейства. Тоді положення точки M однозначно визначається перетином цих поверхонь, які називаються *координатними поверхнями*, а величини констант q^1, q^2, q^3 – криволінійними координатами точки M.

Лінія перетину пари координатних поверхонь $q^i = const$, $q^j = const$ називається *координатною лінією* $\left(q^k\right)$. Вздовж цієї лінії змінюється тільки координата q^k, зростання координати q^k визначає додатний напрям на координатній лінії.

Вид координатних поверхонь і ліній залежить від способу визначення q^1, q^2, q^3.

У криволінійній системі координат уводять *локальний базис* $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, вектори якого дотичні до відповідних координатних ліній і направлені у бік зростання координат. Базисні вектори довільної системи координат є локальними, тобто залежать від положення точки M простору (вектори локального базису – різні для різних точок простору) (рисунок 5).

Якщо вектори базису взаємно перпендикулярні, то система координат називається *ортогональною*.

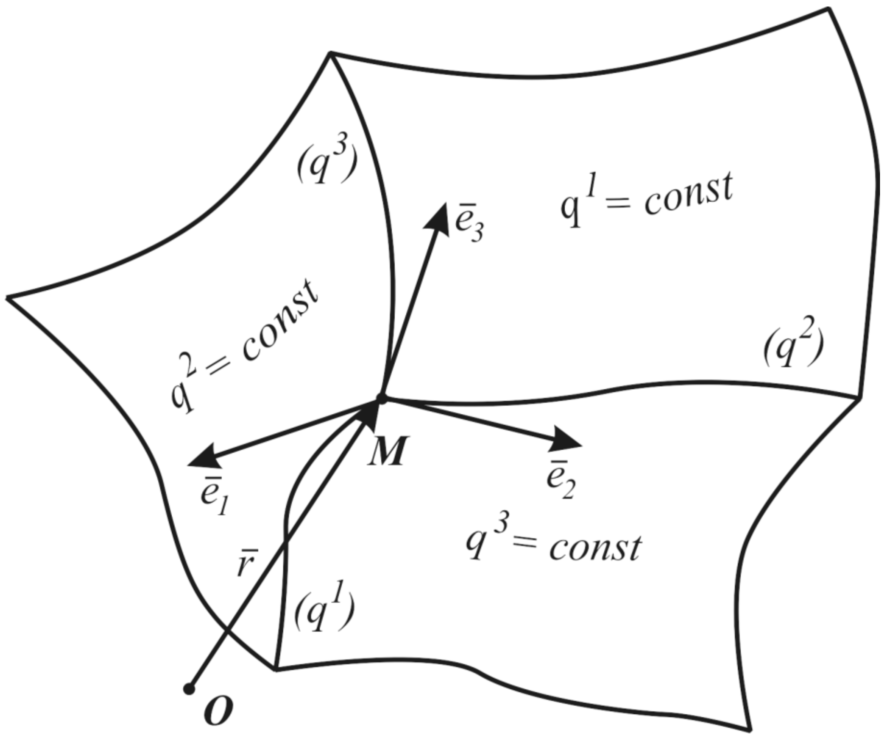

Рисунок 5.

Основною характеристикою будь-якої системи координат є *метрика*, тобто співвідношення, що визначає квадрат елементарної дуги

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k \tag{2.3}$$

Основні елементи простору із системою координат q^1, q^2, q^3.

1) Елемент дуги уздовж координатної лінії q^i

$$ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \text{ (немає суми по i)} \tag{2.4}$$

2) Елемент площі в координатній поверхні $q^i = const$

$$d\sigma_i = \sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}{}^2} dq^j dq^k \tag{2.5}$$

де i, j, k - складають парну перестановку чисел 1,2,3.

3) Елемент об'єму

$$dV = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3 \tag{2.6}$$

де $G = \det \| g_{ik} \|$.

Ортогональні координати. Коефіцієнти Ламе.

$$ds^2 = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2 \tag{2.7}$$

де $H_1 = \sqrt{g_{11}}, H_2 = \sqrt{g_{22}}, H_3 = \sqrt{g_{33}}$ - коефіцієнти Ламе, які можна визначити як границю: $H_i = \lim\limits_{\Delta q_i \to 0} \dfrac{\Delta s_i}{\Delta q_i}$, де Δs_i – приріст довжини дуги i-ої координатної лінії, що відповідає приросту координати Δq^i

Елементи простору в ортогональній системі координат.

1) $ds_i = H_i dq^i$ (немає суми по i)

2) $d\sigma_i = H_j H_k dq_j dq_k$ (немає суми по j, k)

3) $dV = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3$

Приведемо дві, найбільш поширені у фізичних застосуваннях, ортогональні системи криволінійних координат.

Циліндрична система координат (ЦСК).

Визначимо у просторі початок відліку – точку O, проведемо через цю точку пряму з визначеним додатним напрямом – вісь відліку Oz, деяку площину, що проходить через вісь Oz, будемо вважати площиною відліку кута. Положення будь якої точки M визначається трьома величинами: r – відстань від точки M до осі Oz, φ – кут між площиною відліку і площиною, що проходить через точку M та вісь Oz, z – проекція радіус-вектора точки M на вісь Oz.

Сферична система координат (ССК).

Визначимо у просторі початок відліку – точку O, проведемо через цю точку вісь відліку першого кута Oz, площину, що проходить через вісь Oz, будемо вважати площиною відліку другого кута. Положення будь якої точки M визначається трьома величинами: ρ – відстань від точки M до точки O (довжина радіус-вектора точки M), θ – кут між радіус-вектором точки M і віссю Oz, φ – кут між площиною відліку і площиною, що проходить через точку M та вісь Oz.

Метрика в ортогональних координатах.

Виразимо квадрат елементарної дуги в прямокутній декартовій, циліндричній і сферичній системах координат.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Коефіцієнти Ламе у прямокутній декартовій системі координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, у циліндричній – $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\varphi = r$, $H_3 = H_z = 1$, у сферичній – $H_1 = H_\rho = 1$, $H_2 = H_\theta = \rho$, $H_3 = H_\varphi = \rho\sin\theta$.

Зв'язок криволінійних координат з прямокутними декартовими координатами.

Нехай у просторі крім системи координат q^1, q^2, q^3 задано прямокутну декартову систему координат x_1, x_2, x_3, тоді можна отримати співвідношення які виражають пряму та зворотну залежність одних координат від інших.

$$x_1 = x_1(q^1, q^2, q^3),\ \ x_2 = x_2(q^1, q^2, q^3),\ \ x_3 = x_3(q^1, q^2, q^3)$$

$$q^1 = q^1(x_1, x_2, x_3),\ \ q^2 = q^2(x_1, x_2, x_3),\ \ q^3 = q^3(x_1, x_2, x_3)$$

Передбачається, що якобіан $I = \det\left\| \dfrac{\partial x_i}{\partial q^j} \right\| \neq 0$.

Запишемо співвідношення прямої та зворотної залежності у явному вигляді для циліндричних і сферичних координат.

Циліндричні координати.

$$x_1 = r\cos\varphi,\ \ x_2 = r\sin\varphi,\ \ x_3 = z$$

$$q^1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,\ \ q^2 = \varphi = arctg\,\frac{x_2}{x_1}\,,\ \ q^3 = z = x_3,\ \text{де}\ x_1 > 0\,.$$

Сферичні координати.

$$x_1 = \rho\sin\theta\cos\varphi\,,\ \ x_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi\,,\ \ x_3 = \rho\cos\theta$$

$$q^1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,,\ \ q^2 = \theta = arctg\,\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\,,\ \ q^3 = \varphi = arctg\,\frac{x_2}{x_1}\,,$$

де $x_1 > 0$, $x_3 > 0$.

Вектори локального базису.

Обчислимо повний диференціал радіус-вектора в системі координат q^1, q^2, q^3

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^3}dq^3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}dq^i\,.$$

Звідси знайдемо вираз для метрики

$$ds^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}dq^i\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k}dq^k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k}dq^i dq^k \tag{2.8}$$

Для векторів локального базису отримаємо вираз

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} \tag{2.9}$$

і для метричного тензора

$$g_{ik} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial x_p}{\partial q^i}\frac{\partial x_p}{\partial q^k}\ \text{(сума по } p\text{)} \tag{2.10}$$

де $\bar{r} = x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$, $x_p = x_p(q^1, q^2, q^3)$.

У разі ортогональних координат маємо формулу для коефіцієнтів Ламе

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2} \tag{2.11}$$

2.3 Поняття тензора

Визначимо окремі випадки тензорів у тривимірному просторі.

Тензор нульового рангу (скаляр) – це об'єкт, який повністю визначається в деякій системі координат одним числом (або функцією), яке не міняється при зміні системи координат, $u = u'$.

Тензор першого рангу (вектор) – це об'єкт, який у деякій системі координат визначається трьома числами A^i, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$A^{i'} = \alpha^{i'}_k A^k \tag{2.12}$$

Приклад 2.1 Нехай задано два лінійно незалежних вектори у системі координат із базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. З компонент цих векторів a^i і b^i складемо всілякі добутки, позначимо їх $A^{ik} = a^i b^k$, всього отримаємо 9 чисел. Знайти закон перетворення цих чисел при переході до іншої системи координат із базисом $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$.

<u>Розв’язання</u>: Використовуючи закон перетворення компонент вектора (2.12), отримаємо:

$$a^{i'} = \alpha^{i'}_l a^l, \; b^{k'} = \alpha^{k'}_m b^m$$

$$A^{i'k'} = a^{i'} b^{k'} = \alpha^{i'}_l a^l \alpha^{k'}_m b^m = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m a^l b^m = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm}.$$

Величини A^{ik} представляють приклад якісно нового, в порівнянні з вектором і скаляром, об'єкта, що має називається тензором другого рангу.

Тензор другого рангу – це об'єкт, який визначається в деякій системі координат 9 числами, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$A^{i'k'} = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm} \tag{2.13}$$

Прикладами тензорів другого рангу можуть служити тензор напружень σ^{ij}, тензор деформацій ε^{ij}, тензор моментів інерції I^{ij}, метричний тензор g^{ij}.

Відзначимо, що вектор (тензор першого рангу) ми визначили трьома його контраваріантними компонентами, але він також однозначно визначається і за допомогою трьох його коваріантних компонент A_i, які перетворюються згідно із законом $A_{i'} = \alpha^k_{i'} A_k$.

Аналогічно, для тензорів другого рангу і вище можна розглядати компоненти різного роду A^{ik} - контраваріантні, A_{ik} - коваріантні, $A_i^{\cdot k}$, $A^i_{\cdot k}$ – змішані, закони перетворення для них виглядатимуть таким чином

$$A_{i'k'} = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} A_{lm} \qquad A^{i'k'} = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm}$$

$$A_{i'}^{\cdot k'} = \alpha_{i'}^{l}\alpha_{m}^{k'}A_{l}^{\cdot m} \quad A_{\cdot k'}^{i'} = \alpha_{l}^{i'}\alpha_{k'}^{m}A_{\cdot m}^{l}$$

Нагадаємо, що $\alpha_{i'}^{k}, \alpha_{i}^{k'}$ – коефіцієнти прямого й зворотного перетворення векторів базисів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$, тобто $e_{i'} = \alpha_{i'}^{k}e_k$, $e_i = \alpha_{i}^{k'}e_{k'}$.

Тензором n-го рангу r-разів контраваріантним і s-разів коваріантним (n=r+s) називається об'єкт, який у деякій системі координат визначається 3^n числами (компонентами) $A_{k_1k_2\ldots k_s}^{i_1i_2\ldots i_r}$, що перетворюються при зміні системи координат згідно із законом

$$A_{k_1'k_2'\ldots k_s'}^{i_1'i_2'\ldots i_r'} = \alpha_{k_1'}^{l_1}\alpha_{k_2'}^{l_2}\ldots\alpha_{k_s'}^{l_s}\alpha_{m_1}^{i_1'}\alpha_{m_1}^{i_1'}\ldots\alpha_{m_r}^{i_r'}A_{l_1l_2\ldots l_s}^{m_1m_2\ldots m_r} \qquad (2.14)$$

тензор такого вигляду називають тензором типу $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ і позначають $\hat{A}$.

Приклад 2.2 Нехай задано коваріантні компоненти тензора другого рангу $A_{11} = 1,\ A_{12} = -2,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = 2,\ A_{22} = -4,\ A_{23} = 6,\ A_{31} = 5,\ A_{32} = 1,\ A_{33} = 4$ і матриця переходу від старої системи координат до нової

$$\left\|\alpha_{i'}^{k}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Знайти $A_{i'k'}$ – коваріантні компоненти того ж тензора в новій системі координат.

Розв’язання: За законом перетворення компонент тензора (2.13) отримаємо:

$$a_{1'1'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{1}a_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{2}a_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{3}a_{13} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{1}a_{21} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{2}a_{22} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{3}a_{23} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{1}a_{31}$$
$$+ \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{2}a_{32} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{3}a_{33} = 33$$

аналогічно

$$a_{1'2'} = \alpha_{1'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 93,\ a_{1'3'} = \alpha_{1'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = 37,\ a_{2'1'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm} = 116,$$
$$a_{2'2'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 131,\ a_{2'3'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = -60,\ a_{3'1'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm} = 92,$$
$$a_{3'2'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 79,\ a_{3'3'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = -95$$

Зв'язок між різними компонентами тензора.

Компоненти тензора 2-го рангу, у системі координат із базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, пов'язані між собою формулами:

$$A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm},\quad A_{ik} = g_{il}g_{km}A^{lm},$$
$$A_{ik} = g_{kl}A_{i}^{\cdot l} = g_{il}A_{\cdot k}^{l},\quad A_{i}^{\cdot k} = g^{kl}A_{il},\quad A_{i}^{\cdot k} = g_{il}A^{lk}$$
$$A_{k}^{l} = g^{il}A_{ik},\quad A_{\cdot k}^{l} = g_{ki}A^{li},\quad A^{ik} = g^{il}A_{l}^{\cdot k} = g^{kl}A_{\cdot l}^{i}.$$

Крапка підкреслює порядок проходження індексів, так у $A_{i}^{\cdot k}$ перший індекс нижній (коваріантний), а другий – верхній (контраваріантний).

Правило одержання одних компонент тензора через інші за допомогою метричного тензора називають операцією підняття (опускання) індексів у компонентів тензора.

Це правило полягає в тім, що індекс, який піднімається (опускається) переходить у метричний тензор, а на те місце, куди він повинен бути піднятий (опущений), ставиться «німий» індекс підсумовування; другим «німим» індексом підсумовування є вільний індекс метричного тензора.

Наприклад, для тензора третього рангу будуть справедливі співвідношення

$$A_{ikl} = g_{im} A^{m}_{\cdot kl} = g_{im} g_{kn} A^{mn}_{\cdot\cdot l} = g_{km} A_{i\cdot l}^{\cdot m} = g_{im} g_{kn} g_{lr} A^{mnr} = g_{im} g_{ln} A^{m\cdot n}_{\cdot k\cdot}$$

2.4 Дії над тензорами

Додавання тензорів.

Додавання визначається тільки для тензорів одного рангу й структури. Сумою двох тензорів $\hat{A}, \hat{B}$ називається тензор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ того ж рангу й структури що й тензори $\hat{A}, \hat{B}$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють сумам відповідних компонент тензорів $\hat{A}, \hat{B}$

$$C^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} + B^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \tag{2.15}$$

Множення тензора на скаляр.

Добутком тензора $\hat{A}$ на скаляр λ називається тензор $\hat{B} = \lambda \hat{A}$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють добутку компонент тензора $\hat{A}$ на число λ

$$B^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = \lambda \cdot A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \tag{2.16}$$

Множення тензорів.

Ця операція визначається для двох тензорів, незалежно від їх рангу й структури. Добутком двох тензорів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ рангу n_1 і n_2 з компонентами в деякій системі координат $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$ і $B^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_q}$ називається тензор $\hat{C}$ рангу $n_1 + n_2$ з компонентами

$$C^{i_1 i_2 \dots i_r k_1 \dots k_p}_{j_1 j_2 \dots j_s l_1 \dots l_q} = A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \cdot B^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_q} \tag{2.17}$$

Взагалі $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, тобто добуток тензорів не комутативний.

<u>Операція перестановки індексів, або утворення ізомеру.</u>

Два тензори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ одного рангу й структури називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих тензорів у деякій системі координат

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = B^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}.$$

Відзначимо, що з рівності компонент тензорів у якій-небудь системі координат випливає їх рівність у будь-якій іншій системі координат.

Ізомер утворюється при зміні порядку проходження верхніх або нижніх індексів. Наприклад,

$$A^{ij}_{\cdot\cdot pqr} = B^{ji}_{\cdot\cdot pqr}$$

По суті, ця операція є формальною. Її значення виявляється тільки тоді, коли вона комбінується з іншими операціями.

<u>Згортання змішаного тензора (згортка).</u>

Згортання – це операція, що застосовується тільки до змішаних компонент тензора.

Згортанням називається підсумовування компонент тензора по двох різнойменних («верхній», «нижній») індексах.

Властивості:

1) Згортання можна проводити для тензорів рангу $n \geq 2$;
2) При згортанні тензора рангу n по двох індексах одержимо тензор рангу $n-2$;
3) Операцію згортання можна проводити кілька разів.

Приклад 2.3 Знайти вектор, який утворюється множенням тензора $\hat{T}$ на вектор $\overline{A}$ з наступним згортанням по першому (другому) індексу тензора й індексу вектора, якщо компоненти тензорів задані матрицями

$$\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

<u>Розв’язання</u>: У результаті добутку тензора на вектор одержимо тензор 3-го рангу $\hat{C}$ з компонентами $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = T^{ij} A_k$, щоб не шукати всі 27 компонент, проведемо згортку тензора $\hat{C}$ по першому верхньому індексу й нижньому індексу

$$B^j = C^{lj}_{\cdot\cdot l} = T^{lj}A_l = T^{1j}A_1 + T^{2j}A_2 + T^{3j}A_3$$
$$B^1 = T^{11}A_1 + T^{21}A_2 + T^{31}A_3 = 10$$
$$B^2 = T^{12}A_1 + T^{22}A_2 + T^{32}A_3 = 17$$
$$B^3 = T^{13}A_1 + T^{23}A_2 + T^{33}A_3 = 16$$

Якщо, провести згортку по другому верхньому індексу тензора й індексу (нижньому) вектора, одержимо інший результат

$$D^i = C^{il}_{\cdot\cdot l} = T^{il}A_l = T^{i1}A_1 + T^{i2}A_2 + T^{i3}A_3$$
$$D^1 = T^{1l}A_l = T^{11}A_1 + T^{12}A_2 + T^{13}A_3 = 7$$
$$D^2 = T^{2l}A_l = T^{21}A_1 + T^{22}A_2 + T^{23}A_3 = 14$$
$$D^3 = T^{3l}A_l = T^{31}A_1 + T^{32}A_2 + T^{33}A_3 = 19$$

Множення з наступним згортанням часто називають *скалярним добутком* тензорів.

<u>*Одиничний тензор.*</u>

Відомий з алгебри символ Кронекера $\delta^i_k = \alpha^{j'}_k \alpha^i_{j'} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$ є тензором другого рангу з одиничною матрицею

$$\left\| \delta^i_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Компоненти одиничного тензора однакові у всіх координатних системах.

Множення на δ^i_k з наступним згортанням часто використовується в алгебраїчних виразах.

Приклад 2.4 Спростити вирази $\delta^i_k \cdot A_{kj}$; $\delta^l_i \delta^m_k b^i b^k - b^l \delta^m_j a^j$; $A^{\cdot k}_i B_k - B^i$

<u>Розв’язання</u>:

1) $\delta^i_k \cdot A_{kj} = A_{ij}$ - тотожне перетворення (перейменування індексу)

2) $\delta^l_i \delta^m_k b^i b^k - b^l \delta^m_j a^j = b^l b^m - b^l a^m = b^l (b^m - a^m)$

3) $A^{\cdot k}_i B_k - B^i = A^{\cdot k}_i B_k - \delta^{\cdot k}_i B_k = (A^{\cdot k}_i - \delta^{\cdot k}_i) B_k = T^{\cdot k}_i B_k$

Діадний добуток векторів.

Якщо розглянути всілякі добутки компонент двох векторів $A^i B^k = C^{ik}$, одержимо дев'ять компонент, що утворюють тензор другого рангу, який називається *діадним добутком* векторів $\overline{A}, \overline{B}$.

Діадний добуток не комутативний $\overline{A}\overline{B} \neq \overline{B}\overline{A}$. Але матриця $\overline{B}\overline{A}$ є транспонована матриця $\overline{A}\overline{B}$. Аналогічно до запису вектора $\overline{A} = A^i \overline{e}_i$ тензор з компонентами C^{ik} можна записати так

$$\hat{C} = A^i B^k \overline{e}_i \overline{e}_k = C^{ik} \overline{e}_i \overline{e}_k$$

Узагальнюючи цей спосіб на випадок тензора будь-якого рангу, одержимо

$$\hat{T} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s} \overline{e}^{\,j_1} \dots \overline{e}_{i_1} \dots$$

у виразі $\overline{e}^{\,j_1} \dots \overline{e}_{i_1} \dots$ вектори мають визначений порядок, підсумовування проводиться за усіма індексами $i_1 \dots i_p$, $j_1 \dots j_s$.

2.5 Фізичні приклади тензорів.

Розглянемо деякі фізичні приклади тензорів другого рангу.

Тензор напруження.

Механічним напруженням називається міра інтенсивності внутрішніх сил, розподілених по перетинах, тобто зусилля, що припадають на одиницю площі перетину тіла. Напруження є векторною величиною.

Напружений стан суцільного середовища вважають відомим, якщо відоме напруження на будь-якій елементарній площинці, що проходить через задану точку. Вектор напруження $\overline{p}$ в даній точці можна визначити як границю відношення зусилля $\Delta\overline{F}$ до площі площинки ΔS, коли остання стягується до точки. Вектор напруження є функцією точки та орієнтації площинки, тобто для визначення напруженого стану в точці необхідно знати нескінченну сукупність векторів $\overline{p}_n$ на всіх площинках, що проходять через дану точку. Для визначення напруженого стану в точці потрібна величина, яка є однозначною функцією точки, тобто не залежить від орієнтації площинки і визначає напруження на будь якій площинці з нормаллю $\overline{n}$. Такою величиною є *тензор напруження*.

Розглянемо елементарний тетраедр, що вирізаний в середовищі навколо точки M, три ребра якого напрямлені уздовж осей декартової системи координат (рисунок 6). Нехай $d\sigma_i$ – площа грані ортогональної до осі x_i, а $d\sigma_n$ – площа грані з нормаллю $\overline{n}$.

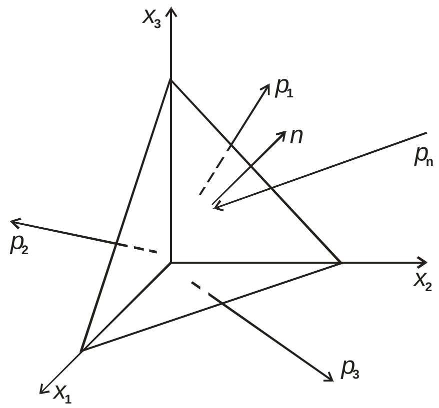

Рисунок 6.

Сила, що діє на тетраедр виражається через напруження $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3, \overline{p}_n$, що прикладені до внутрішніх сторін граней тетраедра. Нехай $\overline{W}$ – прискорення центру інерції тетраедра, $\overline{F}$ – вектор масових сил, dm – маса тетраедра. Запишемо закон руху центру інерції тетраедра

$$\overline{W}dm = \overline{p}_n d\sigma_n - \overline{p}_1 d\sigma_1 - \overline{p}_2 d\sigma_2 - \overline{p}_3 d\sigma_3 + \overline{F}dm$$

Перейдемо до границі, стягуючи тетраедр до точки M. Відзначимо, що члени з dm пропорційні об'єму, тобто мають більш високий порядок малості, ніж члени з $d\sigma_i$, тому, відкидаючи їх, отримаємо співвідношення

$$\overline{p}_n d\sigma_n = \overline{p}_1 d\sigma_1 + \overline{p}_2 d\sigma_2 + \overline{p}_3 d\sigma_3$$

далі врахуємо, що $d\sigma_i = d\sigma_n \cos(\overline{n}, x_i) = n_i d\sigma_n$ звідки $\overline{p}_n = \overline{p}_i n_i$ (сума по i),

або в проекціях на осі координат $p_{nk} = p_{ik} n_i$.

Тут p_{ik} – сукупність дев'яти компонент напружень, нормальних при $i = k$ і дотичних при $i \neq k$ на трьох взаємно ортогональних площадках в точці M (рисунок 7). Ці дев'ять величин не залежать від орієнтації площадки, а тільки від точки M і мають назву *тензора напружень*.

Розглянемо закон перетворення компонент тензора напружень при зміні системи координат. Нехай i –та вісь нової системи координат направлена по нормалі $\overline{n}$. Якщо $\overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3$ – орти старої системи координат, а $\overline{i}_{1'}, \overline{i}_{2'}, \overline{i}_{3'}$ – орти нової системи координат, тоді $\overline{n} = \overline{i}_{i'}$. Знайдемо проекцію вектора $\overline{n}$ на l –у координатну вісь старої системи координат $n_l = \overline{n} \cdot \overline{i}_l = \overline{i}_{i'} \cdot \overline{i}_l = \alpha_{i'l}$.

Таким чином, $\overline{p}_n = \overline{p}_{i'} = \overline{p}_l n_l = \alpha_{i'l} \overline{p}_l = \alpha_{i'l} p_{lm} \overline{i}_m$ (сума по l, m). Далі розглянемо добуток $\overline{p}_{i'} \cdot \overline{i}_{k'} = \alpha_{i'l} p_{lm} \overline{i}_m \cdot \overline{i}_{k'} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm}$, або $p_{i'k'} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm}$. З останньої формули випливає, що компоненти p_{ik} змінюються за тензорним законом.

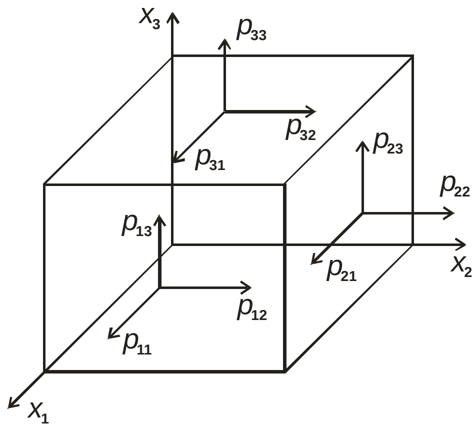

Рисунок 7.

Тензор моментів інерції.

Розглянемо систему матеріальних точок, яка довільно рухається у просторі. *Вектор моменту імпульсу* $\overline{L}$ цієї системи відносно початку деякої системи координат є сумою усіх моментів імпульсу точок системи $\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{p}_i$, де $\overline{r}_i$ – радіус-вектор, $\overline{p}_i$ – імпульс i-ої точки системи. Якщо в процесі руху відстані між точками системи не змінюються і зберігаються відстані від точок до початку координат, то система моделює *тверде тіло з нерухомою точкою* у початку координат. *Вектор імпульсу* i-ої точки системи виражається за формулою $\overline{p}_i = m_i \overline{V}_i$ (немає суми по i), де $m_i, \overline{V}_i$ – маса та швидкість i-ої точки. Причому у випадку твердого тіла з нерухомою точкою швидкість виражається за формулою Ейлера через миттєву кутову швидкість системи $\overline{\omega}$: $\overline{V}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i$. Тоді для вектору $\overline{L}$ отримаємо:

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{r}_i \times \overline{V}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{r}_i \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_i \right) \right)$$

За формулою для подвійного векторного добутку $\overline{a} \times \left(\overline{b} \times \overline{c} \right) = \overline{b} \left(\overline{a} \cdot \overline{c} \right) - \overline{c} \left(\overline{a} \cdot \overline{b} \right)$ отримаємо $\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\overline{\omega} \left(\overline{r}_i \cdot \overline{r}_i \right) - \overline{r}_i \left(\overline{\omega} \cdot \overline{r}_i \right) \right]$.

Запишемо останню рівність в проекціях на вісі декартової системи координат $\left(x_1, x_2, x_3 \right)$, де $x_j^{(i)}$ – координати i-ої точки, $j = 1,2,3$.

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\omega_j x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)} \omega_k x_k^{(i)} \right] \text{ (сума по } l, k \text{)}.$$

Заміняючи в останній формулі $\omega_j = \delta_{jk} \omega_k$, запишемо

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\delta_{jk}\omega_k x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)}\omega_k x_k^{(i)}\right] = \omega_k \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\delta_{jk} x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)} x_k^{(i)}\right] = \omega_k I_{jk},$$

де

$$I_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\delta_{jk} x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)} x_k^{(i)}\right].$$

Дев’ять величин I_{jk} складають тензор другого рангу, що називається *тензором моментів інерції* системи матеріальних точок. Осьові та центробіжні моменти інерції системи виражаються через компоненти I_{jk} наступним чином

$$I_{x_1x_1} = I_{11} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_2^{(i)}\right)^2 + \left(x_3^{(i)}\right)^2\right],$$

$$I_{x_2x_2} = I_{22} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_3^{(i)}\right)^2 + \left(x_1^{(i)}\right)^2\right],$$

$$I_{x_3x_3} = I_{33} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i)}\right)^2\right],$$

$$I_{x_1x_2} = -I_{12} = -I_{21} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)},$$

$$I_{x_1x_3} = -I_{13} = -I_{31} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_3^{(i)} x_1^{(i)},$$

$$I_{x_2x_3} = -I_{23} = -I_{32} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_2^{(i)} x_3^{(i)}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Визначить поняття координатної поверхні та координатної лінії. Що таке криволінійні координати точки у просторі?

2. Які координатні поверхні і лінії має прямокутна декартова система координат?

3. Чому векторний базис в криволінійній системі координат називають локальним?

4. Яку систему координат називають ортогональною? Що таке коефіцієнти Ламе?