5. Запишіть формули для основних елементів простору в довільній криволінійній системі координат.

6. Як визначаються у просторі циліндричні та сферичні координати точки? Побудуйте координатні поверхні та лінії сферичної та циліндричної системи координат. Чому дорівнюють коефіцієнти Ламе для цих систем координат?

7. Запишіть формули зв'язку циліндричних та сферичних координат з прямокутними декартовими координатами.

8. Сформулюйте поняття тензору другого рангу. Які назви мають тензори нульового і першого рангу? Визначте тензор довільного рангу.

9. Перерахуйте основні операції над тензорами. Як визначається операція згортання тензора?

10. Наведіть фізичні приклади тензорів другого рангу. Запишіть формули, за якими осьові і центробіжні моменти інерції системи матеріальних точок виражаються через компоненти тензора моментів інерції.

3 Векторний і тензорний аналіз

3.1 Тензорне поле. Тензор-функція

Тензорне поле.

Якщо кожній точці M деякої множини X тривимірного простору R^3 однозначно поставлено у відповідність значення деякої тензорної величини $\hat{T}$, то кажуть, що задано поле цього тензора і пишуть $\hat{T} = \hat{T}(M)$, $M \in X \subset R^3$.

Прикладами окремих видів тензорних полів є скалярне поле $u = u(M)$, векторне поле $\overline{A} = \overline{A}(M)$, поле тензора 2-го рангу $P_{ik} = P_{ik}(M)$. Положення точки M однозначно визначає її радіус-вектор $\bar{r}$, таким чином, ми можемо розглядати дані поля як функції радіуса-вектора $\bar{r}$: $u = u(\bar{r})$, $\overline{A} = \overline{A}(\bar{r})$, $P_{ik} = P_{ik}(\bar{r})$, $\hat{T} = \hat{T}(\bar{r})$.

Тензор-функція скалярного аргументу.

Якщо кожному значенню скалярної величини $t \in X \subset R^1$ однозначно зіставлене значення тензорної величини $\hat{T}$, то кажуть, що задана тензор-функція скалярного аргументу і пишуть $\hat{T} = \hat{T}(t)$, $t \in X \subset R^1$.

Похідною тензор-функції за скалярним аргументом називається границя

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{T}(t + \Delta t) - \hat{T}(t)}{\Delta t}.$$

Похідна тензор-функції за скалярним аргументом є тензором того ж рангу що й $\hat{T}$, і обчислюється за звичайними правилами диференціювання компонент тензора.

Приклад 3.1 Задано компоненти тензора другого рангу

$$\|P_{ik}\| = \begin{Vmatrix} tx_1 & x_2 \sin t & x_3 \\ -x_2 \sin t & t^2 x_2^2 & e^t x_3 \\ -x_3 & -e^t x_3 & t^3 x_3^3 \end{Vmatrix}$$

знайти $\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial t}$.

<u>Розв'язання</u>:

$$\left\| \frac{\partial P_{ik}}{\partial t} \right\| = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \cos t & 0 \\ -x_2 \cos t & 2tx_2^2 & e^t x_3 \\ 0 & -e^t x_3 & 3t^2 x_3^3 \end{Vmatrix}.$$

<u>*Потік тензорного поля.*</u>

Потоком тензорного поля $\hat{T}(\bar{r})$ через двосторонню поверхню S називається поверхневий інтеграл $W = \iint\limits_S \bar{n} \cdot \hat{T} dS$.

Для тензора другого рангу, в координатній формі, отримаємо $W_i = \iint\limits_S n_k T_{ki} dS$.

Потік тензора другого рангу є вектором.

Приклад 3.2 Знайти потік одиничного тензора δ_{ik} через довільну замкнену поверхню S.

<u>Розв'язання</u>: $W_i = \iint\limits_S n_k \delta_{ki} dS = \iint\limits_S n_i dS$ або $\overline{W} = \iint\limits_S \bar{n} dS$, помножимо скалярно обидві частини останньої рівності на довільний сталий вектор $\overline{C}$, і застосуємо теорему Остроградського – Гауса $\overline{C} \cdot \overline{W} = \iint\limits_S \bar{n} \cdot \overline{C} dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{C} dV = 0$ звідки, за умови довільності вектора $\overline{C}$, отримаємо $W_i = 0$.

Розглянемо докладніше окремі випадки тензорних полів.

3.2 Скалярні поля і їх характеристики

Нехай задано скалярне поле $u = u(M),\ M \in X \subset R^3$.

Фізичними прикладами скалярних полів можуть служити: поле об'ємної щільності речовини, що заповнює деяку просторову область X, поле температури в нагрітому тілі.

Види скалярних полів.

Якщо скалярне поле у всіх точках області визначення приймає стале значення, то його називають *однорідним,* якщо скалярне поле змінюється від точки до точки, його називають *неоднорідним.*

На практиці часто зустрічаються приклади скалярних величин, які залежать не тільки від точки простору, але й від часу, наприклад, температура нагрітого тіла змінюється з часом за рахунок теплообміну з оточуючим середовищем.

Якщо скалярне поле залежить від часу, його називають *нестаціонарним.*

Якщо скалярне поле не залежить від часу, його називають *стаціонарним скалярним полем.*

В подальшому будуть розглядатися лише стаціонарні скалярні поля.

Геометричні властивості.

В загальному випадку скалярне поле $u = u(M)$, $M \in X \subset R^3$ називають *тривимірним.*

Скалярне поле називають *плоским*, якщо в деякій прямокутній системі координат воно залежить лише від двох координат.

Наприклад, поле розподілу температури середовища навколо рівномірно нагрітого циліндра нескінченної довжини є плоским, тому що в будь якій площині перпендикулярній осі симетрії циліндра розподіл температур буде однаковим.

Скалярне поле називають *одновимірним*, якщо в деякій прямокутній системі координат воно залежить лише від однієї координати.

Наприклад, температурне поле сталої води водойма залежить лише від глибини.

Скалярне поле називають *осесиметричним*, якщо в деякій циліндричній системі координат воно не залежить від кутової координати φ. Якщо скалярне поле залежить лише від координати r, його називають *осевим.*

Скалярне поле називають *центральним,* якщо в деякій сферичній системі координат воно залежить лише від координати ρ. Наприклад, гравітаційний потенціал матеріальної точки M_0 маси m_0 дорівнює $u(\rho) = G\dfrac{m_0}{\rho}$, де G - гравітаційна стала.

Визначимо основні характеристики скалярних полів.

Поверхні рівня.

Поверхнею рівня скалярного поля $u = u(M)$ називають сукупність точок деякої множини $S \subset R^3$, у яких функція $u = u(M)$ приймає одне і теж стале значення.

Рівняння поверхні рівня має вигляд:

$$u(M) = C = const\,,\ M \in S \tag{3.1}$$

Надаючи константі C різні значення, отримаємо сімейство поверхонь, щільність розподілу яких може характеризувати швидкість зміни скалярного поля в різних точках.

<u>Похідна за напрямом.</u>

Нехай у скалярному полі $u=u(M)$ зафіксована точка M_0 і деякий напрям, який визначається одиничним вектором $\bar{l}$. Виберемо іншу точку M таким чином, щоб вектор $\overline{M_0M}$ був колінеарний до вектора $\bar{l}$.

Позначимо $\Delta u = u(M)-u(M_0)$, $\Delta l = \left|\overline{M_0M}\right|$.

Похідною скалярного поля $u=u(M)$ в точці M_0 за напрямом $\bar{l}$ називають границю

$$\frac{\partial u}{\partial l} \equiv \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Якщо у просторі обрано ПДСК, похідна за напрямом визначається формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos\alpha_3,$$

де $\cos\alpha_i$ - напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Фізичний зміст.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля в даній точці в даному напрямі.

Якщо напрям вектора $\bar{l}$ є дотичним до поверхні рівня, яка проходить через дану точку, то $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ (на поверхні рівня скалярне поле є сталим).

<u>Градієнт скалярного поля.</u>

Визначимо в точці M вектор, похідна за напрямом якого набуває найбільшого значення. Цей вектор називають градієнтом скалярного поля в точці M.

Нехай у просторі R^3 визначено прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) і задано скалярне поле $u=u(M)$, що має неперервні похідні першого порядку. Градієнтом скалярного поля $u=u(x_1,x_2,x_3)$ в точці $M(x_1,x_2,x_3)$ називають вектор $\operatorname{grad} u$, який має координатами частинні похідні поля в даній точці.

Тобто в ПДСК, за означенням:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\bar{i}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\bar{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\bar{i}_3 \qquad (3.2)$$

Властивості градієнта.

1) Градієнт в точці M є ортогональним до поверхні рівня, що проходить через точку M.

2) Похідна за напрямом в точці M дорівнює проекції градієнта на даний напрям, тобто $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \overline{\operatorname{grad} u} \cdot \bar{l}$.

3) За напрямом градієнта скалярне поле $u = u(M)$ має найбільшу швидкість зростання, і величина цієї швидкості дорівнює модулю градієнта.

$$\frac{\partial u}{\partial l}_{\max} = \left|\operatorname{grad} u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2}\,.$$

Оператор $\overline{\nabla}$ – «набла».

Якщо ввести символічний оператор-вектор:

$$\overline{\nabla} = \bar{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.3)$$

то формула (3.2) приймає більш простий вигляд $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Запишемо за допомогою оператора ∇ властивості градієнта, пов'язані з арифметичними операціями. Нехай u, v – довільні диференційовні скалярні поля, c – стале скалярне поле.

1) $\overline{\nabla}(cu) = c\overline{\nabla}u$

2) $\overline{\nabla}(u+v) = \overline{\nabla}u + \overline{\nabla}v$

3) $\overline{\nabla}(uv) = v\overline{\nabla}u + u\overline{\nabla}v$

4) $\overline{\nabla}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\overline{\nabla}u - u\overline{\nabla}v}{v^2}$

Якщо у просторі задана ортогональна криволінійна система $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, з локальним базисом $\left(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\right)$, то градієнт визначається формулою:

$$\operatorname{grad} u = \overline{\nabla}u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\bar{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\bar{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\bar{e}_3 \qquad (3.4)$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Приклад 3.3 Для скалярного поля $u = \left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^3$ й точок $M_0(2;1;2)$, $M_1(1;0;1)$.

Знайти:

а) поверхні рівня, що проходять через точки M_0, M_1;

б) похідну поля u в точці M_0 за напрямом вектора $\overline{M_0 M_1}$;

в) напрям та швидкість найшвидшого зростання поля u в точці M_0.

Розв’язання: а) знайдемо поверхню рівня, що проходить через точку $M_0(2;1;2)$, за рівнянням (3.1) отримаємо:

$\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^3=C=u(M_0)=8 \Leftrightarrow x_1^2+2x_2^2-x_3^2=2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^2}{2}+x_2^2-\dfrac{x_3^2}{2}=1$ це однопорожнинний гіперболоїд (рисунок 8).

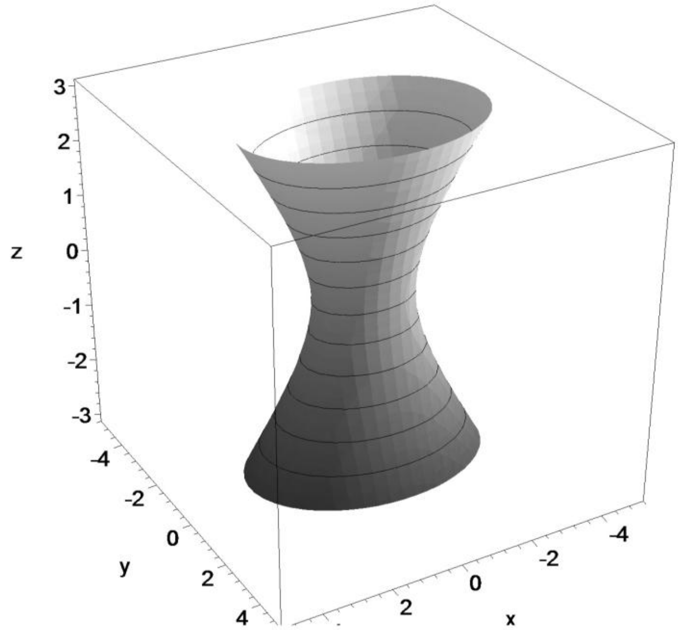

Рисунок 8.

Аналогічно для точки $M_1(1;0;1)$ отримаємо

$\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^3=C=u(M_1)=0 \Leftrightarrow x_3^2=x_1^2+2x_2^2$ – конус (рисунок 9).

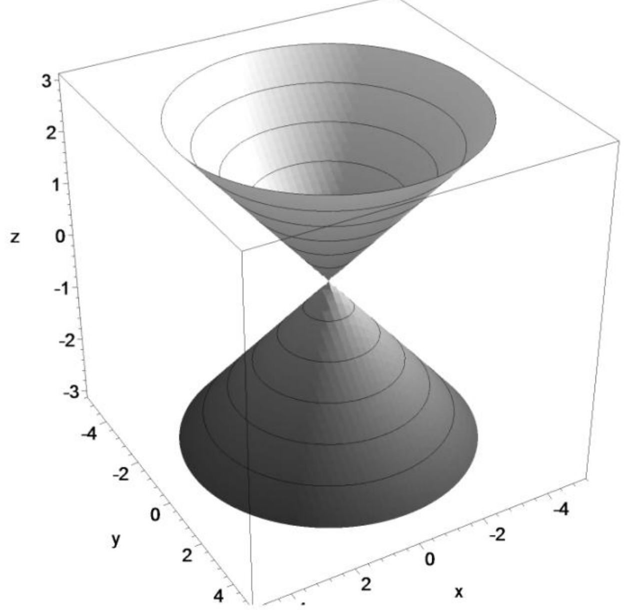

Рисунок 9.

На графіках координати x_1, x_2, x_3 позначені x, y, z відповідно.

б) знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{M_0M_1}$, для цього нормуємо вектор $\overline{M_0M_1} = (-1;-1;-1)$, $\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{3}$. Позначимо $\bar{l} = \dfrac{\overline{M_0M_1}}{\left|\overline{M_0M_1}\right|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Знайдемо частинні похідні скалярного поля в точці $M_0(2;1;2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 6x_1\left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^2 = 48$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 12x_2\left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^2 = 48$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -6x_3\left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^2 = -48$$

тоді $\operatorname{grad} u(M_0) = 48(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3)$ і похідна за напрямом вектора $\overline{M_0M_1}$ дорівнює проекції градієнта на цей вектор $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \overline{\operatorname{grad} u} \cdot \bar{l} = -48\dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{48}{\sqrt{3}}$.

в) напрямом найшвидшого зростання скалярного поля в точці M_0 буде напрям градієнта поля в цій точці, тобто напрям вектора:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = 48(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3)$$

Максимальна швидкість зростання поля дорівнює модулю градієнта:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right._{\max} = \left|\operatorname{grad} u\right| = 48\sqrt{3}$$

Приклад 3.4 Знайти $gradu$, де $u = 2\rho^2 \sin\theta$ – скалярне поле, що задане в сферичній системі координат.

<u>Розв'язок:</u> В сферичній системі координат: $H_\rho = 1$, $H_\theta = \rho$, $H_\varphi = \rho\sin\theta$,

тоді за формулою (3.4) отримаємо:

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi,$$

$$gradu = 4\rho\sin\theta\bar{e}_\rho + 2\rho\cos\theta\bar{e}_\theta + 0\bar{e}_\varphi = 4\rho\sin\theta\bar{e}_\rho + 2\rho\cos\theta\bar{e}_\theta.$$

3.3 Векторні поля та їх характеристики

Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) і векторне поле $\bar{A}(M) = A_1(x_1, x_2, x_3)\bar{i}_1 + A_2(x_1, x_2, x_3)\bar{i}_2 + A_3(x_1, x_2, x_3)\bar{i}_3$, $M \in X \subset R^3$.

<u>*Види векторних полів.*</u>

Як і скалярні поля, векторні поля можуть бути *стаціонарними* і *нестаціонарними*. У першому випадку вектор залежить тільки від точки простору, у другому – від точки і часу.

Можна також виділити *однорідні* і *неоднорідні* векторні поля. Значенням однорідного векторного поля у всіх точках простору є один сталий вектор.

В подальшому векторним полем будемо вважати стаціонарне векторне поле.

Векторне поле називають *двовимірним (одновимірним),* якщо в деякій прямокутній системі координат (x_1, x_2, x_3) воно не залежить від координати x_3 (координат x_2, x_3).

Двовимірне векторне поле $\overline{A}(M) = (A_1(x_1, x_2), A_2(x_1, x_2), A_3(x_1, x_2))$ називають *плоским*, якщо в тій системі координат, в якій воно не залежить від координати x_3 компонента вектора $A_3 \equiv 0$.

Двовимірне векторне поле, яке не є плоским, називають *плоскопаралельним.*

Векторне поле називають *осесиметричним*, якщо в деякій циліндричній системі координат (r, φ, z) воно не залежить від кутової координати φ, причому в кожній точці вектор поля паралельний площині, що проходить через точку і вісь z.

Осесиметричне векторне поле називають *осевим,* якщо його вектор у всіх точках паралельний площині, перпендикулярній осі z.

Векторне поле $\overline{A}(M)$ називають *центральним,* якщо його вектор має вигляд $\overline{A}(M) = f(|\overline{r}|)\overline{r}$, де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки M, $f(|\overline{r}|)$ – довільна скалярна функція довжини радіус-вектора.

Приклад 3.5 Тверде тіло, що обертається навколо осі з сталою кутовою швидкістю $\overline{\Omega}$, замітає деяку осесиметричну замкнену область простору $X \subset R^3$. Вектори швидкості точок твердого тіла в області X утворюють векторне поле $\overline{V}(M)$, яке можна визначити умовою $\overline{V}(M) = \overline{\Omega} \times \overline{r}$, де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки M. Переконатись, що це векторне поле є плоским.

<u>Розв'язання:</u> Оберемо прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) таким чином щоб вісь обертання співпадала з віссю x_3 і вектори $\overline{\Omega}$ і $\overline{i}_3$ були співнаправлені (рисунок 10). Тоді $\overline{\Omega} = \omega \overline{i}_3$, де $\omega = |\overline{\Omega}|$ – модуль вектора кутової швидкості.

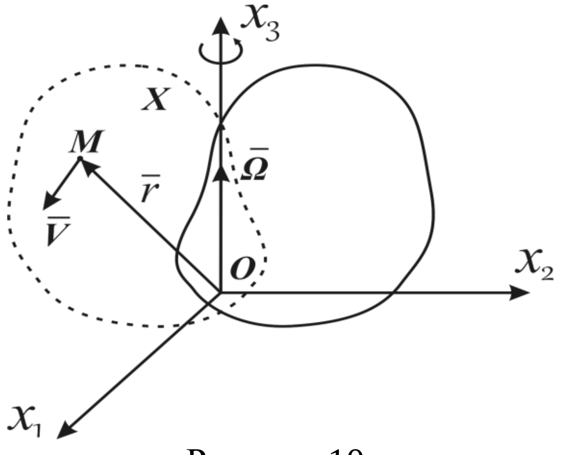

Рисунок 10.

Радіус-вектор матиме вигляд $\bar{r} = x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$ і для векторного добутку отримаємо:

$$\bar{V}(M) = \bar{\Omega} \times \bar{r} = \omega\bar{i}_3 \times \left(x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}\right) = \omega\left(-x_2\bar{i}_1 + x_1\bar{i}_2\right).$$

У введеній системі координат вектор $\bar{V}(M)$ не залежить від координати x_3, причому $V_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$, тобто маємо приклад *плоского* векторного поля.

Якщо, тверде тіло буде поступово і рівномірно рухатися уздовж осі обертання x_3 з швидкістю, абсолютна величина якої дорівнює v_0, то отримаємо приклад *плоскопаралельного* векторного поля з вектором

$$\bar{V}(M) = \omega\left(-x_2\bar{i}_1 + x_1\bar{i}_2\right) + v_0\bar{i}_3.$$

Визначимо основні характеристики векторних полів.

<u>*Векторні лінії.*</u>

Гладка крива Γ називається *векторною лінією* векторного поля $\overline{A}(M)$, якщо в кожній її точці $P \in \Gamma$ дотичний вектор є колінеарним вектору поля $\overline{A}(P)$.

Якщо поле $\overline{A}(M)$ неперервно-диференційовне, то для визначення векторних ліній маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3} \tag{3.5}$$

Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ то система матиме вигляд:

$$\frac{H_1 dq_1}{A_1} = \frac{H_2 dq_2}{A_2} = \frac{H_3 dq_3}{A_3} \tag{3.6}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Приклад 3.6 Знайти векторні лінії поля $A = (y+z)\bar{i} - x\bar{j} - x\bar{k}$.

<u>Розв’язання:</u> Із означення виходить, що векторними лініями поля $A = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ є інтегральні криві системи диференціальних рівнянь $\dfrac{dx}{A_x} = \dfrac{dy}{A_y} = \dfrac{dz}{A_z}$, яка може бути розв’язана або методом знаходження інтегральних комбінацій, або зведена до нормальної системи та розв’язана в параметричному вигляді. Розглянемо обидва способи.

Перший спосіб.

Запишемо систему (3.5) для заданого векторного поля:

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-x}$$

Використаємо таку властивість рівних відношень:

Якщо $\frac{U_1}{V_1}=\frac{U_2}{V_2}=\ldots=\frac{U_n}{V_n}=D$, то $\frac{A_1U_1+A_2U_2+\ldots+A_nU_n}{A_1V_1+A_2V_2+\ldots+A_nV_n}=D$ для будь яких $A_1, A_2, \ldots, A_n \in R$.

$\frac{xdx}{x(y+z)}=\frac{ydy}{-xy}=\frac{zdz}{-xz}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$ звідки $xdx+ydy+zdz=0 \Rightarrow$ $\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=C_1$ це один інтеграл системи, другий знайдемо з умови $\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-x}=\frac{dy-dz}{0}$ звідки $d(y-z)=0 \Rightarrow y-z=C_2$ очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні, так що векторні лінії цього поля це лінії перетину поверхонь $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1\ (сфера) \\ y-z=C_2\ (площина) \end{cases}$, тобто кола у просторі.

Другий спосіб.

Перейдемо від (3.5) до системи диференціальних рівнянь у нормальному вигляді: $\frac{\frac{dx}{dt}}{A_x}=\frac{\frac{dy}{dt}}{A_y}=\frac{\frac{dz}{dt}}{A_z}=\phi(x,y,z,t)$, де $\phi(x,y,z,t)$ будь-яка наперед вибрана функція, візьмемо, наприклад, $\phi\equiv 1$, тоді $\frac{\frac{dx}{dt}}{y+z}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-x}=\frac{\frac{dz}{dt}}{-x}=1$ звідки отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+z \\ \frac{dy}{dt}=-x \\ \frac{dz}{dt}=-x \end{cases}$$

Диференціюючи перше рівняння, отримаємо $\frac{d^2x}{dr^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$, користуючись другим та третім рівняннями, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами $\frac{d^2x}{dr^2} + 2x = 0$ загальний розв'язок якого має вигляд $x = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t$. Невідомі y та z знайдемо, інтегруючи друге та трете рівняння системи. Остаточно отримаємо параметричні рівняння векторних ліній поля:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t \\ y = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t - \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos\sqrt{2} + C_3 \\ z = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t - \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos\sqrt{2} + C_4 \end{cases}$$

Векторні поверхні.

Гладка крива L називається *трансверсальною* векторному полю $\overline{A}(M)$, якщо в кожній її точці $P \in L$ дотичний вектор не є колінеарним вектору поля $\overline{A}(P)$.

Множина усіх векторних ліній, що проходять через точки трансверсальної кривої L, утворює поверхню S, яка називається *векторною поверхнею* векторного поля $\overline{A}(M)$. Якщо крива L замкнена, векторну поверхню S називають векторною трубкою.

Потік векторного поля.

Якщо у певному векторному полі $\overline{A}(M)$ задана двостороння поверхня S з вектором нормалі $\overline{n}$, то потоком векторного поля $\overline{A}(M)$ через поверхню S за напрямом нормалі $\overline{n}$ називається поверхневий інтеграл

$$\Pi_S = \iint_S \overline{n} \cdot \overline{A} dS \tag{3.7}$$

або $\Pi_S = \iint_S A_n dS$ де A_n – проекція вектора $\overline{A}$ на вектор нормалі $\overline{n}$.

Якщо поверхня S є векторною поверхнею поля $\overline{A}(M)$, то $\Pi_S = 0$, тому що в цьому випадку $\overline{n} \cdot \overline{A} \equiv 0$.

Фізичний зміст потоку векторного поля.

Якщо векторне поле $\overline{A}(M)$ описує поле швидкостей при течії рідини в області X, то потік векторного поля $\overline{A}(M)$ через поверхню $S \subset X$ виражає об'єм рідини, що проходить за одиницю часу через поверхню S.

Розглянемо потік Π_S векторного поля $\overline{A}(M)$ через замкнену поверхню S, що обмежує область D, за напрямом зовнішньої нормалі $\overline{n}$. Можливі три випадки для значення потоку Π_S.

1) Якщо $\Pi_S > 0$, то в області D існують джерела рідини.

2) Якщо $\Pi_S < 0$, то в області D існують стоки рідини.

3) Якщо $\Pi_S = 0$, то виникає невизначеність, або в області D не має джерел і стоків, або вони мають рівну інтенсивність.

Третій випадок показує, що для визначення інтенсивності джерел та стоків потік векторного поля не є задовільною характеристикою, потрібна нова характеристика, яка визначатиме їх інтенсивність в кожній точці області D, такою характеристикою є дивергенція векторного поля.

Дивергенція векторного поля.

Дивергенцією векторного поля $\overline{A}$ в точці M називається границя

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (S \to M)}} \frac{1}{\tau} \iint \overline{n} \cdot \overline{A} dS \equiv \operatorname{div} \overline{A} \tag{3.8}$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує деякий окіл точки M, τ – об'єм, що обмежує поверхня S, $\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, $(S \to M)$ означає, що поверхня стягується в точку M.

Дивергенція векторного поля є скалярною величиною (утворює скалярне поле), яка не залежить від системи координат, але формула для її обчислення залежить від обраної системи координат.

В прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) у випадку неперервно-диференційовного поля, дивергенцію в кожній точці можна знайти за формулою:

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \tag{3.9}$$

Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах (q^1, q^2, q^3), то

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (A_2 H_1 H_3)}{\partial q^2} + \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q^3} \right) \tag{3.10}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

За допомогою оператора $\overline{\nabla}$ дивергенцію записується як скалярний добуток векторів $\operatorname{div}\overline{A} = \overline{\nabla} \cdot \overline{A}$.

Циркуляція векторного поля.

Циркуляцією векторного поля $\overline{A}$ вздовж замкненої кривої L, яка задана параметричним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(s)$, називається криволінійний інтеграл

$$Ц = \oint_L \overline{A} \cdot d\bar{r} \tag{3.11}$$

Векторний елемент $d\bar{r}$ можна записати у вигляді $d\bar{r} = \bar{\tau} dl$, де $\bar{\tau}$ - одиничний дотичний вектор кривої L, dl - елемент довжини дуги кривої L, тоді $Ц = \oint_L \overline{A} \cdot \bar{\tau} dl$.

В прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) цей інтеграл має вигляд

$$Ц = \oint_L A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \tag{3.12}$$

Ротор векторного поля.

Ротором векторного поля $\overline{A}$ в точці M називається границя

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (S \to M)}} \frac{1}{\tau} \iint_S \bar{n} \times \overline{A} dS \equiv \operatorname{rot}\overline{A} \tag{3.13}$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує деякий окіл точки M, τ – об'єм, що обмежує поверхня S, $\bar{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, $(S \to M)$ означає, що поверхня стягується в точку M.

Ротор є вектором, напрям якого залежить від орієнтації системи координат. Такі вектори називають *аксіальними*, або псевдовекторами.

У прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) справедлива формула $\operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\bar{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\bar{i}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\bar{i}_3$, або

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \overline{\nabla} \times \overline{A} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, то

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1\overline{e}_1 & H_2\overline{e}_2 & H_3\overline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Основна властивість ротора векторного поля.

Проекція $\operatorname{rot}\overline{A}(M)$ на будь який напрям $\bar{l}$ в кожній точці поля дорівнює границі відношення циркуляції вздовж контуру, що обмежує плоску площинку, яку проведено через точку M перпендикулярно $\bar{l}$, до площі цієї площинки, коли контур стягується в точку M.

Градієнт, дивергенцію й ротор можна розглядати як диференціальні операції, які застосовуються до скалярних і векторних полів. За допомогою комбінацій цих операцій можна утворити диференціальні операції більш високого порядку.

Диференціальні операції другого порядку.

Якщо поле двічі неперервно-диференційовне, то можна утворити такі операції другого порядку:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u = \nabla^2 u = \Delta u$, де $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – *оператор Лапласа* в декартових координатах.

2) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A})$

3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{A}) = \overline{\nabla}\cdot(\overline{\nabla}\times\overline{A}) \equiv 0$

4) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \overline{\nabla}\times\overline{\nabla}u \equiv \overline{0}$

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = \overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A}) - (\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla})\overline{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) - \Delta\overline{A}$.

Запис $\Delta\overline{A}$ означає покоординатне застосування оператору Лапласа до векторного поля $\overline{A}$.

3.4 Інтегральні теореми у векторному вигляді

Теорема Остроградського-Гауса у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iiint\limits_{\tau} \operatorname{div}\overline{A}\,d\tau = \iint\limits_{S} \overline{n}\cdot\overline{A}\,dS \tag{3.16}$$