Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, то

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1\overline{e}_1 & H_2\overline{e}_2 & H_3\overline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Основна властивість ротора векторного поля.

Проекція $\operatorname{rot}\overline{A}(M)$ на будь який напрям $\overline{l}$ в кожній точці поля дорівнює границі відношення циркуляції вздовж контуру, що обмежує плоску площинку, яку проведено через точку M перпендикулярно $\overline{l}$, до площі цієї площинки, коли контур стягується в точку M.

Градієнт, дивергенцію й ротор можна розглядати як диференціальні операції, які застосовуються до скалярних і векторних полів. За допомогою комбінацій цих операцій можна утворити диференціальні операції більш високого порядку.

Диференціальні операції другого порядку.

Якщо поле двічі неперервно-диференційовне, то можна утворити такі операції другого порядку:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = \overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u = \nabla^2 u = \Delta u$, де $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – *оператор Лапласа* в декартових координатах.

2) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A})$

3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{A}) = \overline{\nabla}\cdot(\overline{\nabla}\times\overline{A}) \equiv 0$

4) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u) = \overline{\nabla}\times\overline{\nabla}u \equiv \overline{0}$

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}A) = \overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A}) - (\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla})\overline{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) - \Delta\overline{A}$.

Запис $\Delta\overline{A}$ означає покоординатне застосування оператору Лапласа до векторного поля $\overline{A}$.

3.4 Інтегральні теореми у векторному вигляді

Теорема Остроградського-Гауса у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iiint\limits_{\tau} \operatorname{div}\overline{A}\,d\tau = \iint\limits_{S} \overline{n}\cdot\overline{A}\,dS \tag{3.16}$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує об'єм τ, $\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, векторне поле $\overline{A}$ – неперервно-диференційовне в області τ і на поверхні S.

Теорема Стокса у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iint_S \overline{n} \cdot \operatorname{rot} \overline{A} dS = \oint_L \overline{A} \cdot d\overline{r} \tag{3.17}$$

де L – замкнений контур, який обмежує поверхню S, $\overline{n}$ – вектор нормалі до поверхні S, напрям якого узгоджений з напрямом обходу контуру L, векторне поле $\overline{A}$ – неперервно-диференційовне на контурі L і на поверхні S.

Приклад 3.7 Знайти потік векторного поля $\overline{A} = (x_1 + 3x_2)\overline{i}_1 + (x_3 - x_2)\overline{i}_2 + (2x_1 - x_3)\overline{i}_3$ через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежена поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ і знаходиться у першому октанті.

Обчислення провести двома способами: безпосередньо за означенням потоку та за теоремою Остроградського - Гауса.

<u>Розв'язання:</u> *А)* Перший спосіб (безпосередньо).

Поверхня S є кусково-гладкою і складається з гладких поверхонь:

S_{OCB}: $x_1 = 0$, S_{OAC}: $x_2 = 0$, S_{OAB}: $x_3 = 0$ – площини,

S_{ACB}: $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$ – параболоїд,

Побудуємо замкнену поверхню, яка обмежується цими поверхнями і розташовується в першому октанті (рисунок 11).

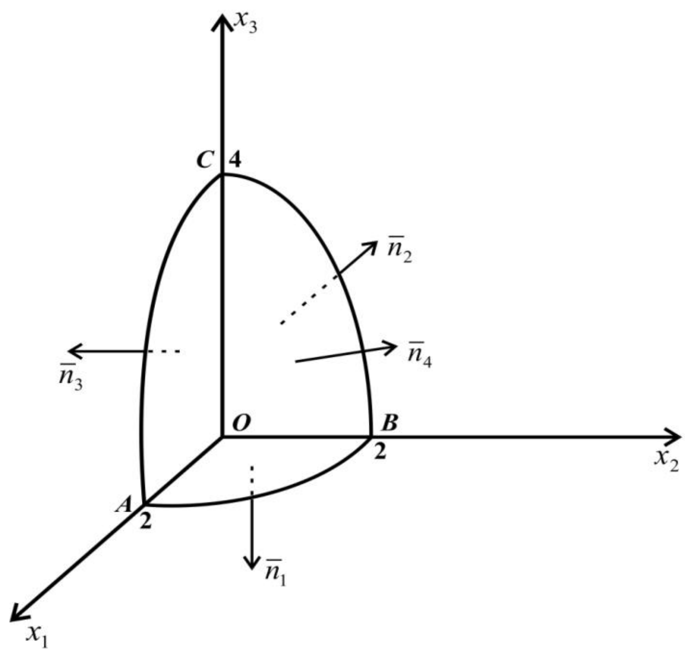

Рисунок 11.

За властивістю адитивності поверхневого інтеграла, маємо

$$\Pi_S = \Pi_{S_{OAB}} + \Pi_{S_{OBC}} + \Pi_{S_{OAC}} + \Pi_{S_{ABC}}$$

Розглянемо окремо кожний інтеграл:

1) S_{OAB}: $x_3 = 0$, $\bar{n}_1 = -\bar{i}_3$, $\bar{n}_1 \cdot \bar{A} = x_3 - 2x_1$, розглянемо проекцію поверхні S_{OAB} на площину Ox_1x_2 – D_{OAB}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le \sqrt{4 - x_1^2}$, тоді для елемента площі маємо $dS = dx_1 dx_2$ звідки отримуємо

$$\Pi_{S_{OAB}} = \iint\limits_{S_{OAB}} (x_3 - 2x_1) dS = \iint\limits_{D_{OAB}} (-2x_1) dx_1 dx_2 = -2\int_0^2 dx_2 \int_0^{\sqrt{4-x_2^2}} x_1 dx_1 = -\int_0^2 \left(4 - x_2^2\right) dx_2 = -\frac{16}{3}$$

.

2) $S_{OBC}: x_1 = 0$, $\bar{n}_2 = -\bar{i}_1$, $\bar{n}_2 \cdot \bar{A} = -x_1 - 3x_2$, проекція – D_{OBC}: $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 4 - x_2^2$, $dS = dx_2 dx_3$ звідки

$$\Pi_{S_{OBC}} = \iint\limits_{S_{OBC}} (-x_1 - 3x_2) dS = \iint\limits_{D_{OBC}} (-3x_2) dx_2 dx_3 = -3\int_0^2 dx_2 \int_0^{4-x_2^2} x_2 dx_3 =$$

$$= -3\int_0^2 x_2 \left(4 - x_2^2\right) dx_2 = -12$$

3) S_{OAC}: $x_2 = 0$, $\bar{n}_3 = -\bar{i}_2$, $\bar{n}_3 \cdot \bar{A} = x_2 - x_3$, проекція – D_{OAC}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_3 \le 4 - x_1^2$, $dS = dx_1 dx_3$ звідки

$$\Pi_{S_{OAC}} = \iint\limits_{S_{OAC}} (x_2 - x_3) dS = \iint\limits_{D_{OAC}} (-x_3) dx_1 dx_3 = -\int_0^2 dx_1 \int_0^{4-x_1^2} x_3 dx_3 = -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(4 - x_1^2\right)^2 dx_1 =$$

$$= -\frac{128}{15}$$

4) $S_{ABC}: x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$, $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 4$,

$$\bar{n}_4 = \frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{2x_1\bar{i}_1 + 2x_2\bar{i}_2 + \bar{i}_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}},$$

$\bar{n}_4 \cdot \bar{A} = \dfrac{2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2(x_3 - x_2) + 2x_1 - x_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}}$, проекція – D_{ABC}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le \sqrt{4 - x_1^2}$, елемент площі – $dS = \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}\, dx_1 dx_2$, звідки отримуємо

$$\Pi_{S_{ABC}} = \iint\limits_{S_{ABC}} \frac{2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2(x_3 - x_2) + 2x_1 - x_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}} dS =$$

$$= \iint\limits_{D_{ABC}} \left[2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2\left(4 - x_1^2 - x_2^2 - x_2\right) + 2x_1 - 4 + x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_3 =$$

$$= -2\pi + 12 + \frac{16}{3} + \frac{128}{15}$$

Підсумовуючи результати 1) – 4) отримаємо відповідь: $П_S = -2\pi$.

Б) Другий спосіб – за теоремою Остроградського-Гауса.

$$П_S = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{A} dV .$$

Знайдемо дивергенцію і елемент об'єму в прямокутній декартовій системі координат $\operatorname{div} \overline{A} = -1$, $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, далі перейдемо в потрійному інтегралі до циліндричних координат (r, φ, z), отримаємо

$$П_S = -\iiint\limits_V dx_1 dx_2 dx_3 = -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_0^{4-r^2} dz = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = -\frac{\pi}{2}\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = -2\pi .$$

Приклад 3.8 Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{A} = x_2 \bar{i}_1 + x_3 \bar{i}_2 + x_1 \bar{i}_3$ уздовж контуру L, що є перетином двох поверхонь $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, напрям обходу контру вибрати самостійно. Обчислення провести двома способами: безпосередньо за означенням циркуляції та за теоремою Стокса.

Розв'язання:

А) Перший спосіб – безпосередньо.

Контур L є лінією перетину циліндра $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ та площини $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, тобто – це еліпс (рисунок 12). Виберемо на контурі додатний напрям обходу, тоді циркуляція визначається формулою (3.11).

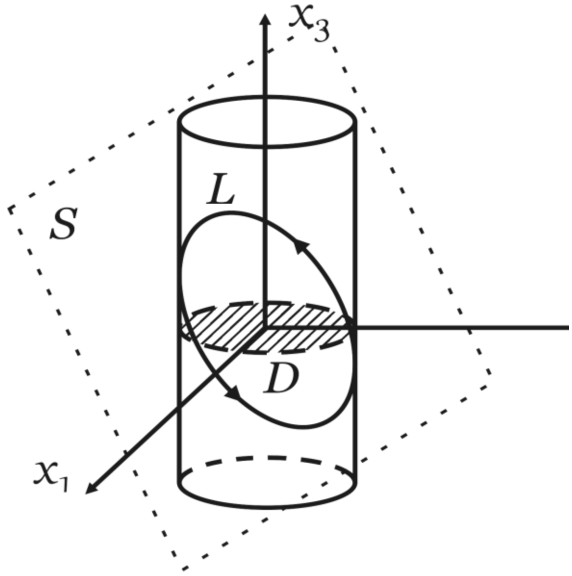

Рисунок 12.

Запишемо параметричні рівняння контуру L

$$\begin{cases} x_1 = R\cos t \\ x_2 = R\sin t \qquad , \ 0 \le t \le 2\pi. \\ x_3 = -R\cos t - R\sin t \end{cases}$$

Підставляючи в (3.12) отримаємо

$$Ц=\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r}=\oint_L x_2dx_1+x_3dx_2+x_1dx_3=\int_0^{2\pi}R\sin t\left(-R\sin t\right)+$$
$$+\left(-R\cos t-R\sin t\right)R\cos t+R\cos t\left(R\sin t-R\cos t\right)dt=-3\pi R^2$$

Б) Другий спосіб – за формулою Стокса.

В якості поверхні S, яку обмежує контур L виберемо площину $x_1+x_2+x_3=0$, тоді циркуляцію можна обчислити за формулою Стокса (3.17).

Знайдемо нормальний вектор $\overline{n}$ до площини $S: x_1+x_2+x_3=0$, напрям якого узгоджений з напрямом обходу контуру L, з врахуванням нормування, отримаємо $\overline{n}=\dfrac{\overline{i}_1+\overline{i}_2+\overline{i}_3}{\sqrt{3}}$, далі знайдемо ротор векторного поля, його проекцію на вектор нормалі та елемент площі поверхні dS в проекції на площину Ox_1x_2.

$$\operatorname{rot}\overline{A}=\begin{vmatrix}\overline{i}_1 & \overline{i}_2 & \overline{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=-\left(\overline{i}_1+\overline{i}_2+\overline{i}_3\right),\ \overline{n}\cdot\operatorname{rot}\overline{A}=-\sqrt{3},\ dS=\sqrt{3}dx_1dx_2.$$

Підставляючи в (3.17) і враховуючи, що проекцією поверхні S на площину Ox_1x_2 є круг $D: x_1^2+x_2^2\le R^2$, остаточно отримаємо

$$Ц=\iint_S \overline{n}\cdot\operatorname{rot}\overline{A}dS=-\iint_S\sqrt{3}dS=-3\iint_D dx_1dx_2=-3\pi R^2.$$

Наведемо також приклади знаходження потоку та циркуляції для полів, які задані у сферичних координатах.

Приклад 3.9 Знайти потік векторного поля $A=\rho\overline{e}_\rho+a^2\sin\theta\overline{e}_\theta$ через поверхню сфери $S:\rho=a$ за напрямом зовнішньої нормалі.

Розв’язання:

А) Перший спосіб – за означенням.

Поверхня сфери $\rho=a$ є координатною поверхнею сферичної системи координат, тому $dS=d\sigma_\rho$, де $d\sigma_\rho$ – елемент площі координатної поверхні $\rho=const$ який за формулою (2.5) дорівнює: $d\sigma_\rho=H_\theta H_\varphi d\theta d\rho=\rho^2\sin\theta d\theta d\rho$, вектор нормалі до сфери $\rho=a$ співпадає за напрямом з вектором локального базису $\overline{e}_\rho$, тобто можна покласти $\overline{n}=\overline{e}_\rho$, тому скалярний добуток

$\left(\overline{A},\overline{e}_{\rho}\right)=\left(\rho\overline{e}_{\rho}+a^{2}\sin\theta\ \overline{e}_{\theta}\right)\cdot\overline{e}_{\rho}=\rho$, замість ρ треба підставити рівняння поверхні $\rho=a$

$$\varPi_S=\iint\limits_S a^3\sin\theta d\theta d\varphi=a^3\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=a^3\cdot 2\cdot 2\pi=4\pi a^3$$

Б) Другий спосіб – за теоремою Остроградського-Гауса.

Знайдемо дивергенцію векторного поля в сферичній системі координат:

$$div\overline{A}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial\left(A_\rho\rho^2\right)}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\left(A_\rho\rho^2\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho^3}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\left(a^2\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial 0}{\partial\varphi}=3+\frac{2a^2\cos\theta}{\rho}.$$

Елемент об’єму в сферичній системі координат має вигляд:

$dV=H_\rho H_\theta H_\varphi d\rho d\theta d\varphi=\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$, звідки за (3.16) для потоку отримаємо

$$\varPi_S=\iiint\limits_V divAdv=\iiint\limits_V\left(3+\frac{2a^2\cos\theta}{\rho}\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=$$

$$=\iiint\limits_V\left(3\rho^2\sin\theta+2a^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)d\rho d\theta d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{a}\left(3\rho^2\sin\theta+2a^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)d\rho=$$

$$=\left(\int\limits_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta=0\right)=2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a}3\rho^2d\rho=2\pi\cdot 2\cdot a^3=4\pi a^3.$$

Приклад 3.10 Обчислити циркуляцію векторного поля, що задане в сферичних координатах $\overline{A}=\rho\sin\frac{\varphi}{2}\overline{e}_\rho+\left(\cos 2\varphi+\rho\right)\overline{e}_\varphi-\rho^3\sin\varphi\overline{e}_\theta$, уздовж кола $L:\rho=2,\ \theta=\frac{\pi}{6}$.

<u>Розв’язання:</u> $\rho = 2$ – сфера, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ – конус, L – лінія перетину сфери та конуса.

За формулою (3.11) циркуляція векторного поля уздовж контуру L дорівнює

$$Ц = \int_L \overline{A} \cdot d\overline{r}\text{, де } d\overline{r} = H_1 dq_1 \overline{e}_1 + H_2 dq_2 \overline{e}_2 + H_3 dq_3 \overline{e}_3.$$

В нашому випадку: $\overline{A} = \rho \sin\dfrac{\varphi}{2}\overline{e}_\rho + (\cos 2\varphi + \rho)\overline{e}_\varphi - \rho^3 \sin\varphi \overline{e}_\theta$, $H_\rho = 1$, $H_\theta = \rho$, $H_\varphi = \rho \sin\theta$.

Підставляючи в (3.11), отримаємо

$$Ц = \int_L \left(\rho \sin\frac{\varphi}{2}\overline{e}_\rho + (\cos 2\varphi + \rho)\overline{e}_\varphi - \rho^3 \sin\varphi \overline{e}_\theta \right) \cdot \left(d\rho \overline{e}_\rho + \rho d\theta \overline{e}_\theta + \rho \sin\theta d\varphi \overline{e}_\varphi \right) =$$

$$= \int_L \rho \sin\frac{\varphi}{2} d\rho + \rho \sin\theta (\cos 2\varphi + \rho) d\varphi - \rho^2 \sin\varphi d\theta =$$

$$= \begin{vmatrix} \rho = 2,\ d\rho = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6},\ d\theta = 0 \\ \varphi = \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\pi}{6}(\cos 2\varphi + 2) d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos 2\varphi + 2) d\varphi = 4\pi .$$

3.5 Спеціальні векторні поля

<u>*Потенціальні векторні поля.*</u>

Якщо векторне поле $\overline{A}$ є полем градієнта деякого скалярного поля u, то векторне поле $\overline{A}$ називається *потенціальним*, а поле u його *скалярним потенціалом.*

Тобто за означенням $\overline{A} = \operatorname{grad} u$, u – *скалярній потенціал.*

Критерій потенціальності. Для того щоб диференційовне векторне поле $\overline{A}$ в однозв'язній області $X \subset R^3$ було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб $\operatorname{rot}\overline{A}(M) = 0$, $\forall M \in X$.

Наслідок. Циркуляція потенціального поля $\overline{A}$ уздовж будь якого замкненого контуру L, що знаходиться усередині X , дорівнює нулю.

Скалярний потенціал потенціального векторного поля $\overline{A}$ можна знайти розв’язуючи систему диференціальних рівнянь $\operatorname{grad} u = \overline{A}$ або за формулою

$$u(M)=\int\limits_{x_1^0}^{x_1} A_1\left(t,x_2^0,x_3^0\right)dt+\int\limits_{x_2^0}^{x_2} A_1\left(x_1^0,t,x_3^0\right)dt+\int\limits_{x_3^0}^{x_3} A_1\left(x_1^0,x_2^0,t\right)dt+u(M_0) \qquad (3.18)$$

де $M_0\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)$ – деяка фіксована точка поля, $M(x_1,x_2,x_3)$ – довільна точка поля.

Соленоїдальні векторні поля.

Якщо поле $\overline{A}$ є полем ротора деякого векторного поля $\overline{W}$, то векторне поле $\overline{A}$ називається *соленоїдальним*, а вектор $\overline{W}$ його *векторним потенціалом*, тобто за означенням $\overline{A}=\mathrm{rot}\overline{W}$, $\overline{W}$ – векторний потенціал.

Критерій соленоїдальності.

Для того щоб диференційовне векторне поле $\overline{A}$ в однозв'язній області $X\subset R^3$ було соленоїдальним, необхідно й достатньо, щоб $div\overline{A}(M)=0$, $\forall M\in X$.

Векторний потенціал соленоїдального поля в області X визначається з точністю до градієнта довільного скалярного поля, тобто якщо $\overline{W_0}$– векторний потенціал поля $\overline{A}$, то вектор $\overline{W}=\overline{W_0}+grad u$ також є векторним потенціалом векторного поля $\overline{A}$.

Таким чином, для знаходження векторного потенціалу достатньо знайти деякий розв’язок системи диференціальних рівнянь $\mathrm{rot}\overline{W}=\overline{A}$, наприклад, можна вважати, що $W_3=0$, тоді отримаємо

$$\overline{W}=\bar{i}_2\int\limits_{x_1^0}^{x_1} A_3(t,x_2,x_3)dt+\bar{i}_3\left(-\int\limits_{x_1^0}^{x_1} A_2(t,x_2,x_3)dt+\int\limits_{x_2^0}^{x_2} A_1\left(x_1^0,x_2,x_3\right)dt\right) \qquad (3.19)$$

Квазіпотенціальне векторне поле.

Якщо існує скалярне поле $\mu(M)$ таке, що $\mu\overline{A}=\mathrm{grad}u$ для деякого скалярного поля $u(M)$, то векторне поле $\overline{A}$ називається *квазіпотенціальним*.

Критерій квазіпотенціальності – $\overline{A}\cdot rot\overline{A}\equiv 0$.

Гармонічне векторне поле.

Якщо векторне поле $\overline{A}$ є одночасно потенціальним і соленоїдальним, то його називають *гармонічним (лапласовим)* векторним полем.

Потенціал гармонічного векторного поля задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta u=0$, тобто є гармонічною функцією.

Критерій гармонічності векторного поля – $div\overline{A}\equiv 0,\ \mathrm{rot}\overline{A}\equiv 0.$

Приклад 3.11 Переконатись, що векторне поле $\overline{A}=2x_1x_2\bar{i}_1+\left(x_1^2-2x_2x_3\right)\bar{i}_2-x_2^2\bar{i}_3$ потенціальне, та знайти його скалярний потенціал.

Розв’язання: Перевіримо критерій потенціальності

$$\operatorname{rot}\overline{A}=\begin{vmatrix}\bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ 2x_1x_2 & x_1^2-2x_2x_3 & -x_2^2\end{vmatrix}=i_1(-2x_2+2x_2)+i_2\cdot 0+i_3(2x_1-2x_1)\equiv 0 \;\Rightarrow$$

$\overline{A}=\operatorname{grad}u$.

Потенціал знайдемо за формулою (3.18). За M_0 візьмемо початок координат, а за контур інтегрування візьмемо ламану, яка з'єднує точки M_0 і M та має ланки паралельні осям координат. Тоді отримаємо

$$u(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}2t\cdot 0dt+\int\limits_0^{x_2}\left(x_1^2-2t\cdot 0\right)dt+\int\limits_0^{x_3}\left(-x_2^2\right)dt=x_1^2x_2-x_2^2x_3+C.$$

Приклад 3.12 Переконатись, що векторне поле $\overline{A}=x_1^2x_2\bar{i}_1+\left(x_3-x_1x_2^2\right)\bar{i}_2+2x_1\bar{i}_3$ соленоїдальне та знайти його векторний потенціал.

<u>Розв'язання</u>:

Перевіримо критерій соленоїдальності.

$$\operatorname{div}\overline{A}=2x_1x_2-2x_1x_2\equiv 0,$$

векторне поле $\overline{A}$ – соленоїдальне.

Знайдемо векторний потенціал $\overline{W}$ з векторного рівняння

$$\overline{A}=\operatorname{rot}\overline{W}=\left(\frac{\partial W_3}{\partial x_2}-\frac{\partial W_2}{\partial x_3}\right)\bar{i}_1+\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_3}-\frac{\partial W_3}{\partial x_1}\right)\bar{i}_2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1}-\frac{\partial W_1}{\partial x_2}\right)\bar{i}_3,$$

нехай $W_3=0$, тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial W_2}{\partial x_3}=x_1^2x_2\\ \dfrac{\partial W_1}{\partial x_3}=x_3-x_1x_2^2\\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}=2x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}W_2=-x_1^2x_2x_3+\varphi(x_1,x_2)\\ W_1=\dfrac{1}{2}x_3^2-x_1x_2^2x_3+\psi(x_1,x_2)\\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}=2x_1\end{cases}$$

нехай $\psi(x_1,x_2)=0\;\Rightarrow\dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}=-2x_1x_2x_3+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+2x_1x_2x_3=2x_1\Rightarrow\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=2x_1$

$\Rightarrow \varphi = x_1^2$ таким чином $\overline{W_0} = \left(\frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_2^2x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - x_1^2x_2x_3\right)\bar{i}_2$, у загальному випадку $\overline{W} = \overline{W_0} + grad u$, де u – довільне диференційовне скалярне поле.

Основна терема векторного аналізу.

Довільне неперервно-диференційовне векторне поле $\overline{A}(M)$, що задане у будь-якій точці $M \in R^3$ тривимірного простору і таке, що, $\lim\limits_{|OM|\to\infty} \overline{A}(M) = \lim\limits_{|OM|\to\infty} rot\overline{A}(M) = \overline{0}$, $\lim\limits_{|OM|\to\infty} div\overline{A}(M) = 0$, може бути єдиним чином представлене у вигляді суми потенціального $\overline{A}_1$ й соленоїдального $\overline{A}_2$ векторних полів, тобто $\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$, де $\mathrm{rot}\,\overline{A}_1 = \overline{0}$, $\mathrm{div}\,\overline{A}_2 = 0$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте поняття скалярного поля. Перерахуйте основні види скалярних полів, наведіть фізичні приклади.

2. Що таке поверхні рівня, які характеристики скалярного поля вони визначають? Наведіть приклад скалярного поля, яке має поверхнями рівня концентричні сфери.

3. Що називають градієнтом скалярного поля? Як визначається градієнт в прямокутній декартовій системі координат? Які властивості має градієнт скалярного поля?

4. Запишіть формулу для градієнта скалярного поля в ортогональній криволінійній системі координат. Що таке оператор «набла»?

5. Сформулюйте поняття векторного поля. Перерахуйте основні види векторних полів, наведіть фізичні приклади.

6. Що називають векторною лінією векторного поля? Запищіть систему диференціальних рівнянь для визначення векторних ліній.

7. Сформулюйте поняття потоку векторного поля. В чому полягає фізичний зміст потоку?

8. Яку характеристику векторного поля називають дивергенцією? Запишіть формули для обчислення дивергенції в основних ортогональних системах координат.

9. Що таке циркуляція векторного поля? Визначте циркуляцію в прямокутній декартовій системі координат.

10. Сформулюйте поняття ротора векторного поля. Запишіть формулу для ротора в ортогональних координатах. Яким чином ротор пов'язаний з циркуляцією векторного поля?

11. Запишіть за допомогою оператора «набла» основні диференціальні операції першого і другого порядку.

12. Запишіть теореми Острогадського-Гаусса і Стокса у векторному вигляді. Сформулюйте умови цих теорем.

13. Яке векторне поле називають потенціальним? Що таке скалярний потенціал векторного поля і як він знаходиться? Як переконатися, що задане векторне поле є потенціальним? Доведіть рівність нулю циркуляції потенціального векторного поля за будь-яким замкненим контуром.

14. Яке векторне поле називають соленоїдальним? Що таке векторний потенціал векторного поля і як його знайти? Як переконатися, що задане векторне поле є соленоїдальним? Доведіть рівність нулю потоку соленоїдального векторного поля через будь-яку замкнену поверхню.

15. Які векторні поля називають гармонічними? Запишіть критерій гармонічності векторного поля. Наведіть приклад гармонічного поля.

16. Сформулюйте основну теорему векторного аналізу.