Лекція 4

Застосування різних моделей топологій на скінченних множинах для дослідження їх кількості та структури

Вступ. На сучасному етапі розвитку математики топологія є надзвичайно універсальним інструментом для досліджень, топологічна структура часто є базою, на якій будуються інші математичні структури. Топологічні простори та їх неперервні відображення з'являються в багатьох розділах математики.

Загальна (або теоретико-множинна) топологія оформилась в самостійну науку на початку XX ст., розвивалась в роботах Ф. Хаусдорфа, А. Пуанкаре, П.С. Александрова, П.С. Урисона, Л.Е.Я. Брауера. Назва розділу «алгебраїчна топологія» пов'язана з використанням для дослідження топологічних просторів алгебраїхних структур, зокрема, груп, полів. Бурхливі темпи досліджень сприяли отриманню суттєвиих змістовних результатів, що високо оцінено математичним товариством - за період з 1936 по 2006 р. одна з найвищих нагород в математиці, Медаль Філдса, була присуджена 48 математикам, дев'яти з них за дослідження саме в топології.

Багато цікавих питань виникають при дослідженні топологій на скінченних множинах. В такій постановці ці питання тісно пов'язані з дискретною математикою. Одним з них є питання про число топологій на заданій множині з n елементами. Для $n=2,3$ воно досить просте, але із зростанням n число топологій різко зростає. Одним із способів підрахунку топологій є їх відбір із всіх можливих наборів підмножин даної скінченної множини за допомогою ЕОМ. Очевидно, такий спосіб є неефективним для множин з достатньо великою кількістю елементів, але ці результати є важливими для тестування отриманих іншими методами результатів. На сьогодні онлайн-енциклопедія цілочислових послідовностей дає число усіх топологій на n-елементній множині для $n=\overline{0,18}$, а також число топологій з точністю до гомеоморфізмів на n-елементній множині для $n=\overline{0,16}$ [1].

Для вивчення топологій на скінченній множині їх моделювали, використовуючи різні математичні об'єкти (графи, відношення, булеві функції та інші). Перші результати дослідження топологій саме на скінченних множинах з'являються в 60–70-х роках двадцятого століття, наприклад, в статтях [2], [3]. На даний момент не існує формули, за якою можна було б визначити загальне число негомеоморфних або число усіх топологий на n-елементній множині, тому це питання залишається відкритим. Відома формула про зв'язок числа $T(n)$ усіх топологій на n-елементній множині та числа $\tilde{T}(m)$ усіх T_0-топологій на її m-елементних підмножинах, яка уперше була опублікована у статті J.W. Evans., F. Harary, M.S. Lynn:

$$T(n)=\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\cdot\tilde{T}(m),$$

де $S(n,m)$ – числа Стірлінга другого роду.

Моделювання топологій на скінченних множинах за допомогою булевих функцій виявилось достатньо зручним для їх описання та дослідження, оскільки кожну таку топологію можна задати кон'юнктивною формою спеціального виду і використовувати результати досліджень нормальних форм булевих функцій.

Ще одна модель топології використана в роботі [9]. В ній введено поняття вектора топології – впорядкованого набору цілих невід'ємних чисел, що визначають мінімальні околи елементів заданої скінченної множини. За допомогою цієї моделі вдалось повністю розв'язати задачі дослідження структури топологій з більшим за 2^{n-1} числом елементів.

Нагадаємо модифікацію означення топології для випадку скінченної множини.

Означення 1. *Топологією на скінченній множині* X називається такий набір τ її підмножин, в який включається $\varnothing$ і вся множина X, а також разом з будь-якою парою елементів набору τ в нього включається їх об'єднання і перетин. Пара (X,τ) називається *топологічним простором.* Будь-який елемент з X називається *точкою*, будь-який елемент з τ називається *відкритою множинною* [10].

Приклад. На множині $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ топологіями-«матрешками» будуть такі системи множин:

$$\mu_1=\{\varnothing,X\},$$

$$\mu_2=\{\varnothing,a,abd,X\},$$

$$\mu_3=\{\varnothing,ad,abd,abdf,X\},$$

$$\mu_4=\{\varnothing,d,ad,abd,abdf,abcdf,X\},$$

$$\mu_5=\{\varnothing,a,ad,abc,abcd,abcde,X\}.$$

Для спрощення запису коми в позначеннях елементів з топології, які містять більше одного елемента множини X, опускаємо. Наприклад, символ ab означає двоелементну множину $\{a,b\}$.

Прийнято говорити, що топологія на n-елементній множині відноситься до k-класу (або має вагу k), якщо вона містить k елементів.

Очевидно, що $k = 2, 3, \ldots, 2^n$. Для числа всіх топологій k-класу використовують позначення $\mathrm{T}(n, k)$. Якщо $k = 2^n$, то топологія називається дискретною.

Означення 2. *Вагою топології* τ називається кількість елементів в цій топології. Будемо позначати вагу символом $|\tau|$.

Зображення топологій графами (Т-колчанами) при $n = 4$.

Топології $3 \cdot 2^{n-2}$-класа зображаються T-колчанами одного виду (рис. 3.12). Топології $5 \cdot 2^{n-3}$-класа зображаються T-колчанами двох видів (рис.3.13 і перегорнутий, тобто з переорієнтацією всіх стрілок). Топології $9 \cdot 2^{n-4}$-класа зображаються T-колчанами трьох видів. Два з них рис 3.14, третій можна отримати з 3.14 а переорієнтацією стрілок).

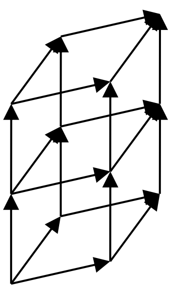


Рис. 3.12

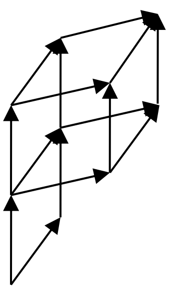
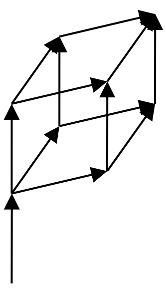
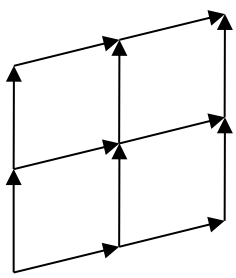


Рис. 3.13



а)



б)

Рис. 3.14

Означення 3. Топологія τ називається *близькою до дискретної* на n-елементній множині, якщо $|\tau| > 2^{n-1}$ [10].

Означення 4. *Мінімальним околом* M_i *точки* $x_i \in X$ називається перетин усіх околів цієї точки [10].

Означення 5. *Індексом точки (елемента)* $a \in X$ *відносно топології* τ назвемо число $ind_\tau(a)$, яке дорівнює кількості відмінних від a елементів у його мінімальному околі M_a.

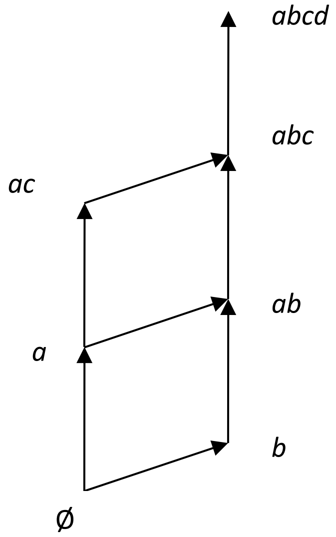


Рис. 4.1

Якщо зрозуміло, про яку топологію йдеться, то символ τ в позначенні індекса опускають.

Приклад. На множині $X = \{a, b, c, d\}$ для топології $\tau = \{\varnothing, a, b, ab, ac, abc, abcd\}$ (рис. 4.1) мінімальні околи й індекси всіх елементів множини X :

$$M_a = \{a\},\ \ ind_\tau(a) = 0;$$

$$M_b = \{b\},\ \ ind_\tau(b) = 0;$$

$$M_c = \{ac\},\ \ ind_\tau(c) = 1;$$

$$M_d = \{abcd\},\ \ ind_\tau(d) = 3.$$

Означення 6. *Топологія* називається T_0-*топологією*, якщо для будь-яких двох її різних точок хоча б одна має окіл, який не містить іншу точку.

Означення 7. Неспадну послідовність індексів усіх елементів називатимемо *вектором топології*. Вектор топології τ будемо позначати $\nu(\tau)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

Теорема. Послідовність невід'ємних цілих чисел $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ є вектором деякої T_0-топології на n -елементній множині тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє наступним умовам:

а) $\alpha_i \le \alpha_{i+1},\ i=\overline{1,n-1}$,

б) $\alpha_i \le i-1,\ i=\overline{1,n}$.

Між вектором топології та її вагою існує залежність. Для близьких до дискретної топологій ця залежність повністю досліджена і описується наступною теоремою, яка фактично є критерієм близьких до дискретної топологій, сформульованим у термінах розглянутої моделі топологій на скінченній множині.

Теорема. На множині X , $|X|=n,\ n\ge 4$ існують такі і лише такі топології τ з числом елементів $|\tau|>2^{n-1}$, вектор яких має один з наступних виглядів:

а) $v(\tau)=(0,\ldots,0,\alpha_n)$, $1\le\alpha_n\le n-1$, причому $|\tau|=2^{n-1}+2^{n-1-\alpha_n}$.

б) $v(\tau)=\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{k},1,\ldots,1\right)$, $1\le k\le n-2$ і $\bigcap\limits_{m=k+1}^{n} M_m=\{y\}$. При цьому $|\tau|=2^{n-1}+2^{k-1}$.

в) $v(\tau)=(0,\ldots,0,1,1)$ і $M_{n-1}\cap M_n=\varnothing$, при цьому $|\tau|=2^{n-1}+2^{n-4}$ [9].

Наслідок. Будь-яка близька до дискретної топологія на n-елементній множині є T_0-топологією.

Аналізуючи набір чисел, які є вагою близьких до дискретної топологій, помічаємо, що серед них відсутні деякі числа з відрізку натурального ряду $\left(2^{n-1};2^n\right]$. Це означає існування таких k, що у відповідному k-класі немає жодної топології (k-клас пустий). Існування пустих класів було доведено ще у середині минулого століття. У 1966 р. H. Sharp, Jn. [11] і у 1968 р. D. Stephen [12] показали, що для будь-якої не дискретної топології на n-елементній множині кількість k відкритих множин задовольняє умові $k \le 3 \cdot 2^{n-2}$.

Для описання непустих k-класів близьких до дискретної топологій помітимо, що в кожному класі є принаймні одна топологія з вектором $(0, \dots, 0, \alpha_n)$, де $1 \le \alpha_n \le n-1$. Отже, послідовність для ваги близьких до дискретних топологій на n-елементній множині має вигляд

$$\left(2^{n-1}+2^0\right), \left(2^{n-1}+2^1\right), \underbrace{\dots}_{2^1-1}, \left(2^{n-1}+2^2\right), \dots, 5 \cdot 2^{n-3}, \underbrace{\dots}_{2^{n-3}-1}, 3 \cdot 2^{n-2}, \underbrace{\dots}_{2^{n-2}-1}, 2^n,$$

де під фігурними дужками вказано кількість класів, в яких немає жодної топології.

Список використаних джерел:

1. Он-лайн энциклопедия целочисленных последовательностей. URL : https://oeis.org/?language =russian.

2. Evans J. W., Harary F., Lynn M. S. On the computer enumeration of finite topologies. // *Communications of the ACM*. 1967. Vol.10. №5. P. 295–297.

3. Sharp, Jr. H. Cardinality of finite topologies. // *Journal Combinatorial Theory*. 1968. Vol. 5. P. 82–86.

4. Krishnamurthy V. On the enumeration of homeomorphism classes of finite topologies. // *Journal of the Australian Mathematical Society*. Series A. 1977. Vol. 24. P. 320–338.

5. Адаменко Н.П., Величко И.Г. Классификация топологий на конечных множествах с помощью графов. // *Український математичний журнал*. Київ, 2008. т.60, №7. С. 992–996.

6. Боревич З.И. К вопросу перечисления конечных топологий. Зап. науч. сем. ЛОМИ. Ленинград: Наука, 1977. Том 71. С. 47-65.

7. Benoumhani M. The number of topologies on a finite set / M. Benoumhani // Journal of Integer Sequences. — 2006. — Vol. 9. — Article 06.2.6.

8. Erne M. Counting finite posets and topologies / M. Erne, K. Stege // Kluwer Academic Publishers. — 1991. — Vol. 8. — P. 247–265.

9. Величко И. Г., Стеганцева П. Г., Башова Н. П. Перечисление топологий близких к дискретной на конечных множествах // *Известия вузов. Математика*. 2015. № 11. С. 23–31.